Abstraction & Application **9** (2013) 86 − 91 UADY

Funtores sharp y un ejercicio sobre endolongitud

[a]Alejandro Waldemar Cobá Magaña, [b]Jesús Efrén Pérez Terrazas, [c]Carlos Jacob Rubio Barrios

Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán

[a]alejandro.coba@uady.mx, [b]jperezt@uady.mx, [c]carlos.rubio@uady.mx

Abstract

Here we review the notion of sharp functor and we show a connection with an exercise about endo-length.

Resumen

Recordamos el concepto de funtor sharp y mostramos una conexión con un ejercicio acerca del tema de endolongitud.

Keywords and phrases : Endolength, functor, sharp functor, tensor product.

2010 *Mathematics Subject Classification* 16D99.

En [5] se introdujo el concepto de funtor sharp para poder extender resultados sobre el tipo de representación de una $k-$álgebra de dimensión finita, conocidos cuando k es algebraicamente cerrado, al caso en que k es perfecto.

En este artículo de revisión queremos ver algunos resultados elementales referentes a funtores sharp, así como mostrar una breve aplicación a un ejercicio sobre endolongitud que está en [2] y que ha resultado muy útil en [4], [5] y otros artículos.

1. Radical y funtores sharp

En este escrito todo anillo es asociativo y tiene unitario.

Por lo general R denotará un anillo y al radical de R lo vamos a denotar por $\mathrm{rad}R$.

Vamos a usar varios resultados básicos acerca del radical de un anillo, los cuales se encuentran en la gran mayoría de los escritos sobre el tema, por ejemplo en [3].

Una caracterización útil del radical la podemos ver en el cuarto inciso de la proposición 2.7 de [3], es decir que dado el anillo R tenemos que $r \in \mathrm{rad}R$ si y solo si $1 - xry$ es invertible para cualesquiera $x, y \in R$.

El siguiente lema es parte del remark 31.6 de [2], pero queremos agregar un argumento.

Lema 1.1 *Sea $\phi : R \to S$ un homomorfismo de anillos unitarios (es decir que es un homorfismo de anillos y que además cumple que $\phi(1_R) = 1_S$).*

1. *Si ϕ es suprayectivo entonces* $\phi(\mathrm{rad}R) \subset \mathrm{rad}S$.

2. *Supongamos que ϕ es suprayectivo y que además se cumple que cuando $\phi(r)$ es invertible entonces r es invertible: entonces ϕ induce un isomorfismo* $\overline{\phi} : R/\mathrm{rad}R \to S/\mathrm{rad}S$.

Demostración: Sean $r \in \mathrm{rad}R$, $s_1, s_2 \in S$. Por suprayectividad de ϕ existen $x, y \in R$ tales que $\phi(x) = s_1$ y $\phi(y) = s_2$, así que existe $u \in R$ tal que $u(1_R - xry) = 1_R = (1_R - xry)u$, luego $\phi(u)$ es el inverso multiplicativo de $1 - s_1\phi(r)s_2$, y como s_1 y s_2 son arbitrarios tenemos que $\phi(r) \in \mathrm{rad}S$, de donde se sigue el primer inciso del enunciado.

Luego ϕ induce un homomorfismo suprayectivo de anillos unitarios $\overline{\phi} : R/\mathrm{rad}R \to S/\mathrm{rad}S$.

Ahora sea $r \in R$ tal que $\phi(r) \in \mathrm{rad}S$. Entonces, para cualesquiera $x, y \in R$, tenemos que $\phi(1_R - xry) = 1_S - \phi(x)\phi(r)\phi(y)$ es invertible, así que si se cumple la hipótesis del segundo inciso del enunciado obtenemos que $1_R - xry$ es invertible, luego $r \in \mathrm{rad}R$: se sigue que $\overline{\phi}$ es inyectiva.

$\square$

Para apreciar mejor el resultado previo, considere el lector el anillo de polinomios en una variable $k[t]$, con k un campo, el anillo cociente $k[t] / \langle t^2 \rangle$, el epimorfismo canónico $\pi : k[t] \to k[t] / \langle t^2 \rangle$, y verifique que $\mathrm{rad}(k[t]) = 0$ y $\mathrm{rad}\left(k[t] / \langle t^2 \rangle\right) = \langle t \rangle / \langle t^2 \rangle$.

A continuación recordaremos definiciones referentes a funtores e iremos relacionando estas nociones con la de radical.

Definición 1.2 Dado un campo k y una categoría $\mathcal{C}$, decimos que $\mathcal{C}$ es una *k-categoría* si cumple lo siguiente:

1. $\mathcal{C}$ tiene objeto cero.

2. Para cada par de objetos M, N en $\mathcal{C}$ el conjunto de morfismos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$ es un $k-$espacio vectorial.

3. Para cualesquiera objetos L, M, N en $\mathcal{C}$ la composición de morfismos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(L, M) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(L, N)$ es $k-$lineal en cada componente.

4. $\mathcal{C}$ tiene sumas finitas.

En [1], página 28, no se menciona explícitamente la existencia de un objeto cero en la definición de categoría aditiva, pero suponemos que, en ese texto, dicha existencia estaba implícita al pedir que en la categoría hubiese sumas finitas.

Definición 1.3 Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ $k-$categorías y $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor. Decimos que F es un *k-funtor* si para cada par de objetos M, N en $\mathcal{C}$ el mapeo inducido entre $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(M), F(N))$ es una transformación $k-$lineal.

Para proporcionar un ejemplo recordemos que si Λ es una $k-$álgebra entonces su categoría de módulos izquierdos, $\Lambda-$Mod, es una $k-$categoría y, por supuesto, el funtor identidad de $\Lambda-$Mod es un $k-$funtor.

Definición 1.4 Sea $\mathcal{C}$ una $k-$categoría y M un objeto en $\mathcal{C}$. Decimos que M es *inescindible* si M no es un objeto cero y un isomorfismo $M \cong M_1 \oplus M_2$ en $\mathcal{C}$ implica que M_1 ó M_2 es un objeto cero.

Definición 1.5 Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un $k-$funtor.

1. Decimos que F *preserva inescindibles* si para cada inescindible $M \in \mathcal{C}$ se cumple que $F(M)$ es inescindible.

2. Decimos que F *preserva clases de isomorfía* si para cada par de objetos $M, N \in \mathcal{C}$ se tiene que $M \cong N$ si y solo si $F(M) \cong F(N)$.

Definición 1.6 Sean $\mathcal{C}$ una $k-$categoría y $M \in \mathcal{C}$. Definimos E_M como $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(M)^{op}$, es decir, el anillo de endomorfismos de M con la multiplicación opuesta.

El siguiente concepto fue presentado en [5], sin embargo, queremos señalar que el nombre que finalmente recibió fue sugerido por el Dr. Leonardo Salmerón Castro.

Definición 1.7 Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías $k-$aditivas y sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un $k-$funtor. Decimos que F es *sharp* si:

1. F preserva inescindibles y clases de isomorfía.
2. Para cada $M \in \mathcal{C}$ se cumple que $F(\mathrm{rad}E_M) \subset \mathrm{rad}E_{F(M)}$ y que el morfismo inducido $E_M/\mathrm{rad}E_M \to E_{F(M)}/\mathrm{rad}E_{F(M)}$ es un isomorfismo.

El siguiente resultado es fácil de probar y lo dejamos al amable lector.

Proposición 1.8 *Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ son funtores sharp entonces el funtor composición GF es sharp.*

Definición 1.9 Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Decimos que los *idempotentes se dividen* en $\mathcal{C}$ si para cualquier $M \in \mathcal{C}$ y $e \in E_M$ idempotente, existe un isomorfismo $h : M \to M_1 \oplus M_2$ en $\mathcal{C}$ tal que $heh^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Notemos que si e no es el morfismo cero o un isomorfismo entonces ni M_1 ni M_2 son objetos cero.

Para proporcionar un ejemplo del concepto anterior, consideremos un anillo R y su categoría de $R-$módulos izquierdos $R-$Mod. Dados $M \in R-$Mod y $e \in E_M$ un idempotente, sean $M_1 = \mathrm{Im}(e)$ y $M_2 = \ker(e)$, y consideremos la función $h : M \to M_1 \oplus M_2$ dada por $h(m) = (e(m), m - e(m))$. Es fácil verificar que h es un homomorfismo de $R-$módulos. Supongamos que m está en el kernel de h entonces $e(m) = 0$, luego se tiene la identidad $m - 0 = 0$: se sigue que $\ker(h) = \{0\}$ y que h es inyectivo. Ahora consideremos al elemento $(e(m), k) \in M_1 \oplus M_2$, entonces $h(e(m) + k) = \left(e^2(m), e(m) + k - e^2(m)\right) = (e(m), k)$, así que h es suprayectivo. Nuevamente sea $(e(m), k) \in M_1 \oplus M_2$, luego $heh^{-1}((e(m), k)) = he(e(m) + k) = h(e(m)) = (e(m), 0)$, es decir que $heh^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Se sigue que en $R-$Mod los idempotentes se dividen.

Proposición 1.10 *Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un $k-$funtor. Si en $\mathcal{C}$ se dividen los idempotentes y F es fiel y pleno entonces F es sharp.*

Demostración: Por ser F fiel y pleno se cumple que F preserva clases de isomorfía y que cumple el segundo axioma de la definición de funtor sharp.

Ahora supongamos que $M \in \mathcal{C}$ es tal que $F(M) \cong N_1 \oplus N_2$ con $N_1 \ncong 0$ y $N_2 \ncong 0$. En $E_{N_1 \oplus N_2}$ existe el idempotente $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, el cual no es el morfismo cero ni la identidad, así que en $E_{F(M)}$ existe un idempotente que no es cero ni isomorfismo, por lo que en E_M existe un idempotente que no es cero ni isomorfismo: como los idempotentes se dividen en $\mathcal{C}$ se tiene que M no es indescindible, así que F preserva inescindibles.

$\square$

Definición 1.11 Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor. Decimos que F *refleja isomorfismos* si, dado el morfismo $f : M \to N$ en $\mathcal{C}$, se tiene que f es un isomorfismo si y solo si $F(f)$ es un isomorfismo.

Proposición 1.12 *Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un $k-$funtor. Supongamos que F es pleno, denso y refleja isomorfismos, entonces F es sharp.*

Demostración: F preserva clases de isomorfía porque F refleja isomorfismos.

Notemos que F envía objetos cero en objetos cero. Luego, como F refleja isomorfismos, si $M \in \mathcal{C}$ no es un objeto cero entonces $F(M)$ no es un objeto cero.

Asumamos que para $M \in \mathcal{C}$ se tiene que $F(M) \cong N_1 \oplus N_2$, con $N_1 \ncong 0$ y $N_2 \ncong 0$. Por densidad de F existen M_1 y M_2 tales que $F(M_1) \cong N_1$ y $F(M_2) \cong N_2$, y por el argumento previo $M_1 \ncong 0$ y $M_2 \ncong 0$. Como F es pleno y refleja isomorfismos tenemos que $M \cong M_1 \oplus M_2$: se sigue que F preserva inescindibles.

Nuevamente sea $M \in \mathcal{C}$. Por ser F pleno y reflejar isomorfismos tenemos que el homomorfismo de anillos unitarios $E_M \to E_{F(M)}$ inducido por F satisface las hipótesis del lema 1.1, así que se cumple el segundo axioma de la definición de funtor sharp.

□

El siguiente corolario es el lema 4.5 de [5].

Corolario 1.13 *Sea Λ una $k-$álgebra de dimensión finita. El funtor* $\mathrm{Cok}^2 : \mathcal{P}^2(\Lambda) \to \Lambda - \mathrm{Mod}$ *(ver, por ejemplo, sección 18 de [2] para la definición y propiedades de este funtor) es sharp.*

Demostración: Es conocido (usar, por ejemplo, el lema 18.10 (4) de [2]) que Cok^2 es pleno, denso y refleja isomorfismos, así que basta aplicar la proposición 1.12.

□

2. Endolongitud

Sean R un anillo y $M \in R - \mathrm{Mod}$. Recordemos que M tiene *longitud n*, con n un entero positivo, si existe una sucesión anidada de submódulos $\{0\} = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_{n-1} \subset M_n = M$ tal que M_{i+1}/M_i es un $R-$módulo simple para $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. A tal sucesión de submódulos se le conoce como *serie de composición.*

El teorema de Jordan-Hölder (ver teorema I.1.2 de [1]) nos dice que si M tiene una serie de composición de longitud n entonces toda serie de composición de M tiene longitud n.

Además, si M tiene longitud n entonces es un módulo artiniano y un módulo noetheriano.

Si M es el módulo cero entonces se dice que tiene longitud cero. En caso de que M no sea cero y no tenga longitud n se dice que tiene longitud infinita.

La longitud de M como $R-$módulo se denota como $\ell_R(M)$.

Por supuesto que se pueden hacer definiciones similares cuando M es un $R-$módulo derecho.

Sea $\phi : S \to R$ un homomorfismo de anillos unitarios. Es conocido que vía ϕ se induce en M una estructura de $S-$módulo y que una sucesión anidada de $R-$submódulos de M es también una sucesión anidada de $S-$módulos, por lo que tenemos que $\ell_R(M) \leq \ell_S(M)$. La igualdad se obtendría si se pudiese asegurar que cada cociente M_{i+1}/M_i es simple como $S-$módulo, lo que ocurre, por ejemplo, cuando ϕ es suprayectiva.

Sin embargo, queremos mostrar un caso un poco más interesante.

Proposición 2.1 *Sea $\phi : S \to R$ un homomorfismo de anillos unitarios tal que $\phi(\mathrm{rad}S) \subset \mathrm{rad}R$ y el homomorfismo inducido $\overline{\phi} : S/\mathrm{rad}S \to R/\mathrm{rad}R$ es suprayectivo. Entonces, para M un $R-$módulo de longitud finita se cumple, con la estructura inducida de $S-$módulo sobre M por ϕ, que $\ell_R(M) = \ell_S(M)$.*

Demostración: Sea L un $R-$módulo simple. Es conocido (ver proposición 2.7.1 de [3]) que $(\mathrm{rad}R)\,L = \{0\}$, así que L también es, de manera canónica, un $R/\mathrm{rad}R-$módulo simple.

Se sigue de la hipótesis que $\overline{\phi}$ induce sobre L una estructura de $S/\mathrm{radS}-$módulo simple.

Puesto que $\phi\,(\mathrm{rad}S)\,L = 0$, es sencillo verificar que la estructura de $S/\mathrm{rad}S-$módulo inducida sobre L por ϕ es la misma que la inducida por $\overline{\phi}$, así que L es un $S-$módulo simple.

De los argumentos mostrados se concluye que si $\{0\} = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_{n-1} \subset M_n = M$ es una serie de composición de M como $R-$módulo entonces también es una serie de composición de M como $S-$módulo.

□

Ahora queremos usar una longitud especial.

Es fácil verificar que M tiene una estructura canónica de $R - E_M-$bimódulo, así que definimos la endolongitud de M como la longitud que tiene como E_M-módulo derecho, lo que denotamos como $\mathrm{endol}\,(M) = \ell_{E_M}\,(M)$.

A continuación mostramos el resultado que más nos interesa revisar, el cual es una ligera modificación del lema 31.4 de [2].

Proposición 2.2 *Sean R y T anillos y sea B un $R-T-$bimódulo que como módulo derecho es isomorfo a T^d (es decir que es libre de rango d), con d un entero positivo. Consideremos el funtor $B \otimes_T \_ : T - \mathrm{Mod} \to R - \mathrm{Mod}$. Entonces, para $M \in T - \mathrm{Mod}$ se tiene que*

$$\mathrm{endol}\,(B \otimes_T M) \leq d \times \mathrm{endol}\,(M)\,.$$

Cada una de las siguientes condiciones es suficiente para que se cumpla la igualdad:

1. *$B \otimes_T \_$ es pleno.*
2. *$B \otimes_T \_$ es sharp.*

Demostración: Supongamos que $\mathrm{endol}\,(M) = n \in \mathbb{N}$.

Como existe un isomorfismo de $T-$módulos derechos $\alpha : B \to T^d$ entonces podemos darle estructura de $R - T-$bimódulo a T^d, convirtiendo a α en un isomorfismo de $R - T-$bimódulos.

Ese isomorfismo de $R - T-$bimódulos induce una equivalencia natural η_α (ver páginas 43 y 75 de [6]) del funtor $B \otimes_T \_ : T - \mathrm{Mod} \to R - \mathrm{Mod}$ al funtor $T^d \otimes_T \_ : T - \mathrm{Mod} \to R - \mathrm{Mod}$.

Notemos que dados $L, N \in T - \mathrm{Mod}$ existe un isomorfismo de grupos abelianos
$\eta_{L,N} : \mathrm{Hom}_R\,(B \otimes_T L, B \otimes_T N) \to \mathrm{Hom}_R\left(T^d \otimes_T L, T^d \otimes_T N\right)$ dado por $h \mapsto (\alpha \otimes 1_N)\,h\left(\alpha^{-1} \otimes 1_L\right)$.

Luego es fácil verificar que si $\{0\} = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_{n-1} \subset A_n = B \otimes_T M$ es una serie de composición como $E_{B \otimes_T M}-$módulo derecho entonces

$$\{0\} = (\alpha \otimes 1_M)\,A_0 \subset (\alpha \otimes 1_M)\,A_1 \subset \ldots \subset (\alpha \otimes 1_M)\,A_{n-1} \subset (\alpha \otimes 1_M)\,A_n = T^d \otimes_T M$$

es una serie de composición como $E_{T^d \otimes_T M}-$módulo derecho, así que $\mathrm{endol}\,(B \otimes_T M) = \mathrm{endol}\left(T^d \otimes_T M\right)$.

Ahora observemos que $T^d \otimes_T M \cong M^d$ como grupos abelianos, así como que el funtor $T^d \otimes_T \_$ envía a $f \in E_M$ en $1 \otimes f \in E_{T^d \otimes_T M}$, por lo que induce un homomorfismo de anillos $\phi : E_M \to E_{T^d \otimes_T M}$, el cual induce una estructura como E_M-módulo derecho en $T^d \otimes_T M$: es fácil ver que $\ell_{E_M}\left(T^d \otimes_T M\right) = d \times \mathrm{endol}\,(M)$, así que por el argumento previo a la proposición 2.1 tenemos que $\mathrm{endol}\,(B \otimes_T M) \leq d \times \mathrm{endol}\,(M)$.

Ahora bien, el funtor $T^d \otimes_T \_$ es pleno o es sharp si y solo si $B \otimes_T \_$ es pleno o es sharp, respectivamente: en cualquiera de los dos casos ϕ cumple las hipótesis de la proposición 2.1, así que $\mathrm{endol}\,(B \otimes_T M) = \ell_{E_M}\left(T^d \otimes_T M\right)$.

□

Vale la pena destacar que la proposición 2.1 nos indica que el resultado de la proposición 2.2 se puede extender a otros tipos de funtores, a los que se les podría llamar quasi-sharp o tal vez almost sharp.

Agradecimientos

Agradecemos al árbitro por sus sugerencias y por su paciencia. También queremos agradecer la enorme generosidad que el Dr. Raymundo Bautista Ramos y el Dr. Leonardo Salmerón Castro siempre han mostrado con sus conocimientos y sus ideas.

Referencias

[1] Maurice Auslander, Idun Reiten, Sverre O. Smalø. Representation Theory of Artin Algebras. Cambridge studies in advanced mathematics 36. Cambridge University Press. 1995.

[2] Raymundo Bautista, Leonardo Salmerón, Rita Zuazua. Differential Tensor Algebras and their Module Categories. London Mathematical Society Lecture Note Series 362. Cambridge University Press. 2009.

[3] Alejandro Cobá, Efrén Pérez. *Módulos con anillo de endomorfismos local y semiprimario.* Abstraction & Application **3** (2010) 35-69.

[4] Gilberto Méndez, Efrén Pérez. *A remark on generic tameness preservation under base field extension,* J. Algebra Appl. **12** No. 4 (2013) 1250183-1 - 1250183-4.

[5] Efrén Pérez. *On semigeneric tameness and base field extension.* Aceptado (salvo correcciones) en Glasgow Mathematical Journal.

[6] Joseph J. Rotman. An introduction to Homological Algebra. Academic Press. 1979.