

Recepción de artículo: 13 de Abril de 2013  
Aceptación de artículo: 14 de Febrero de 2014

## Un paseo por el modelo GARCH y sus variantes

Jorge Argáez Sosa<sup>a</sup>, José Luis Batún Cutz, Ernesto Guerrero Lara, Diódora Kantún Chim,  
Salvador Medina Peralta, Henry Pantí Trejo

Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán, México

<sup>a</sup>argasosa@uady.mx

### Abstract

Since the pioneering work of Engle (1982) and Bollerslev (1986), ARCH and GARCH models have been widely used for modelling financial time series. These models have been modified by including variants to original definitions: (1) in the functional relation between the current conditional variance and the past conditional variances and innovations or (2) in the distribution of the errors. These changes are due to the need to incorporate the inherent characteristics of financial time series and allow for better statistical modelling. In this work, the GARCH model and its most used variants for analysis of financial and economic time series data are described, the main characteristics of the models are explained and some applications are showed. The present document is the result of an exhaustive bibliographical review whose aim is to be an initial reference for future work in financial and economic areas, particularly in the analysis of Mexican financial time series data.

### Resumen

A partir de los trabajos originales de Engle (1982) y Bollerslev (1986), los modelos ARCH y GARCH han sido ampliamente utilizados para modelar la volatilidad en series de tiempo financieras. Estos modelos han sido enriquecidos incorporando variantes en las definiciones originales: (1) en la relación funcional existente entre la volatilidad condicional actual y las volatilidades condicionales e innovaciones pasadas o (2) en la distribución estadística de los errores. Estas modificaciones están motivadas por la necesidad de incorporar las características inherentes de las series de tiempo financieras para permitir una mejor modelación estadística. En este trabajo se describen los modelos originales y las variantes que han sido mayormente empleadas en las series de datos de las áreas de economía y finanzas, mencionando sus características principales y algunas de sus aplicaciones. El presente artículo es el resultado de una amplia revisión bibliográfica, cuyo objetivo es tener un punto de partida para futuros trabajos en las áreas financiera y económica, en particular en series de tiempo mexicanas.

---

*Keywords and phrases* : ARCH, Laplace Asimétrica, Colas pesadas, EGARCH, Errores no normales, Normal Inversa Gaussiana, Normal Sesimal, PGARCH, TGARCH, Volatilidad.

2010 *Mathematics Subject Classification* : 01-00, 62M10, 62P05, 62P20

---

## 1. Introducción

La medición de los riesgos financieros ha contribuido a tomar mejores decisiones en beneficio de la administración de riesgos dentro del mundo empresarial o la economía de un país. En Zhu (2007) se indica que el riesgo financiero proviene de tres fuentes:

- El riesgo de mercado, definido como la incertidumbre causada por los cambios en los factores que afectan al mercado, como las tasas de interés, tasas de cambio, precio de las acciones y los precios de las materias primas, entre otras;
- El riesgo de crédito, el cual proviene de las pérdidas asociadas con el incumplimiento o rebaja de crédito de un deudor;
- El riesgo operacional, relacionado con fallas operacionales de las empresas o entidades.

El Comité de Supervisión Bancaria publica el acuerdo de Basilea I, donde se considera el denominado Valor al Riesgo (VaR) como una medida para la exposición al riesgo del mercado que tienen los bancos. En términos de pérdidas, el VaR a un nivel de confianza  $\alpha$ , es la frontera inferior de las  $100(1 - \alpha)\%$  mayores pérdidas durante un horizonte de tiempo. Para determinar dicha frontera, el acuerdo de Basilea establece  $\alpha = 0.99$  y un tiempo de 10 días. Existen tres tipos de modelos para estimar el VaR:

1. paramétricos, que suponen una distribución para los datos financieros que por experiencia se sabe que presentan sesgo y colas pesadas.
2. no paramétricos, que utilizan los cuantiles empíricos, por lo que son adecuados para modelar datos con colas pesadas.
3. semiparamétricos, que suponen una distribución para una cola pero no suponen distribución alguna para lo que está fuera de ella.

En teoría existen muchas explicaciones del por qué los datos financieros tienen colas pesadas, siendo dos de las más aceptadas: (1) la existencia de cambios significativos discontinuos llamados “saltos” causados por cambios inesperados en los factores de mercado, y (2) la alta correlación que presenta la volatilidad con volatilidades pasadas; esta característica es la que motiva el desarrollo del presente trabajo.

La volatilidad representa la variación de los precios de los activos que en muchas ocasiones es estimada a través de la desviación estándar de los precios o de los rendimientos. La modelación de la volatilidad de las series financieras es un campo de creciente investigación en Finanzas y Economía, como se aprecia en los trabajos de Nelson y Sunier (1995), Arsa y Coutts (1997), Chan *et al.* (2004), Zhu (2007) y Kosapattarapim *et al.* (2012).

Las series de tiempo financieras presentan en general las siguientes características, las cuales se ilustran en la Figura 1:

En finanzas es frecuente hablar de generación de expectativas a partir de situaciones que sucedieron en el pasado. Por ejemplo, se relaciona la estabilidad o inestabilidad presente en los mercados financieros con su comportamiento inmediato anterior. Además, un cambio brusco en el mercado está seguido de una evolución tranquila. En situaciones como éstas, el comportamiento en el momento actual responde a una expectativa generada sobre el valor de cambio producido en el momento precedente; es decir, a un valor esperado condicionado por la varianza del periodo anterior. Engle (1982) propone un modelo que expresa una varianza condicional como función lineal del cuadrado de los valores pasados del modelo; este modelo es conocido como el modelo Autorregresivo Condicional Heterocedástico (ARCH).

McNees (1979) sugiere que la incertidumbre o aleatoriedad asociada con los diferentes periodos parece variar ampliamente a través del tiempo. Mas recientemente, López (2004) indica que los errores grandes y pequeños tienden a agruparse en periodos de tiempo consecutivos. Este comportamiento es el que sugiere el uso del modelo ARCH, que predice la varianza considerando el comportamiento de los errores pasados. Esta

predicción varía con el tiempo. El modelo ARCH posee características que lo hacen atractivo para quienes realizan aplicaciones econométricas, aunque los economistas han encontrado que su capacidad de predicción varía de un periodo a otro. McNees (1979) indica que los datos muestran cierta correlación durante el período de tiempo en el que se presenta una varianza grande.

Otra área de aplicación se encuentra en la teoría monetaria y finanzas, donde los portafolios de activos financieros son considerados como funciones de los valores esperados y de las varianzas de las tasas de rendimiento. Cualquier cambio en la demanda de los activos debe estar asociado con cambios en los valores esperados y en las varianzas de las tasas de rendimiento. Por tal motivo los modelos de regresión estándar o series de tiempo ARIMA no son adecuados porque suponen que la varianza es constante a través del tiempo.

En la práctica se requieren procesos ARCH de orden elevado para lograr capturar la dinámica de la volatilidad condicionada en las series financieras (Peters, 2001). Ante este caso, Bollerslev (1986) presentó un modelo más general que el modelo ARCH, denominado GARCH, el cual describe el agrupamiento de la volatilidad y supone que el grado de incertidumbre en el rendimiento de un activo varía en el tiempo, y por lo tanto la compensación que requieren los inversionistas con aversión al riesgo para invertir, también debe variar. A diferencia del modelo ARCH, el modelo GARCH no solo involucra a las perturbaciones sino también a las varianzas rezagadas.

La estructura del presente artículo es la siguiente: en la Sección 2 se presenta la definición del modelo ARCH y del modelo GARCH. En la Sección 3 se presentan las definiciones y características de las variantes del modelo GARCH: EGARCH, TGARCH y PGARCH. En la Sección 4 se explican las distribuciones más comunes que se utilizan para modelar series de tiempo. En la Sección 5 se describen diversas aplicaciones encontradas en la literatura del modelo GARCH o sus variantes a las series de tiempo financieras que utilizan las distribuciones descritas en la Sección 4.

1. la volatilidad no sólo cambia en el transcurso del tiempo sino que, además, tiende a presentarse en grupos; es decir, un cambio grande (pequeño) en la volatilidad va seguido de cambios grandes (pequeños). Este comportamiento ocurre debido a que la volatilidad de los rendimientos de los activos financieros presenta una correlación serial (Ver Figura 1(a)).
2. la distribución de los rendimientos es leptocúrtica (Ver Figura 1(b)).
3. el efecto de apalancamiento, que se refiere al hecho de que los cambios en los precios de los activos tienden a correlacionarse negativamente con los cambios en la volatilidad, lo que indica que un aumento en el riesgo del activo conduce a una disminución de su valor.

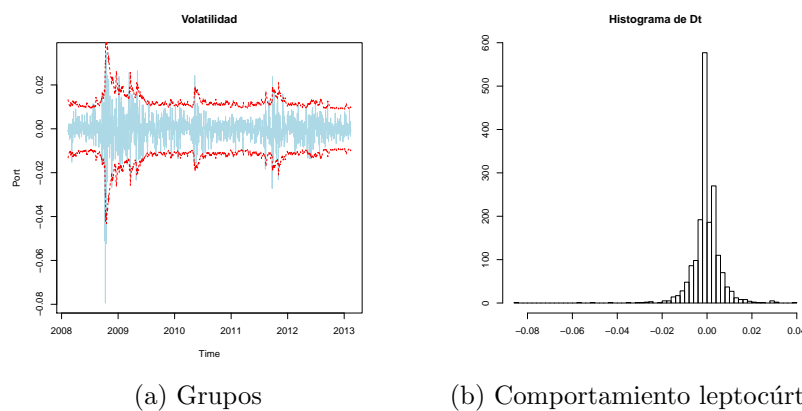


Figura 1: Características de las series financieras. (a) Se observa que los datos de la serie tienden a presentarse en grupos con respecto a su magnitud. (b) Se observa la forma leptocúrtica de los rendimientos.

## 2. Modelos ARCH y GARCH

Una motivación adicional para definir los modelos ARCH y GARCH es la siguiente: si  $y_t$  es el logaritmo del precio de una acción al tiempo  $t$  y esta serie es diferenciada una vez ( $x_t = y_t - y_{t-1}$ ), se observa que tiene un comportamiento correspondiente al denominado ruido blanco, y usualmente un modelo ARIMA(0,1,0) es adecuado para modelar la serie  $\{y_t\}$ . Sin embargo, la serie  $x_t^2$  está altamente autocorrelacionada, y estas autocorrelaciones son casi siempre no negativas, lo cual contradice la definición de ruido blanco (Chan, 2002).

Debido en parte a las características de la volatilidad y de los precios de las acciones mencionadas en el párrafo anterior, se desarrollaron modelos de series de tiempo de tipo heterocedásticos, de los cuales se presentan a continuación los dos más populares: ARCH y GARCH.

En Engle (1982) se presenta el modelo ARCH (Autorregresive Conditional Heteroskedasticity), el cual modela la varianza condicional de mediciones pasadas, siendo esta no constante (heterocedástica). Para estos procesos, el pasado reciente proporciona información acerca de la varianza del pronóstico de un período.

**Definición 2.1** Sea  $(\epsilon_t)$  una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (*i.i.d.*) con distribución normal estándar  $N(0, 1)$ . Entonces el proceso  $(y_t)$  es un proceso ARCH( $q$ ) si

$$y_t = \sigma_t \epsilon_t,$$

donde

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i y_{t-i}^2, \quad (2.1)$$

con  $\omega > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, q$ .

La ecuación (2.1) implica que la varianza condicional  $\sigma_t^2$  evoluciona según los valores previos  $y_{t-i}^2$ , es decir,

$$y_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i y_{t-i}^2 + \eta_t,$$

para alguna variable aleatoria  $\eta_t$ .

Más aún, usando la expresión para  $y_t$  y la ecuación (2.1), es posible verificar que el proceso  $y_t^2$  evoluciona conforme un proceso AR( $q$ ) y en el caso de series financieras, captura la tendencia del agrupamiento de la volatilidad, es decir, a grandes (pequeños) cambios en los precios, le siguen grandes (pequeños) cambios en los precios, aunque con signo no predecible. La condición  $\alpha_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, q$ , garantiza que la varianza condicional sea no negativa, ya que si alguna de las  $\alpha_i$  es negativa y el valor de  $y_{t-i}^2$  es muy grande, se podría obtener una varianza condicional negativa.

Una característica de este modelo es que la distribución condicional de  $y_t$  dada la información obtenida hasta el tiempo  $t-1$  se distribuye  $N(0, \sigma_t^2)$ . Esto se obtiene del hecho de que  $\epsilon_t$  y  $\sigma_t^2$  son independientes, ya que por la ecuación (2.1),  $\sigma_t^2$  depende de los errores anteriores a  $t$ , es decir, de  $\epsilon_{t-1}, \dots, \epsilon_{t-q}$ . Además, bajo la restricción adicional  $\sum_{i=1}^q \alpha_i < 1$ , se obtiene estacionariedad para el proceso  $(y_t)$ . La condición anterior y la ecuación (2.1) permiten obtener una expresión para la varianza no condicionada, la cual es:

$$\sigma^2 = E[y_t^2] = \frac{\omega}{1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_q}.$$

Aun cuando el modelo ARCH permite modelar varianzas dependientes del tiempo y varias propiedades de las series de rendimientos financieros, tiene el inconveniente de que el valor de  $q$  en el modelo de series de tiempo financieras tiende a ser grande. Además, el supuesto de no negatividad de los parámetros puede no cumplirse cuando el número de éstos se incrementa.

El modelo GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity), introducido por Bollerslev (1986), mejora la especificación original del modelo ARCH añadiendo varianza condicional rezagada, la cual actúa como un término suavizador, por lo que evita las dificultades mencionadas al permitir que las volatilidades pasadas impacten en la volatilidad actual.

**Definición 2.2** Sea  $(\epsilon_t)$  una sucesión de variables aleatorias *i.i.d.* con distribución  $N(0, 1)$ . Entonces el proceso  $(y_t)$  es un proceso GARCH( $p, q$ ) si

$$y_t = \sigma_t \epsilon_t,$$

donde

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad (2.2)$$

con  $\omega > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, q$  y  $\beta_j \geq 0$ ,  $j = 1, \dots, p$ .

Una propiedad importante del modelo GARCH es que, bajo ciertas condiciones, se puede representar como un modelo ARCH( $\infty$ ) (Kazakevičius y Leipus, 2002 y 2003). Esta propiedad parece ser la razón (podrían haber otras) de que en la práctica, tanto un modelo ARCH con un número grande de parámetros como un modelo GARCH con un número pequeño de parámetros se ajusten bien a los datos. Esta es otra razón que hace preferible un modelo GARCH sobre un ARCH.

Como se observa, en los procesos GARCH( $p, q$ ), la varianza condicional no sólo depende de los cuadrados de las perturbaciones, sino además de las varianzas condicionales de periodos anteriores. Si en el proceso GARCH( $p, q$ ) se tiene  $\beta_j = 0$ ,  $j = 1, \dots, p$ , entonces el proceso resultante es un ARCH( $q$ ). Al igual que en el proceso ARCH, si  $\sum_i \alpha_i + \sum_j \beta_j < 1$ , entonces el proceso es estacionario y la varianza no condicionada  $\sigma^2$  está dada por

$$\sigma^2 = \frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i - \sum_{j=1}^p \beta_j}.$$

De la misma forma que en el modelo ARCH( $q$ ), los coeficientes de un modelo GARCH deben restringirse para asegurar que las varianzas condicionales sean uniformemente positivas. Por ejemplo, en un modelo GARCH(1,1), estas restricciones son  $\omega > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$  y  $\beta_i \geq 0$ . En un modelo GARCH(1, $q$ ) las restricciones se generalizan a  $\alpha_i \geq 0$ , para  $i = 1, \dots, q$  y las mismas restricciones para  $\omega$  y  $\beta_1$ . No obstante, en un modelo general GARCH( $p, q$ ), las restricciones de los parámetros no son sencillas de obtener. A diferencia del modelo ARCH, en ciertos casos algunos coeficientes pueden ser negativos. Por ejemplo, en un modelo GARCH(2,2), uno de los parámetros  $\beta_i$  puede ser negativo y aun garantizar que todas las varianzas condicionales sean positivas (ver Nelson y Cao (1992) para mayores detalles).

Un supuesto común que estuvo presente en las definiciones anteriores es el de normalidad para  $\epsilon_t$ . La presencia de asimetría, colas pesadas y/o leptocurtosis en las series, hace que dicho supuesto no sea adecuado. Para capturar las características mencionadas con anterioridad, se consideran algunas distribuciones alternativas para  $\epsilon_t$ , como por ejemplo, la distribución  $t$  de Student, la Laplace asimétrica (AL), la inversa Gaussiana (IG) y la normal sesgada (SN). Estos modelos se abordarán en la Sección 4.

Otra manera de modelar la asimetría en las series financieras es considerar variantes para la ecuación de la volatilidad condicionada (2.2). En este ámbito han surgido diversas propuestas de extensión de los modelos GARCH, entre otros, el GARCH de umbral (TARCH) (Glosten *et al.* (1993) y Zakoian (1994)), el GARCH exponencial (EGARCH) (Nelson, 1991), popularizados por ser incluidos como rutinas de software econométrico de uso ampliamente difundido y el GARCH que modela la desviación estándar (PGARCH) (Ding *et al.*, 1993), los cuales se presentan en la Sección 4.

### 3. Modelos con apalancamiento: EGARCH, TGARCH, PGARCH

Al analizar una serie de tiempo puede observarse que las denominadas malas noticias tienen un efecto más fuerte en la volatilidad que las buenas noticias. Más aún, se ha detectado que para algunos mercados de valores existe una correlación negativa entre el rendimiento actual y la volatilidad futura (Suliman y Winker, 2012). A la tendencia que tiene la volatilidad de decrecer cuando los rendimientos se incrementan se conoce comúnmente como efecto de apalancamiento (Enders, 2004). En esta situación, los modelos GARCH poseen la desventaja de que la varianza condicional no es capaz de modelar los cambios asimétricos de los incrementos y decrementos de los rendimientos  $y_t$ .

En el modelo GARCH( $p, q$ ) la varianza condicional es función de dos elementos: las varianzas condicionales pasadas y los cuadrados de las innovaciones. Esto hace que el signo de los rendimientos no afecte la volatilidad, como lo señalan Knight y Satchell (2007), lo que tiene como consecuencia que un modelo GARCH tradicional no tenga la capacidad de modelar el efecto de apalancamiento antes descrito.

En la literatura se han propuesto algunas maneras para modelar ese efecto por medio de los denominados modelos asimétricos. Los más conocidos en la práctica son el EGARCH (Nelson, 1991), el TGARCH (Zakoian, 1994) y el PGARCH (Ding *et al.*, 1993), los cuales se presentan en las subsecciones siguientes.

#### 3.1. Modelo EGARCH

El modelo GARCH exponencial (EGARCH, por sus siglas en inglés) fue propuesto por Nelson (1991). Tiene la virtud de modelar el comportamiento asimétrico de la varianza que depende del tiempo y al mismo tiempo garantizar que la varianza sea siempre positiva. Por ejemplo, el proceso  $(y_t)$  siguiendo un modelo EGARCH(1,1) tiene la forma:

$$y_t = \sigma_t \epsilon_t,$$

donde  $\epsilon_t$  se supone con distribución normal y

$$\log(\sigma_t^2) = \omega + \beta_1 \log(\sigma_{t-1}^2) + \alpha_1 \left\{ \left| \frac{y_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right| - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right\} - \gamma \frac{y_{t-1}}{\sigma_{t-1}}. \quad (3.1)$$

En la ecuación (3.1) el parámetro  $\gamma$  modela la asimetría, es decir, el apalancamiento. En la práctica, se espera que el signo del parámetro  $\gamma$  sea positivo, por lo que un impacto negativo incrementará la volatilidad futura (incertidumbre), mientras que un impacto positivo facilita el efecto en incertidumbres futuras. Por el contrario, para el modelo GARCH, los efectos de la misma magnitud, ya sea positiva o negativa, tienen el mismo efecto en la volatilidad futura.

En general, el proceso  $y_t$  sigue un modelo EGARCH( $p, q$ ) si

$$y_t = \sigma_t \epsilon_t,$$

donde  $\epsilon_t$  se supone con distribución normal y

$$\log(\sigma_t^2) = \omega + \sum_{j=1}^p \beta_j \log(\sigma_{t-j}^2) + \sum_{i=1}^q \left[ \alpha_i \left\{ \left| \frac{y_{t-i}}{\sigma_{t-i}} \right| - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right\} - \gamma_i \frac{y_{t-i}}{\sigma_{t-i}} \right]. \quad (3.2)$$

Una aplicación de este modelo puede observarse en Fernández (2010) para el índice general de la bolsa de valores de Colombia.

#### 3.2. Modelo TGARCH

Otro proceso para modelar efectos asimétricos, que fue propuesto por Zakoian (1994), se conoce como modelo GARCH por umbrales (TGARCH, por sus siglas en inglés). En su versión más sencilla, es decir,

TGARCH(1,1), la varianza condicional se modela como sigue:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \gamma_1 d_{t-1} \epsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2,$$

donde  $d_{t-1}$  es una variable indicadora dada por:

$$d_{t-1} = \begin{cases} 1, & \text{si } \epsilon_{t-1} < 0 \quad (\text{malas noticias}), \\ 0, & \text{si } \epsilon_{t-1} \geq 0 \quad (\text{buenas noticias}). \end{cases} \quad (3.3)$$

La variable  $d_i$  usa un umbral igual a cero para clasificar los impactos pasados. En la práctica se pueden usar otros valores para el umbral, como propone Tsay (2010). El coeficiente  $\gamma_1$  corresponde al parámetro de apalancamiento y cuando  $\gamma_1 = 0$ , el modelo corresponde a un GARCH(1,1) estándar. De acuerdo con este modelo, cuando se tiene un impacto positivo (buenas noticias) el efecto que se tiene en la volatilidad es igual a  $\alpha_1$ . Asimismo, cuando el impacto es negativo (malas noticias) el efecto en la volatilidad es  $\alpha_1 + \gamma_1$ . El parámetro  $\beta_1$  cumple las mismas condiciones que en el modelo GARCH. De lo anterior, si  $\gamma_1$  es positivo y con un valor significativo, impactos negativos tendrán un mayor efecto en  $\sigma_t^2$  que impactos positivos.

El modelo TGARCH( $p, q$ ), que es la postulación general, tiene la siguiente expresión para la varianza condicional:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q (\alpha_i + \gamma_i d_{t-i}) \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2,$$

donde  $\alpha_i$ ,  $\gamma_i$  y  $\beta_j$  son parámetros no negativos que satisfacen condiciones similares a las de los modelos GARCH y  $d_{t-i}$  se define de manera análoga que en la ecuación (3.3).

Este modelo fue utilizado por Lorenzo-Valdez y Ruiz-Porras (2011) para estudiar los rendimientos diarios de 30 acciones y del Índice de Precios y Cotizaciones de México.

### 3.3. Modelo PGARCH

Otro modelo que incorpora la asimetría de la distribución de los rendimientos es el conocido como Modelo GARCH potencia (PGARCH, por sus siglas en inglés), propuesto por Ding *et al.* (1993). A diferencia de modelar la varianza, como lo hacen los modelos GARCH tradicionales, se modela una potencia de la desviación estándar. Para considerar la asimetría, en los modelos PGARCH pueden considerarse parámetros adicionales (en el caso de PGARCH(1,1) será  $\gamma$ ), de manera opcional. De acuerdo con el modelo PGARCH general, se tiene que:

$$\sigma_t^\delta = \omega + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^\delta + \sum_{i=1}^q \alpha_i (|\epsilon_{t-i}| - \gamma_i \epsilon_{t-i})^\delta,$$

donde los parámetros  $\alpha_i$  y  $\beta_j$  poseen las mismas características que los modelos ARCH y GARCH estándares,  $\gamma_i$  son los parámetros de apalancamiento y  $\delta$  es el parámetro para el término de potencia. Si se postula el valor  $\delta = 2$ , el modelo PGARCH es equivalente al modelo GARCH clásico con efecto de apalancamiento. Por su parte, cuando  $\delta = 1$  entonces se estima la desviación estándar condicional. En el modelo PGARCH es posible considerar un modelo aún más flexible si se considera  $\delta$  como otro parámetro a estimar (Zivot, 2008; Ocran y Biekets, 2007). Una aplicación de este modelo se encuentra en Álvarez-Franco *et al.* (2007), en el que se estudia el índice de volatilidad de la CBOE (Chicago Board Option Exchange), conocido como VIX.

## 4. GARCH con errores no normales

En la definición 2.2 se indica que las innovaciones en el modelo GARCH siguen una distribución  $N(0, 1)$ , pero como ya se ha mencionado, las series financieras presentan colas pesadas y son leptocúrticas, por lo que es importante considerar otras distribuciones para modelar las innovaciones. Una opción es la distribución hiperbólica generalizada (Bagnold, 1941), la cual se define a continuación:

**Definición 4.1** La función de densidad de una variable aleatoria con distribución hiperbólica generalizada (HGD) es

$$f(x) = a(\lambda, \alpha, \beta, \delta)(\delta^2 + (x - \mu)^2)^{(\lambda - \frac{1}{2})/2} K_{\lambda - \frac{1}{2}} \left( \alpha \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2} \right) \exp(\beta(x - \mu)),$$

donde

$$a(\lambda, \alpha, \beta, \delta) = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^{\lambda/2}}{\sqrt{2\pi} \alpha^{\lambda - \frac{1}{2}} \delta^\lambda K_\lambda(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}$$

y  $K_\nu$  es la función de Bessel definida por

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty y^{\nu-1} \exp\left(-\frac{1}{2}z(y + y^{-1})\right) dy.$$

Los parámetros  $\alpha, \beta, \delta$  y  $\mu$  cumplen condiciones que dependen de  $\lambda$ , según se expresa a continuación:

- Si  $\lambda > 0$ , entonces  $\delta \geq 0, \alpha > 0, \alpha^2 > \beta^2, \mu \in \mathbb{R}$ .
- Si  $\lambda = 0$ , entonces  $\delta > 0, \alpha > 0, \alpha^2 > \beta^2, \mu \in \mathbb{R}$ .
- Si  $\lambda < 0$ , entonces  $\delta > 0, \alpha \geq 0, \alpha^2 \geq \beta^2, \mu \in \mathbb{R}$ .

La HGD es la generalización de algunas distribuciones, lo cual se observa al considerar valores particulares para algunos parámetros según se presenta a continuación:

1. Si  $\lambda = 1$  y  $\delta > 0$ , se obtiene la distribución hiperbólica.
2. Si  $\lambda = 1, \delta = \beta = \mu = 0$ , se obtiene la distribución de Laplace.
3. Si  $\lambda < 0, \alpha = \beta = \mu = 0$ , se obtiene la  $t$  de Student.
4. Si  $\delta \rightarrow \infty, \alpha \rightarrow \infty$  y  $\frac{\delta}{\alpha} \rightarrow \sigma^2$ , se obtiene la Normal.
5. Si  $\lambda = -\frac{1}{2}$ , se obtiene la Normal inversa Gaussiana (NIG).

En la literatura, se proponen distribuciones diferentes a la normal para modelar los rendimientos de los activos o las innovaciones, como por ejemplo:  $t$  de Student (Bollerslev, 1987), las distribuciones de error generalizadas (Nelson, 1991), la  $t$  de Student asimétrica, (Fernández y Steel, 1998), la Normal inversa Gaussiana (Venter y De Jongh, 2002) y la distribución asimétrica Laplace (Kotz *et al.*, 2001), que es una generalización de la distribución doble exponencial. En las siguientes subsecciones se presentan modelos GARCH con distribuciones no normales para los errores.



#### 4.1. Errores con distribución $t$

En Praetz (1972) y en Blattberg y Gonedes (1974) se argumenta que las primeras diferencias de los logaritmos de los precios del algodón y de acciones comunes, generalmente tienen colas más pesadas que las correspondientes a la distribución normal. Una distribución que se usa para modelar variables con colas pesadas es la distribución  $t$ , la cual se puede obtener de una mezcla de una variable aleatoria con distribución normal con varianza considerada como variable aleatoria continua. Este hecho hace que la distribución  $t$  sea un buen candidato para el modelado de series de tiempo. Por lo anterior, la distribución  $t$  de Student tiene mayor validez descriptiva en ese tipo de series.

Debido a que el modelo GARCH con errores Gaussianos no permite explicar el comportamiento leptocúrtico que exhiben los rendimientos de un activo, así como otras series de tiempo con esta característica, Bollerslev (1987) propuso sustituir el supuesto de normalidad condicional del error con la distribución  $t$  de Student. Él sostiene que este cambio en el modelo GARCH permite una distinción entre heterocedasticidad condicional y distribución leptocúrtica condicional, cualquiera de las cuales podría ser la causa de la curtosis incondicional observada de los datos. Además, esta generalización permite que la varianza condicional actual sea función de las últimas varianzas condicionales, como en el modelo GARCH desarrollado por Bollerslev (1986). De acuerdo con Bollerslev, la distribución condicionada del término  $y_t$  es la siguiente:

$$f(y_t) = \frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}(\nu + 1)\right]}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left[\frac{1}{2}\nu\right]} [(\nu - 2)\sigma_t^2]^{-\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{y_t^2}{(\nu - 2)\sigma_t^2}\right]^{-\frac{1}{2}(\nu + 1)}.$$

Al introducir la distribución  $t$  para modelar series de tiempo, se debe considerar un nuevo parámetro: los grados de libertad. Heracleous (2007) realiza un estudio de simulación para investigar la capacidad del modelo GARCH con distribución  $t$  para estimar dicho parámetro, encontrando que los estimadores resultan ser sesgados e inconsistentes. Sin embargo, este inconveniente no es tan grave por el hecho de que tanto los coeficientes de los correspondientes modelos ARCH y GARCH como los grados de libertad del modelo GARCH con distribución  $t$ , no se afectan cuando  $\sigma$  varía, pues también encontró que en la ecuación de la varianza condicional, solamente se afecta el término constante.

#### 4.2. Errores con distribución Normal Inversa Gaussiana

La distribución Normal inversa Gaussiana (NIG) fue introducida al área de finanzas por Barndorff-Nielsen (1997) y aplicada por primera vez a los modelos GARCH por Andersson (2001), Jensen y Lunde (2001) y Forsberg y Bollerslev (2002), logrando captar la alta curtosis de los rendimientos y el bajo y lento decrecimiento de la función de autocorrelación de los cuadrados de los rendimientos.

Como se presentó al inicio de esta sección, la distribución NIG es un caso particular de la distribución HG cuando  $\lambda = -\frac{1}{2}$ . Por lo tanto, la función de densidad de la NIG es

$$f(x) = \frac{\alpha}{\pi} \exp(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} + \beta(x - \mu)) \frac{K_1\left(\alpha\delta\sqrt{1 + \left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2}}.$$

Los parámetros  $\mu$  y  $\delta$  determinan la localización y escala de la distribución, respectivamente, mientras que  $\alpha$  y  $\beta$  controlan la forma de la densidad. En particular, si  $\beta = 0$  la distribución NIG es simétrica.

La media y la varianza de la NIG son

$$E[X] = \mu + \frac{\delta\beta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \quad y \quad Var(X) = \frac{\delta\alpha^2}{(\alpha^2 - \beta^2)^{3/2}},$$

respectivamente. El parámetro  $\xi = (\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} + 1)^{-1/2}$  proporciona información sobre las colas de la distribución. Si  $\xi \rightarrow 1$ , las colas son más pesadas y si  $\xi \rightarrow 0$ , las colas se parecen a las de una distribución normal.

El parámetro  $\chi = \frac{\beta\xi}{\alpha}$  determina el sesgo de la distribución. Si  $\chi < 0$ , la cola izquierda es más pesada que la derecha, si  $\chi = 0$  la distribución es simétrica y si  $\chi > 0$  la cola derecha es la más pesada. Debido a las restricciones de  $\delta, \beta$  y  $\alpha$  se tiene que  $0 \leq |\chi| < \xi < 1$ .

### 4.3. Errores Laplace Asimétricos

La distribución simétrica de Laplace (SLD, por sus siglas en inglés), denominada doble exponencial, se ha utilizado para modelar datos con colas pesadas, como por ejemplo en Balakrishnan y Basu (1995), Bain y Engelhardt (1973) y Kotz *et al.* (2001). Sin embargo, existen series de tiempo cuya distribución presenta colas pesadas y asimetría. Ante este problema, Kotz *et al.* (2001) proponen la forma asimétrica de la distribución de Laplace, denotada por AL. La distribución AL posee flexibilidad para modelar datos con colas pesadas y asimétricas, lo cual la convierte en una buena opción para modelar datos financieros. La función de densidad de esta distribución es:

$$f(z) = \frac{\sqrt{2}\kappa}{\tau(1 + \kappa^2)} \left\{ \exp\left(-\frac{\sqrt{2}\kappa}{\tau}|z - \theta|I_{[z \geq \theta]}\right) + \exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{\tau\kappa}|z - \theta|I_{[z < \theta]}\right) \right\},$$

que se denota por  $AL(\theta, \kappa, \tau)$ , donde  $\theta$  es el parámetro de localización,  $\kappa$  el parámetro de sesgo o simetría y  $\tau$  el parámetro de escala. La media y la varianza de la distribución AL son

$$\mu = \theta + \frac{\tau}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\kappa} - \kappa \right),$$

$$\sigma^2 = \frac{\tau^2}{2} \left( \frac{1}{\kappa^2} + \kappa^2 \right) = (\mu - \theta)^2 + \tau^2,$$

respectivamente. Como la distribución de los datos financieros tiene colas pesadas, lo que no es coherente con la distribución normal, es razonable tener en cuenta a la distribución AL para modelar este tipo de series (Zhu, 2007). A continuación se presenta un modelo ARMA-GARCH con ruido AL para modelar datos financieros con las características mencionadas.

#### Modelo ARMA-GARCH con ruido AL

En Trinade *et al.* (2010) se presenta el modelo ARMA-GARCH, definido como sigue: sea  $(\epsilon_t)$  una serie de variables aleatorias independientes y tales que  $\epsilon_t$  tiene distribución  $AL(\theta, \kappa, \tau)$ , donde  $\theta = -[\tau(\kappa^{-1} - \kappa)]/\sqrt{2}$  y  $\tau^2 = 2[2 + (\kappa^{-1} - \kappa)^2]^{-1}$ . Las condiciones impuestas a los parámetros  $\theta$  y  $\tau$  aseguran que  $\epsilon_t$  son variables aleatorias con media cero y varianza unitaria, propios de la estructura de un modelo GARCH. Entonces  $x_t$  es un proceso ARMA( $u, v$ ), bajo el supuesto GARCH( $p, q$ ) con ruido  $AL(\theta, \kappa, \tau)$ , si es una solución estacionaria de las ecuaciones:

$$x_t = \sum_{i=1}^u \phi_i x_{t-i} + \sum_{j=1}^v \lambda_j y_{t-j} + y_t,$$

con  $y_t = \sigma_t \epsilon_t$ , donde  $\sigma_t$  es una función positiva de  $y_s, s < t$ , definida por:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2,$$

con  $\omega > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, q$ ,  $\beta_j > 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$ . El modelo ARMA-GARCH tiene como media y varianza condicionada las siguientes expresiones:

$$\mu_t = E[x_t | y_s, s < t] = \sum_{i=1}^u \phi_i x_{t-i} + \sum_{j=1}^v \lambda_j y_{t-j} \quad y \quad \sigma_t^2 = Var[x_t | y_s, s < t].$$

#### 4.4. Errores con distribución Normal Sesgada

Los modelos GARCH( $p, q$ ) con distribución normal para los errores a menudo no logran captar el comportamiento leptocúrtico que generalmente posee la distribución de los rendimientos. Otra forma de reproducir o modelar la leptocurtosis es a través de la distribución normal sesgada, propuesta por Azzalini (1985), la cual es una generalización de la distribución normal con la inclusión de un parámetro que controla el sesgo. La sustitución del supuesto de normalidad en los modelos GARCH con una SN ha sido considerada por varios autores (De Luca y Loperfido, 2004; Cappuccio *et al.*, 2004; De Luca *et al.*, 2005; Shamiri e Isa, 2009; Kosapattarapim *et al.*, 2012). La densidad de una SN con parámetro de forma  $\alpha$ , denotada por  $SN(\alpha)$ , está dada por

$$\phi(z; \alpha) = 2\phi(z)\Phi(\alpha z), \quad -\infty < z < \infty,$$

donde  $\phi$  y  $\Phi$  denotan, respectivamente, la función de densidad y la función de distribución acumulada de una variable aleatoria  $N(0, 1)$ .

Dos propiedades de esta densidad (Azzalini, 2005) son:

- (a) Si  $\alpha = 0$ , el sesgo se considera inexistente y se obtiene la función de densidad  $N(0, 1)$ .
- (b) Si  $z \sim SN(\alpha)$  y  $x = \xi + \omega z$ , donde  $\xi \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \mathbb{R}^+$ , entonces la función de densidad de  $x$  tiene la forma

$$f(x; \xi, \omega^2, \alpha) = 2\frac{1}{\omega}\phi\left(\frac{x-\xi}{\omega}\right)\Phi\left[\alpha\left(\frac{x-\xi}{\omega}\right)\right], \quad -\infty < x < \infty.$$

## 5. Algunas aplicaciones dadas en la literatura

Ante la variedad de modelos y distribuciones existentes, Shamiri e Isa (2009) se plantearon la pregunta ¿qué modelo GARCH o distribución para los errores debe utilizarse? Indican que no hay un consenso claro y que la capacidad de predicción de la volatilidad debe ser un criterio para la selección del modelo. En su trabajo, modelan la volatilidad de los rendimientos de un índice del mercado de valores de Malasia (KLCI) y evalúan la capacidad predictiva de la volatilidad de los modelos GARCH(1,1) y EGARCH(1,1), utilizando seis distribuciones para el error: Normal, Normal sesgada (SN),  $t$  de Student,  $t$  de Student sesgada, Error generalizado (GED) y Normal inversa Gausiana. Respecto a la selección del modelo, Shamiri e Isa (2009) mostraron mediante estudios de simulación que: *i*) Las distribuciones no normales dieron mejores resultados que la normal, *ii*) De acuerdo con el AIC, el GARCH(1,1) fue mejor con GED, mientras que EGARCH(1,1) lo fue con la  $t$  de Student sesgada, *iii*) El mejor modelo, según el criterio AIC resultó EGARCH(1,1) con distribución  $t$  de Student sesgada. En la evaluación de la capacidad predictiva de la volatilidad utilizando medidas como el Error Cuadrático Medio (ECM) y el Error Absoluto Medio (EAM), el EGARCH(1,1) tuvo la mayor capacidad predictiva, sin embargo, ocupó el cuarto lugar al considerar la distribución  $t$  de Student sesgada. Utilizando sólo el ECM, el modelo EGARCH(1,1) con distribución normal sesgada para los errores, ocupó el primer lugar. Finalmente, dichos autores indican que el éxito depende más de la elección de la distribución del error que del modelo GARCH.

Kosapattarapim *et al.* (2012) también plantearon las preguntas ¿Cuál modelo GARCH y qué distribución para los errores debe utilizarse especialmente cuando el modelo que mejor ajusta a los datos no posee una

capacidad de predicción eficaz de la volatilidad? Una de las principales diferencias con el trabajo de Shamiri e Isa (2009), es que en su investigación de la capacidad de predicción de la volatilidad ellos consideran un orden mayor  $(p, q)$ , así como también seis tipos de distribuciones para los errores: Normal, Normal Sesgada,  $t$  de Student,  $t$  de Student sesgada, Error generalizado (GED) y Error generalizado sesgado. Utilizaron tres índices del mercado de valores de países asiáticos (Tailandia, SET; Malasia, KLCI; Singapur, STI). Mediante dos estudios de simulación, Kosapattarapim *et al.* (2012) indican que: (i) el mejor modelo ajustado no proporciona necesariamente el mejor pronóstico de la volatilidad, aún teniendo un modelo GARCH de orden mayor, lo que coincide con lo señalado por Shamiri e Iza (2009) y (ii) al comparar las medias de ECM (EAM) entre el mejor modelo ajustado y el que tiene la mejor capacidad predictiva, resultó que no difieren significativamente, por lo que el mejor modelo ajustado aún es capaz de proporcionar una predicción razonable de la volatilidad. En cuanto al modelado de las tres series de los rendimientos, éstas no se distribuyen normal y son leptocúrticas. Así, el mejor modelo ajustado resultó: GARCH(1,3) con distribución  $t$  de Student sesgada para SET, GARCH(1,1)-GED para KLCI, la cual concuerda con Shamiri e Isa (2009) y GARCH(2,1) con distribución  $t$  de Student para STI. Los autores por medio de un análisis de sensibilidad (resultados omitidos en el artículo), determinaron que un cambio de distribución en el error no cambia el orden del mejor modelo GARCH ajustado. Ahora, respecto a la evaluación de la capacidad de predicción de la volatilidad, obtuvieron que el mejor modelo ajustado para cada serie no proporcionó el mejor pronóstico de la volatilidad en términos de ECM y EAM. Sin embargo, al comparar el ECM (EAM) entre el mejor modelo ajustado y el mejor modelo predictivo, concluyen que en la práctica puede utilizarse el mejor modelo ajustado para la predicción de la volatilidad. Finalmente, indican que un modelo GARCH( $p, q$ ) con distribución no normal para los errores, tiende a proporcionar mejor predicción que un modelo GARCH( $p, q$ ) con distribución normal.

**Índices bursátiles.** En Mina (2011) se presenta el análisis estadístico de los datos de los índices CAC (París), DAX (Francfort), MEXBOL (IPC de México) y NASDAQ (Nueva York) en dos periodos de tiempo: del 2 de enero de 2007 al 20 de noviembre de 2008 y del 2 de junio de 2008 al 30 de abril de 2009. El primer periodo corresponde a una época de expansión de la bolsa, mientras que el segundo abarca una época de crisis. Se muestra, a través de las pruebas  $\chi^2$  y Kolmogorov-Smirnov, que la mayoría de los rendimientos de los índices no siguen una distribución normal. También, se exhibe que los rendimientos no son independientes y no cumplen el supuesto de homocedasticidad. Como consecuencia, se ajusta un modelo GARCH(1,1) y se obtiene que los nuevos rendimientos son idénticamente distribuidos e independientes. Posteriormente, se utiliza el algoritmo EM (Hu, 2005) para estimar los parámetros de las distribuciones HG: Normal,  $t$  de Student,  $t$  de Student Sesgada y NIG.

Finalmente se concluye, de acuerdo con la función log-verosimilitud, que las distribuciones  $t$  de Student y  $t$  de Student Sesgada son las que mejor se ajustan a los datos. Las mismas distribuciones son seleccionadas de acuerdo con el criterio AIC.

**Rendimiento inmobiliario de TIAA-CREF.** En Trindade *et al.* (2010), se analizan los rendimientos de la cuenta de renta variable de bienes inmuebles gestionados por TIAA-CREF (Teachers Insurance and Annuity Association-College Retirement Equities Fund), de la ciudad de Nueva York. Los datos utilizados son del 15 de junio 2004 al 31 de diciembre de 2006, con 650 valores diarios. Se muestra que los datos presentan una distribución con característica puntiaguda, de cola pesada y sesgada a la derecha, además de existir una función de autocorrelación que exhibe un cierto comportamiento periódico (posiblemente debido a un efecto estacional mensual).

Se presenta una metodología para ajustar el mejor modelo ARMA directamente a los rendimientos, considerando modelos ARMA con ruido *i.i.d.* AL y ruido *i.i.d.* normal dentro de cada grupo de modelos, utilizando el criterio para la mejor información de Akaike (AIC), junto con un cotejo por falta de correlación serial en los residuos. Del estudio se concluye que, dentro de los modelos con ruido *i.i.d.* AL, el que mejor ajusta es el modelo MA(1), mientras que dentro de los modelos con ruido normal *i.i.d.*, el mejor resulta ser el ARMA(5,4). Para captar mejor la dependencia, se analizan los mismos modelos ARMA (5,4) y MA(1), pero impulsados por un proceso GARCH (1,1). El GARCH fue ajustado considerando varias distribuciones para el ruido: Normal para ARMA(5,4) y diferentes distribuciones asimétricas para MA(1), entre las que se encuentran la Normal asimétrica (AN), Laplace asimétrica (AL) y  $t$  de Student asimétrica (AT). Los resultados del análisis se presentan en el Cuadro 1.

Media condicional	Varianza condicional	AIC
ARMA(5,4)	IID Normal	-7391.3
ARMA(5,4)	GARCH(1,1) Normal	-7465.1
MA(1)	GARCH (1,1) Normal Asimétrica	-7578.1
MA(1)	IID AL	-7703.7
MA(1)	GARCH(1,1) AL	-7704.2
MA(1)	GARCH(1,1) $t$ de Student asimétrica	-7724.2

Tabla 1: Comparación de modelos para el rendimiento de la cuenta de renta variable de bienes inmuebles.

A partir del Cuadro 1, se concluyó que entre los modelos MA(1), de acuerdo con el criterio AIC, el mejor resultó ser GARCH(1,1) con ruido *i.i.d.* con distribución  $t$  de Student asimétrica (aunque presenta problemas en la estimación de los parámetros con la metodología empleada). El siguiente modelo es el GARCH(1,1) con ruido *i.i.d.* AL similar a MA(1) con ruido *i.i.d.* AL. Una característica interesante de estos modelos con ruido normal, en contraposición con ruido AL, es que estos últimos, aparte de dar modelos con menor AIC, tienden a tener un número menor de parámetros. Los autores hacen la aclaración de que hay que tener en cuenta que aunque se plantee como un punto de discusión los modelos ARMA y ARMA-GARCH, los primeros están destinados a capturar sólo la media condicional, mientras que los segundos proporcionan un modelo para la media condicional y la varianza condicional del proceso. Por consiguiente, no deben considerarse modelos comparables al analizar una serie de tiempo.

Se concluye que los modelos ARMA con ruido AL, pueden ser útiles para el modelado de series de tiempo con expectativas condicionales de procesos que tienden a ser puntiagudos, sesgados y leptocúrticos, pero que parecen tener algunos momentos de orden superior. En situaciones similares, los modelos GARCH con errores AL pueden proporcionar un ajuste competitivo y un mayor grado de estabilidad numérica con respecto a otras distribuciones asimétricas. Los modelos con ruido AL también pueden tener un número de parámetros sustancialmente inferior al de sus homólogos con ruido normales. Por lo tanto, estos modelos son dignos de ser incluidos en la “caja de herramientas” del estadístico aplicado.

**Índices de rendimientos centrales de las acciones europeas.** Vošvrda y Žikeš (2004) realizaron un estudio de la serie de tiempo y propiedades distribucionales de rendimientos centrales de las acciones europeas. El comportamiento de la volatilidad del rendimiento en el tiempo es estudiado mediante el modelo GARCH- $t$ , que permite comprender más acerca de las propiedades de distribución de los rendimientos de las acciones. Evaluaron la capacidad de la estimación del modelo GARCH- $t$  para capturar todas las no linealidades en los rendimientos bursátiles, obteniendo resultados empíricos que revelan que los índices bursátiles del mercado checo y húngaro son predecibles a partir de las series temporales de precios históricos, mientras que los de Polonia no lo son. Los rendimientos de los tres índices son condicionalmente heterocedásticos y no normales.

**Índice TASE (Tel Aviv Stock Exchange).** Alberg *et al.* (2008), realizaron un análisis empírico exhaustivo utilizando diferentes modelos GARCH para la rentabilidad media y la varianza condicional del índice TASE. La predicción del rendimiento de estos modelos de varianza condicional es comparado con nuevos modelos asimétricos. Cuantifican el efecto día de la semana y el efecto de apalancamiento además de probar la asimetría de la volatilidad. Sus resultados muestran que el modelo GARCH asimétrico con distribución de cola pesada mejora en general la estimación de la varianza condicional, utilizando el modelo EGARCH con una distribución  $t$  de Student sesgada que resulta ser el más exitoso para predecir el índice TASE.

## Agradecimientos

Agradecemos al Programa de Mejoramiento del Profesorado (PROMEP) por el financiamiento otorgado para la realización de este trabajo que forma parte del proyecto “Generalización del modelo de series de tiempo GARCH” con clave UADY-CA-36 PROMEP 103.5/12/4617. Asimismo, agradecemos los comentarios proporcionadas por los árbitros, los cuales fueron de gran utilidad para mejorar la presentación de este artículo.

## Referencias

- [1] D. Alberg, H. Shalit y R. Yosef. *Estimating stock market volatility using asymmetric GARCH models*. Applied Financial Economics **18**: 1201-1208 (2008).
- [2] P. Álvarez-Franco, D. Alexander-Restrepo y F. Ocaris-Pérez. *Estudio de efectos asimétricos y día de la semana en el índice de volatilidad VIX*. Revista Ingenierías Universidad de Medellín **6**: 11 (2007).
- [3] J. Andersson. *On the normal inverse Gaussian stochastic volatility model*. Journal of Business and Economic Statistics **19**: 44-54 (2001).
- [4] Z. Arsad y J.A. Coutts. *Security price anomalies in the London international stock exchange: a 60 year perspective*. Applied Financial Economics **7**(5): 455-464 (1997).
- [5] A. Azzalini. *A class of distributions which includes the normal ones*. Scandinavian Journal of Statistics **12**: 171-178 (1985).
- [6] A. Azzalini. *The Skew-normal distribution and related multivariate families*. Scandinavian Journal of Statistics **32**: 159 - 188 (2005).
- [7] R.A. Bagnold. *The Physics of Blown Sands and Desert Dunes*. Methuen, Londres (reimpreso en 1973, Chapman and Hall, Londres) (1941).
- [8] L.J. Bain y M. Engelhardt. *Interval estimation for the two-parameter double exponential distribution*. Technometrics **15**: 875-887 (1973).
- [9] N. Balakrishnan y A.P. Basu. *The exponential distribution: Theory, Methods and Applications*. Gordon and Breach (1995).
- [10] O.E. Barndorff-Nielsen. *Normal inverse Gaussian distribution and stochastic volatility modeling*. Scandinavian Journal of Statistics **24**: 1-13 (1997).
- [11] R. Blattberg y N. Gonedes. *A Comparison of the stable and student distributions as statistical models for stock prices*. Journal of Business **47**(2): 244-280 (1974).
- [12] T. Bollerslev. *Generalized Autorregressive Conditional Heteroskedasticity*. Journal of Econometrics **31**: 307-327 (1986).
- [13] T. Bollerslev. *A Conditional Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return*. Review of Economics and Statistics **69**: 542-547 (1987).
- [14] N. Cappuccio, D. Lubian y D. Raggi. *MCMC Bayesian estimation of a skew-GED stochastic volatility model*. Studies nonlinear dyn. Econometrics 8, <http://www.bepress.com/snnde/vol8/iss2/art6> (2004).
- [15] N.H. Chan. *Time Series: Applications to Finance*. John Wiley & Sons Inc., USA (2002).
- [16] S.H. Chan, W. Leung y K. Wang. *The impact of institutional investors on the monday seasonal*. The Journal of Business **77**(4): 967-986 (2004).
- [17] G. De Luca, M.G. Genton y N. Loperfido. *A multivariate skew-GARCH model*. Advances in Econometrics **20**: 33-56 (2005).
- [18] G. De Luca y N.M.R. Loperfido. *A skew-in-mean GARCH model*. In *Skew-elliptical distributions and their applications* (ed. M. G. Genton), Cap. 12: 205-222. Chapman & Hall/CRC, London (2004).
- [19] Z. Ding, C.W.J. Granger y R.F. Engle. *A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model*. Journal of Empirical Finance **1**: 83-106 (1993).
- [20] W. Enders. *Applied Econometric Time Series*, 2nd Edition. Wiley Series in Probability and Statistics (2004).
- [21] R. Engle. *Autorregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of United Kingdom Inflation*. Econometrica **50**: 987-1008 (1982).

- [22] C. Fernández y M.J.F. Steel. *On Bayesian Modeling of Fat Tails and Skewness*. Journal of the American Statistical Association **93**: 359-371 (1998).
- [23] H. Fernandez. *Una aplicación del modelo EGARCH para estimar la volatilidad de series financieras*. Revista Ingenierías Universidad de Medellín **9**: 17 (2010).
- [24] L. Forsberg y T. Bollerslev. *Bridging the gap between the distribution of realized (ECU) volatility and ARCH modelling (of the Euro): The GARCH-NIG model*. Journal of Applied Econometrics **17**: 535-548 (2002).
- [25] L.R. Glosten, R. Jagannathan y D.E. Runkle. *On the relation between the expected value and the volatility of Nominal Excess Return on Stocks*. The Journal of Finance **48**(5): 1779-1801 (1993).
- [26] M.S. Heracleous. *Sample kurtosis, GARCH-t and degrees of freedom issue*. EUI Working Papers ECO 2007/60 (2007).
- [27] W. Hu. *Calibration of multivariate generalized hyperbolic distributions using the EM algorithm, with applications in risk management, portfolio optimization, and portfolio credit risk*. Florida State University, PhD. Dissertation (2005).
- [28] M.B. Jensen y A. Lunde. *The NIG-S & ARCH model: a fat-tailed, stochastic, and autoregressive conditional heteroscedastic volatility model*. Econometrics Journal **4**: 319-342 (2001).
- [29] V. Kazakevičius y R. Leipus. *On stationarity in the ARCH( $\infty$ ) model*. Econometric Theory **40**, 1-16 (2002).
- [30] V. Kazakevičius y R. Leipus. *A new theorem on existence of invariant distributions with applications to ARCH processes*. Journal of Applied Probability **40**, 147-162 (2003).
- [31] J. Knight y S. Satchell. *Forecasting Volatility in the Financial Markets*. 3rd Edition, Butterworth Heinemann (2007).
- [32] C. Kosapattarapim, Y. Lin y M. McCrae. *Evaluating the volatility forecasting performance of best fitting GARCH models in emerging Asian stock markets*. International Journal of Mathematics & Statistics **12**(2): 1-15 (2012).
- [33] S. Kotz, T. Kozubowski y K. Podgórski. *The Laplace Distribution and Generalizations: A Revisiting with Applications to communications, Economics, Engineering and Finance*. Boston: Birkhäuser (2001).
- [34] H.F. López. *Modelado de la volatilidad y pronóstico del índice de precios y cotizaciones de la bolsa mexicana de valores*. Revistas electrónicas UNAM. Vol S/V **213**: 43-72 (2004).
- [35] A. Lorenzo-Valdés y A. Ruiz-Porras. *Modelación de rendimientos bursátiles mexicanos mediante los modelos TGARCH y EGARCH: Un estudio econométrico para 30 acciones y el Índice de Precios y Cotizaciones*. MPRA Paper No. 36872. Munich Personal RePEc Archive (2011).
- [36] S.S. McNees. *The Forecasting Record for the 1970's*. New England Economic Review. September/October, 33-53 (1979).
- [37] J. Mina. *Construcción de Portafolios bajo distribuciones hiperbólicas generalizadas*. Revista VaR **2**: 1-22 (2011).
- [38] D.B. Nelson. *Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: a New Approach*. Econometrica **59**(2): 347-370 (1991).
- [39] D. Nelson. y C. Cao. *Inequality constraints in the univariate GARCH model*. Journal of Business and Economic Statistics **10**(2): 229-235 (1992).
- [40] D. Nelson. y A. Sunier. *Good News, Bad News, Volatility, and Betas*. The Journal of Finance **1**(5): 1575-1603 (1995).
- [41] M. Ocran y N. Biekets. *Forecasting Volatility in Sub-Saharan Africa's Commodity Markets*. Investment Management and Financial Innovations **4**(2): 91-102 (2007).

- [42] J. Peters. *Estimating and Forecasting volatility of stocks indices using asymmetric GARCH models and (skewed) Student-t densities*. University of Leige, working paper (2001).
- [43] P.D. Praetz. *The Distribution of Share Price Changes*. Journal of Business **45**(1): 49-55 (1972).
- [44] T.H. Rydberg. *Generalized Hyperbolic Diffusions with Applications to Finance*. Research Report 342, Department of Theoretical Statistics, Institute of Mathematics, University of Aarhus (1996).
- [45] A. Shamiri y Z. Isa. *Modeling and forecasting volatility of Malaysian stock markets*. Journal of Mathematics and Statistics **3**: 234-240 (2009).
- [46] Z. Suliman y P. Winker. *Modelling Stock Market Volatility Using Univariate GARCH Models: Evidence from Sudan and Egypt*. International Journal of Economics and Finance **4**(8): 161-176 (2012).
- [47] A. Trindade, Y. Zhu y B. Andrews. *Time series models with asymmetric Laplace Innovations*. Journal of Statistical Computation and Simulation. **80**(12), 1317-1333 (2010).
- [48] R.S. Tsay. *Analysis of Financial Time Series*. 3rd Edition New York, United States of America, John Wiley and Sons, Inc (2010).
- [49] J.H. Venter y P.J. De Jongh. *Risk estimation using the normal inverse Gaussian distribution*. Journal of Risk **4**(2): 1-24 (2002).
- [50] M. Vošvrda y F. Žikeš. *An Application of The GARCH-t model on central European stock returns*. Prague Economic Papers 1 (2004).
- [51] M. Zakoian. *Threshold Heteroscedastic Models*. Journal of Economic Dynamics and Control **18**: 931-955 (1994).
- [52] Y. Zhu. *Application of asymmetric Laplace laws in financial risk measures and time series analysis*. Dissertation for the degree of doctor of Philosophy. University of Florida (2007).
- [53] E. Zivot. *Practical Issues in the Analysis of Univariate GARCH Models*. Handbook of Financial Time Series, Springer, New York (2008).