

## Geometría fractal en la superficie lunar

Jorge Lugo-Jiménez<sup>1</sup>, Víctor Uc-Cetina<sup>2</sup>

Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán, México

<sup>1</sup>jlugoj@uady.mx, <sup>2</sup>ucetina@uady.mx

### Abstract

In this article the Hausdorff-Besicovitch dimension is used to define the fractal dimension of an object and it is shown that such a dimension can be estimated through the box-counting algorithm. As an example, the algorithm is implemented and used to compute the fractal dimension of a region of the Mare Humorum (Sea of Moisture) from a digitalized image. The resulting fractal dimension is compared to the results obtained by applying other existing computer programs to the same image. Finally, some recently proposed methods for the automated detection and counting of craters on the surface of Mars are commented.

### Resumen

En este artículo se describe como la dimensión de Hausdorff-Besicovitch puede utilizarse para definir la dimensión fractal de un objeto y se muestra que dicha dimensión puede estimarse mediante el algoritmo de conteo de cajas. A manera de ejemplo, se implementa dicho algoritmo y se utiliza para calcular la dimensión fractal de una región del Mare Humorum (Mar de la Humedad) a partir de una imagen digitalizada. El valor obtenido de la dimensión fractal es comparado con los resultados obtenidos usando otros programas computacionales aplicados a la misma imagen. Finalmente, se comentan otros métodos automatizados que se han propuesto recientemente para detectar y contabilizar el número de cráteres en la superficie de Marte.

---

*Keywords and phrases* : fractal; superficie lunar; gráficas por computadora.

2010 *Mathematics Subject Classification* : 28A80, 85-08, 65D18.

---

## 1. Introducción

Las formas que encontramos en la naturaleza no tienen la simplicidad de una línea, un plano o un cubo, sino que poseen una increíble riqueza de detalles, complejidad e irregularidad que no pueden describirse por la geometría clásica. Intentar describir la variabilidad de las líneas costeras o la intrincada geometría de los vasos capilares por los métodos tradicionales resultaría engorroso y absurdo.

Sin embargo, existen algunas estructuras complejas con ciertas propiedades matemáticas donde puede distinguirse una similitud entre las diferentes partes que lo forman; en estos casos, es posible reconocer una estructura geométrica básica que se repite a diferentes tamaños y da forma completa al objeto. De esta manera, la apariencia irregular y caótica del objeto puede describirse mediante un proceso secuencial a partir de un patrón geométrico simple. Tal es el caso de la exótica verdura *romanesco* la cual se muestra en la

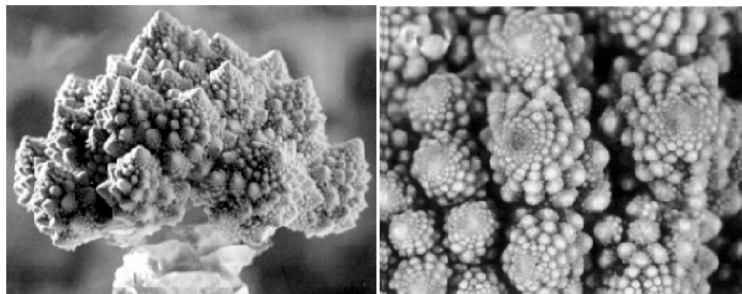


Figura 1: En la verdura Romanescu puede observarse claramente una geometría fractal.

Figura 1. En esta verdura puede observarse un mismo patrón geométrico que se repite aparentemente de modo infinito a varias escalas.

En 1975 el matemático de origen polaco Benoît Mandelbrot [Ma] reconoció la existencia de esta geometría en la naturaleza que según sus propias palabras, “permite describir muchas de las formas irregulares y fragmentadas que nos rodean, dando lugar a teorías coherentes, identificando una serie de formas a las que llamo fractales”. Esta cualidad que él denominó fractal (del latín *fractus*, irregular), se observa en la forma de algunas plantas como helechos, brócolis o la coliflor; así como en la estructura de objetos inanimados como nubes, montañas y ríos, entre otros. Para mayor información acerca del desarrollo histórico de la geometría fractal, así como una revisión de los fractales más conocidos y exóticos se sugiere consultar [Po].

Aún cuando el patrón geométrico sea relativamente sencillo no es fácil distinguir que objetos en nuestro entorno tienen la propiedad fractal; esto puede deberse a que el objeto tiene una forma muy complicada o porque su proceso secuencial de construcción no se repite *ad infinitum*.

Por ejemplo, en la Figura 2 se muestra una secuencia de imágenes captadas por la nave espacial Ranger 9, segundos antes de que se impactara dentro del cráter Alphonsus el 24 de marzo de 1965 [Na]. En esta secuencia se observa una similitud entre las imágenes a pesar de que fueron tomadas a diferentes alturas [Co]; sin embargo, en este caso es muy aventurado afirmar que la distribución de cráteres en la superficie lunar cumple con la propiedad fractal, para ello será necesario hacer un estudio estadístico de sus características.

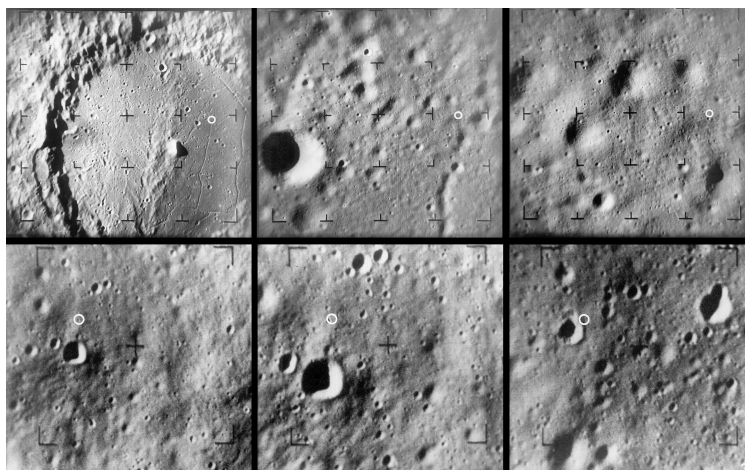


Figura 2: Imágenes en descenso de la misión lunar Ranger 9.

El que la superficie lunar tenga una geometría fractal es de gran interés científico, ya que puede aportar información relevante sobre los períodos de incidencia meteórica en el sistema solar y su relación con las edades de las formaciones topográficas [Mo, Shy]. Al respecto, en este trabajo se calcula la dimensión fractal en una región del mar de la Humedad, o *Mare Humorum*, mediante un análisis estadístico de los impactos

o cráteres. Para ésto, primero se define lo que es la dimensión fractal, después se analiza la distribución de cráteres de la región, y finalmente, se compara el resultado con otros cálculos obtenidos de varios programas computacionales aplicados a la misma región.

## 2. La dimensión fractal

Para descubrir la propiedad fractal de un objeto Mandelbrot propuso hacer un análisis estadístico de las partes que lo componen, ya que esta geometría da origen a una infinidad de proporciones de carácter adimensional. Con esta idea se define la dimensión fractal, o dimensión de Hausdorff-Besicovitch de un conjunto cualquiera  $E$ , como la medida de qué tanto espacio ocupa el objeto dentro su entorno.

**Definición 2.1** La dimensión de Hausdorff-Besicovitch de un conjunto  $E$  está dado por

$$\dim_H(E) = \inf \{0 < t \in \mathbb{R} : H^t = 0\}$$

con

$$H^t = \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf \sum_i |U_i|^t$$

siendo  $\{U_i\}$  un  $\delta$ -recubrimiento a lo más numerable del conjunto  $E$  cuyos diámetros cumplen

$$|U_i| = \sup \{|x - y| : x, y \in U_i\} \leq \delta.$$

En la práctica esta dimensión se calcula a través del *método de conteo de cajas* que, en el caso bidimensional que nos interesa, consiste en cubrir al conjunto  $E$  repetidamente con rejillas rectangulares cada vez más finas y contabilizar el número mínimo  $N_r$  de celdas cuadradas de lado  $r$  que cubren al conjunto  $E$ . Usando este método si el objeto tiene una estructura geométrica fractal, su dimensión estará dada por

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln N_r}{\ln(1/r)} = \alpha, \text{ para algún valor constante } \alpha \geq 0. \quad (2.1)$$

Se puede verificar la validez de esta afirmación, ya que  $|U_i| = \sqrt{2}r$ . De esta forma,

$$\sum_i |U_i|^t = 2^{t/2} r^{t-\alpha} \quad (2.2)$$

y

$$H^t = \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf 2^{t/2} r^{t-\alpha} = 0 \text{ para toda } t > \alpha \quad (2.3)$$

debido a que  $r \leq \delta$ .

Es decir,

$$\dim_H(E) = \inf \{t > 0 : H^t = 0\} = \alpha. \quad (2.4)$$

De esta forma, se dice que un objeto tiene la propiedad fractal si persiste una relación de escala entre el número mínimo de celdas que lo cubren y el tamaño de las mismas.

## 3. Programa computacional

Para determinar la dimensión fractal de un objeto digitalizado se desarrolló un programa computacional basado en el algoritmo de conteo. A modo de ejemplo se estima la dimensión fractal de la bien conocida curva de Koch [Ta], cuya imagen se muestra en la Figura 3.

Brevemente, el programa computacional utiliza el algoritmo de conteo de cajas sobre una imagen cuadrada de  $2^n$  pixeles por lado (siendo  $n$  un entero no negativo). Durante el proceso se divide la imagen en  $2^{n-m}$

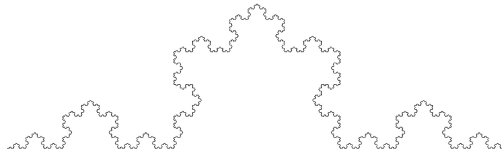


Figura 3: Curva de Koch.

celdas cuadradas de  $2^m$  píxeles por lado (con  $m \leq n$  un entero no negativo), de las cuales se contabilizan únicamente aquellas que tengan al menos un píxel cuyo color esté por debajo de un umbral establecido.

Al final, se obtiene una secuencia de imágenes como se muestra en la Figura 4 donde se ha contabilizado el número  $N_m$  de celdas necesarias para cubrir la totalidad de la curva, en este caso, la imagen tiene un tamaño de  $2048 \times 2048$  píxeles. Cuando el proceso finaliza, se obtienen  $n$  parejas ordenadas cuya pendiente en un ajuste lineal da una estimación de la dimensión fractal del objeto. En el caso particular de la curva de Koch, después de 12 iteraciones el programa obtuvo un valor  $D = 1.2494$  con una correlación de Pearson de 0.9990, en comparación con el valor teórico de  $D_K = 1.2618$ , lo que representa un error relativo de 0.98%. Es importante mencionar que en este artículo no se detalla el funcionamiento de dicho programa, sólo se utiliza para hallar una estimación a la dimensión fractal de la superficie lunar.

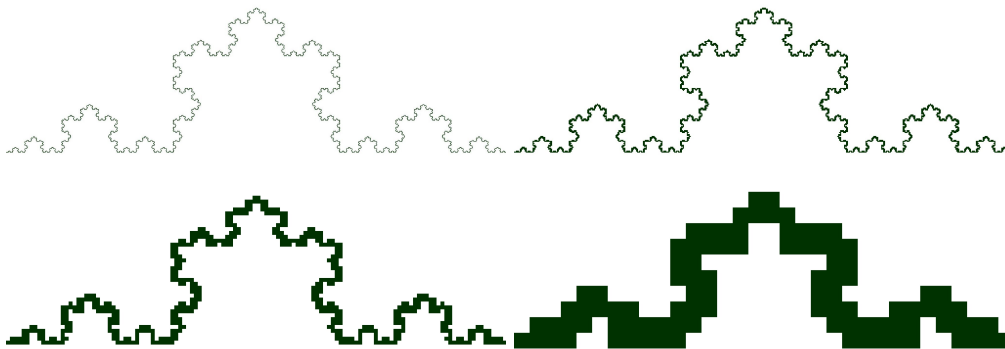


Figura 4: Conteo para cajas de tamaños 1, 4, 16 y 64 píxeles.

Este análisis estadístico de conteo ha sido utilizado por varios investigadores para describir algunas peculiaridades de la superficie lunar. Por ejemplo, en [Yo] se analizaron los mapas topográficos analógicos de la NASA (sigla en inglés para National Aeronautics and Space Administration), de la USGS de la luna (sigla en inglés para U. S. Geological Survey [Lpi]), e imágenes estereográficas de la misión Apolo para dar una comparación estadística de la rugosidad topográfica en las tierras altas de la Luna; a partir del cual, se puede inferir la historia de los impactos sobre el terreno. De manera similar, en [Ne] se aplicó un análisis fractal sobre las imágenes de la superficie lunar para obtener una estimación más fiable de los mapas lunares.

## 4. Geometría fractal en el Mar de la Humedad

El mar de la humedad es una formación casi circular de aproximadamente  $113,000 \text{ km}^2$  situado en el suroeste de la cara visible de la Luna, cuya superficie es relativamente plana debido al escurrimiento de magma que surgió del impacto de un asteroide de gran tamaño hace 3,900 millones de años; sin embargo, a menor escala, gran parte de su superficie se encuentra salpicada por pequeños cráteres que en su mayoría no rebasan unas cuantas decenas de kilómetros de diámetro.

Para determinar la dimensión fractal en la superficie lunar se seleccionó una región del Mar de la Hume-

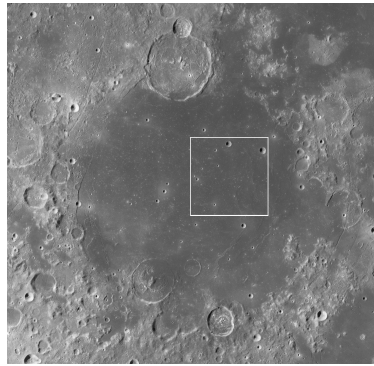


Figura 5: Región en el Mar de la humedad.

dad, la cual se muestra en la Figura 5, y sobre esta imagen digitalizada de  $512 \times 512$  píxeles, la aplicación del programa da una estimación  $D = 1.7993$ , con una correlación de Pearson de 0.9943. En relación a esto, en la Figura 6 se muestra el caso cuando se aplica la malla rectangular con celdas uniformes de 4 píxeles por lado. Después de 10 iteraciones se obtiene el conjunto de datos que se muestra en la Figura 7 junto con su ajuste lineal. Los últimos datos corresponden a celdas de 1 píxel y 2 píxeles, los cuales son menores de lo

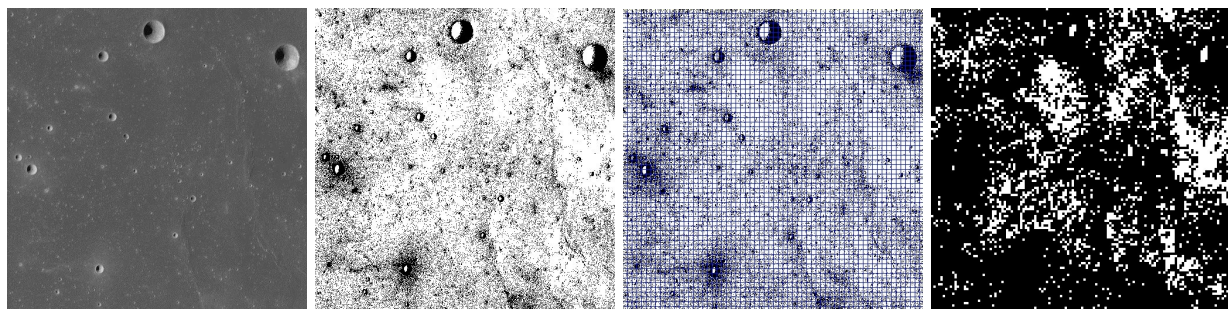


Figura 6: Método de conteo de cajas en el Mar de la humedad

esperado debido a errores por eliminación de detalles, o por la limitada resolución de la imagen; en ambos casos, se considera que el número de cráteres de la imagen será menor que el real. Si se eliminan estos puntos inciertos la dimensión fractal resultante será  $D = 1.9672$  con una correlación de Pearson de 0.9998.

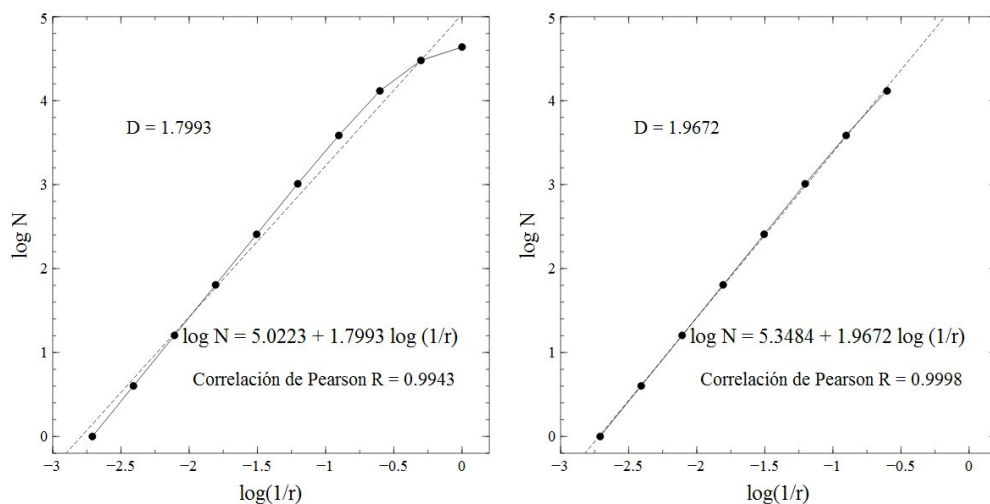


Figura 7: Ajuste lineal a los datos.

Como dato curioso, la primera estimación está cercana al valor obtenido sobre una imagen del polvo de Lévy de la Figura 8, cuya dimensión fractal es  $D = 1.7710$  con una correlación de Pearson de 0.9968.

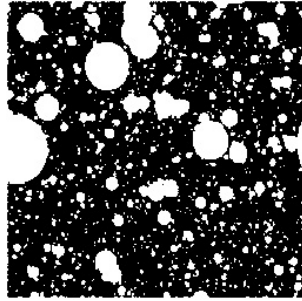


Figura 8: Polvo de Lévy.

Existen diversos programas computacionales gratuitos en la Internet para calcular la dimensión fractal de una imagen digitalizada, tales como Fractalyse [Fra], Fractal Dimension Estimator [Fde], BCFD [Bc] e ImageJ [Ij], entre otros. Además de la limitada resolución de las imágenes lunares persisten algunas dificultades durante el proceso de reconocimiento y conteo de cráteres, debido principalmente a que la textura superficial tiene cierta obliteración de cráteres (*i.e.* cráteres dentro de cráteres), suaves ondulaciones del terreno y zonas brillantes y oscuras. En este sentido, para poder realizar el cálculo de la dimensión es necesario adecuar la imagen para poder aplicar dichos programas. Estas modificaciones se basan principalmente en eliminar las texturas irregulares de fondo por diversos métodos. Aplicando los mencionados programas a la imagen seleccionada, los valores obtenidos por los programas Fractalyse ( $D = 1.665$ ); ImageJ, ( $D = 1.8717$ ); BCFD, ( $D = 1.9983$ ), y Fractal Dimension Estimator, ( $D = 1.8266$ ) están de acuerdo con nuestros resultados, lo que apunta a que la superficie lunar presenta cierta similitud en la distribución de cráteres dentro del Mar de la Humedad. Nuevamente enfatizamos que estos valores presentan ciertas diferencias debido a que cada programa requiere adecuar la imagen para poder aplicarlo, lo que aporta variaciones en el valor estimado.

## 5. Detección de cráteres usando algoritmos de reconocimiento de patrones

A pesar que el conteo de cajas es un método ampliamente utilizado en la actualidad para determinar la dimensión fractal de sistemas naturales digitalizados, uno de sus puntos débiles es la forma en la cual se determina de manera automática que pixeles de una imagen corresponden al sistema y que pixeles no. Para el conteo de cráteres en la superficie de la luna, y de algunos planetas, esta decisión se basa meramente en el color obscuro de los pixeles, lo cual significa que algunos puntos son contabilizados como cráteres, o parte de ellos, cuando en realidad no lo son. Al respecto, recientemente se han propuesto métodos más especializados para la detección de cráteres que se basan en reconocer el patrón de contrastes que éstos presentan y que permite, por ejemplo al ojo humano, diferenciar entre un cráter de aquello que simplemente es una región oscura. Estos métodos se basan en algoritmos de aprendizaje automático para el reconocimiento de patrones en imágenes.

Para poder contar los cráteres en imágenes de alta resolución que pueden contener cientos de ellos, es necesario utilizar métodos computacionales. Uno de los métodos más poderosos desarrollados en la actualidad para la detección de cráteres en imágenes son los métodos de aprendizaje automático. Por ejemplo, en [St], se analizan dos métodos para la detección de cráteres en Marte, un método utiliza modelos digitales de la elevación de la superficie marciana mientras que el otro es construido a partir de imágenes panorámicas. Otra metodología basada en aprendizaje automático para el mismo problema de detección y conteo de cráteres se presenta en [Di], donde experimentos con un conjunto grande de imágenes de prueba de  $37,500 \times 56,250$   $m^2$  de la superficie marciana, muestran un desempeño sobresaliente de estos métodos con una medición  $F1$  por encima de 0.85, lo cual representa una mejora significativa sobre otros métodos usados para la detección automatizada de cráteres.

## 6. Conclusiones

Los cráteres en la superficie lunar se observan distribuidos de manera caótica; sin embargo, a partir de matemáticas sencillas y ciertos algoritmos simples se puede reconocer un orden capaz de describir su naturaleza compleja. En el caso de la región seleccionada en el Mar de la Humedad, el uso de varios programas computacionales, basados en el algoritmo de conteo de cajas y aplicados sobre su imagen digitalizada, muestran una invariancia estadística que exhibe una relación de escala; es decir, la superficie lunar presenta la misma similitud a diferentes alturas independientemente de la azarosa distribución en posición y tamaño de los cráteres. Al respecto, es posible que esta información no sólo sea útil para explicar la topografía de la luna sino también para determinar la distribución en masa de los objetos espaciales que prevalecieron después de la formación de la luna, y que cruzaron durante millones de años las cercanías de la Tierra antes de impactarse en la superficie lunar; en este sentido, puede suponerse que al igual como sucedió en la luna, otros pudieron haberse impactado con la Tierra ocasionando grandes estragos sobre la vida en esos tiempos.

Para finalizar, es importante comprender la forma simple con la cual opera la naturaleza que a partir de un proceso iterativo sencillo construye sus obras, ya que ésto puede ayudarnos a determinar el comportamiento o la estructura de un sistema, aunque éste manifieste una forma aparentemente desordenada e impredecible a simple vista.

## Agradecimientos

Los autores desean agradecer a la Universidad Autónoma de Yucatán todo el apoyo recibido para la elaboración de este artículo.

## Referencias

- [Bc] BCFD: <http://www.geo.ntf.uni-lj.si/tverbovsek/programi.html>.
- [Co] Cross, C., A., MNRS, "The size distribution of luna craters", 134, pp. 245-252, 1966.
- [Di] Ding, W., Stepinski, T. F., Mu, Y., Bandeira, L., Vilalta, R., Wu, Y., Lu, Z., Cao, T., Wu, X. "Sub-kilometer crater discovery with boosting and transfer learning", *ACM Transactions on Computational Logic*, vol. 2, no. 4, 2011.
- [Fra] Fractalyse: <http://www.fractalyse.org/>.
- [Fde] Fractal Dimension Estimator: <http://www.fractal-lab.org/>.
- [Ij] ImageJ: <http://rsbweb.nih.gov/ij/>.
- [Lpi] Lunar Planetary Institute: <http://www.lpi.usra.edu/resources/mapcatalog/usgs/>.
- [Ma] Mandelbrot, B., "La geometría fractal de la naturaleza", Ed. Tusquets, España, 2003.
- [Mo] Morota, T., Haruyama, J., Honda, C., Yokota, Y., Ohtake, M., Matsunaga, T. "Lunar Cratering Chronology: Statistical Fluctuation of Crater Production Frequency and Its Effect on Age Determination", 38th Lunar and Planetary Science Conference, No. 1338, p.1750, 2007.
- [Na] [http://nssdc.gsfc.nasa.gov/imgcat/html/mission\\_page/EM\\_Ranger\\_9\\_page1.html](http://nssdc.gsfc.nasa.gov/imgcat/html/mission_page/EM_Ranger_9_page1.html).
- [Ne] Nefedjev, Y. "Lunar surface research using fractal analysis", *Astronomical and Astrophysical Transactions*, vol. 22, Issue 4/5, pp. 631-632, 2003.
- [Po] Pool, S., "Introducción a la Geometría fractal y su relación con la naturaleza", *Abstraction & Application*, No. 7, pp. 1-24, 2012.
- [St] Stepinski, T. F., Ding, W., Vilalta, R. "Detecting Impact Craters in Planetary Images Using Machine Learning", En Magdalena-Benedito, R. and Martinez-Sober, M. and Martinez-Martinez, J. M. and Escandell-Moreno, P. and Vila-Frances, J., editores. *Intelligent Data Analysis for Real-Life Applications: Theory and Practice*, IGI Global, capítulo 8, pp 146-159, 2012.

- [Ta] Talanquer, V., “Fractus, Fracta, Fractal, Fractales: De laberintos y espejos”, Ed. F.C.E., México, 1996.
- [Yo] Yokota, Y., Haruyama, J., Honda, C., Morota, T., & Ohtake, M., “Lunar topography: statistical analysis at 10-1 kilometer scale roughness”, 36th COSPAR Scientific Assembly, Beijing, China, 2006.
- [Shy] Shylaja, B. S., *J. Earth Syst. Sci.* 114, No. 6, 2005, pp. 609-612