

# Software para calcular numéricamente la radiación de Cherenkov en zona lejana en metamateriales

Software to calculate numerically the Cherenkov radiation  
in remote area in metamaterials

Erika Martínez-Sánchez,<sup>1\*</sup> Gennadiy-Burlak<sup>1</sup>

Centro de Investigación en Ingeniería y Ciencias Aplicadas  
Universidad Autónoma del Estado de Morelos (CICAP-UAEM)  
Avenida Universidad 1001, colonia Chamilpa, Cuernavaca, Morelos, México. CP 62209  
\*Correo-e: erika.martinez@uaem.mx

## PALABRAS CLAVE:

campo electromagnético,  
metamaterial dispersivo, método de  
fase estacionaria

## RESUMEN

En este trabajo aplicamos el método de fase estacionaria para estudiar la distribución del campo electromagnético que deja el paso de una partícula a través de un medio dispersivo y con pérdida. Acoplamos el conjunto de ecuaciones del modelo analítico en un algoritmo computacional para obtener las soluciones numéricas. En particular, estudiamos el efecto de Cherenkov en zona lejana. Como resultado de nuestras simulaciones, observamos que existen rangos de frecuencia para las cuales se obtiene un índice refractivo negativo (metamaterial), con ello, el efecto de Cherenkov resulta en un cono con doble ramificación.

## KEYWORDS:

electromagnetic field, dispersive  
metamaterial, stationary phase  
method

## ABSTRACT

In this paper we apply the stationary phase method to study the distribution of the electromagnetic field that leaves the passage of a particle through a dispersive lossy medium. We have coupled the set of equations of the analytical model into a computational algorithm for the numerical solutions. Specifically, we have studied the Cherenkov effect in far zones. As a result of our simulations, we note that there are frequency ranges for which a negative refractive index (metamaterial) is obtained, and thus the Cherenkov effect results in a double cone branching.

## 1 INTRODUCCIÓN

Las soluciones a problemas en el área de electromagnetismo y otros ámbitos científicos admiten una representación matemática que se obtiene generalmente mediante integrales transformadas. El cálculo de éstas es bastante complicado, aunque es posible obtener aproximaciones de las mismas en ciertos límites. En los últimos años se han propuesto diversas técnicas y teorías para obtener expansiones asintóticas de funciones definidas mediante representaciones integrales [1-2]. La literatura contiene una gran variedad de métodos de obtención de aproximaciones asintóticas de integrales, entre las más importantes se encuentra el método de fase estacionaria [3-4].

En nuestra investigación aplicamos el método de fase estacionaria para problemas de radiación de ondas electromagnéticas (EM) de una fuente modulada que se mueve en un medio dispersivo y con pérdida. En particular estudiamos el efecto Cheronkov, éste surge cuando una partícula cargada se mueve con una velocidad  $v_0$  más grande que la velocidad de fase de la luz  $v$  en un medio. Aquí  $v=c/n$ ,  $c$  es la velocidad de la luz en vacío y  $n$  es el índice refractivo del medio [5-10].

En nuestro estudio analítico-numérico, trabajamos un nuevo enfoque aplicado a la programación orientada a objetos para investigar la radiación de Cherenkov y la representación de los campos EM. El método consiste en una doble integral oscilatoria con un subsecuente análisis asintótico.

## 2 ECUACIONES FUNDAMENTALES

Sea el campo EM generado por una fuente de la forma:

$$j(t,x)=A(t) v_0(t)\delta(x-x_0(t)) \quad (1)$$

Donde  $\delta$  es la función delta;  $x_0(t)=(x_{01}(t),x_{02}(t),x_{03}(t))$  es el vector que define el movimiento de la fuente y  $v_0(t)=\dot{x}_0(t)$  es su velocidad. Aquí  $A(t)=a(t)e^{-i\omega_0 t}$  representa amplitud y  $\omega_0$  es la frecuencia de la fuente.

En el método de fase estacionaria se obtiene una representación de los campos como una doble integral oscilatoria que depende del parámetro  $\lambda$ ; éste parámetro caracteriza grandes distancias entre una fuente y un observador (zona lejana) [11-12]. En general, estas integrales se presentan de la siguiente manera:

$$\phi_\lambda(t,x)=\int F(t,x,\omega,\tau,\lambda) e^{iS(t,x,\omega,\tau)} d\omega d\tau \quad (2)$$

Donde  $F$  se define como amplitud y  $S$  es la fase.

De acuerdo con la teoría publicada en el artículo [3], la representación de los campos eléctrico y magnético  $\phi_\lambda(t,x)$  se describen como dobles integrales:

$$H(t,x)=\frac{1}{8\pi^2}\int_{-\infty}^t\int_{-\infty}^{\infty}A(\tau)\nabla_x\times\left(\frac{e^{iS(t,x,\omega,\tau)}}{|x-x_0(\tau)|}\right)v_0(\tau)d\omega d\tau \quad (3)$$

$$E(t,x)=\frac{1}{8\pi^2i}\int_{-\infty}^t\int_{-\infty}^{\infty}A(\tau)\omega\mu(\omega)(1+k_a^{-2}(\omega)\nabla_x\nabla_x\cdot)\frac{e^{iS(t,x,\omega,\tau)}}{|x-x_0(\tau)|}v_0(\tau)d\omega d\tau \quad (4)$$

La integración con respecto de  $\tau$  de  $-\infty$  a  $\tau$  en (3) y (4) es explicada por razones de causalidad; de ahí que  $\tau$  no puede ser mayor que  $t$ .

La idea principal del método de la fase estacionaria se basa en la cancelación de sinusoides cuando la fase varía rápidamente; sin embargo, si en algún punto la fase es estacionaria (tiene derivada cero), la falta de oscilación a ritmo constante restringe la cancelación y permite extraer un término principal. Esto es, cuando  $\omega \rightarrow \infty$ , se generan oscilaciones muy rápidas dentro de la integral, lo que lleva a una cancelación en el término principal de la integral. No obstante, en una vecindad cercana a  $x_0$ , donde  $\partial S/\partial\omega=0$  y  $\partial S/\partial\tau=0$ , la componente del campo EM es distinta de cero.

Aproximando con serie de Taylor a la función fase  $S$ , donde  $S$  tiene un punto máximo en  $x_0$  y anulando los términos de orden superior a  $(x-x_0)^2$ , las integrales (3) y (4) se simplifican y se aplica integración por partes. La contribución de los puntos estacionarios  $(\omega_s, \tau_s)$  en el comportamiento asintótico de  $H$  y  $E$  está dada por la siguiente formulación:

$$H(t,x)\sim\frac{1}{4\pi}\nabla_x\times\left(\frac{e^{iS(t,x,\omega_s,\tau_s)}}{|x-x_0(\tau_s)|}v_0(\tau_s)\right)\frac{a(\tau_s)}{(\det(-S''(t,x,\omega_s,\tau_s)))^{1/2}} \quad (5)$$

$$E(t,x)\sim\frac{1}{4\pi i}a(\tau_s)\omega_s\mu(\omega_s)\left(I+\frac{1}{k^2(\omega_s)}\nabla_x\times\frac{e^{iS(t,x,\omega_s,\tau_s)}}{|x-x_0(\tau_s)|}v_0(\tau_s)\right)\times\frac{1}{(\det(-S''(t,x,\omega_s,\tau_s)))^{1/2}} \quad (6)$$

Donde  $t = \tau/\lambda$ ,  $|x-x_0| = (x-x_0(t))/\lambda$ , como se detalla en [3].

En las fórmulas (5) y (6) la fase es:

$$S(t, x, \omega, \tau) = k(\omega) |x - x_0(\tau)| - \omega(t - \tau) - \omega_0 \tau \quad (7)$$

Donde  $k(\omega) = \omega \sqrt{\epsilon(\omega)\mu(\omega)}$  es el número de onda y  $\epsilon(\omega)$  y  $\mu(\omega)$  son la permitividad eléctrica y permeabilidad magnética que dependen de la frecuencia  $\omega \in \mathbb{R}$  [13]. Debemos notar que las contribuciones en el término principal del comportamiento asintótico de las integrales (3) y (4) están dadas por los puntos estacionarios ( $\omega = \omega(t, x)$ ,  $\tau = \tau(t, x)$ ) de la fase  $S$ , y son soluciones del siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(t, x, \omega, \tau)}{\partial \omega} &= \frac{|x - x_0(\tau)|}{v_g(\omega)} - (t - \tau) = 0 \\ \frac{\partial S(t, x, \omega, \tau)}{\partial \tau} &= -k(\omega)v(x, \tau) + (\omega - \omega_0) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

El sistema (8) para los puntos de fase estacionaria ( $\omega(t, x)$ ,  $\tau(t, x)$ ) es el siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(t, x, \omega, \tau)}{\partial \omega} &= \frac{|x - x_0(\tau)|}{v_g(\omega)} - (t - \tau) = 0 \\ \frac{\partial S(t, x, \omega, \tau)}{\partial \tau} &= -k(\omega)v(x, \tau) + (\omega - \omega_0) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

### 3 SIMULACIÓN NUMÉRICA

En esta sección estudiamos la solución al sistema de ecuaciones (9) para los valores desconocidos de  $\tau$  y  $\omega$ ; donde sabemos que las variables  $x_1, x_2, x_3$  son la posición de un observador y  $\tau$  es el tiempo de retardo. La situación se simplifica si fijamos el eje  $x_2$  paralelo a la dirección de velocidad de la partícula  $v_0 \parallel \hat{e}_{x_2}$ . Para continuar la investigación escribimos (9) como sigue:

$$r(\tau) - (t - \tau) v_g(\omega) = 0 \quad (10)$$

$$-v_0 k(\omega)(x_2 - v_0 \tau) + (\omega - \omega_0)r(\tau) = 0 \quad (11)$$

Donde  $r(\tau) = \sqrt{x_1^2 + (x_2 - \tau v_0)^2 + x_3^2}$ ,  $v_0$  es la velocidad de la partícula;  $k = n(\omega)\omega / c$  es el número de onda;  $n(\omega)$  es el índice refractivo del medio;  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío  $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-0.5}$ , y  $v_g$  es la velocidad de grupo  $v_g(\omega) = c / (n(\omega)\omega)$ .

El caso más simple del sistema (10)-(11),

corresponde a  $n = \text{constante}$ . En esta situación, las soluciones para  $\tau$  y  $\omega$  pueden ser escritas como sigue:

$$\tau_{1,2} = \frac{tc^2 - x_2 n^2 v_0 \pm cn \sqrt{rr_1}}{(1 - \beta^2)c^2} \quad (12)$$

$$\omega_{1,2} = \frac{c\omega_0 r(\tau)}{nv_0^2 \tau_{1,2} - x_2 n v_0 + cr(\tau)} \quad (13)$$

Donde  $rr_1 = (x_2 - v_0 t)^2 + (x_1^2 + x_3^2)(1 - n^2 v_0^2 / c^2)$ ,  $\beta = nv_0 / c$  y la desigualdad  $t > \tau$  han sido aplicadas en (12-13).

El caso más general corresponde a  $n = n(\omega)$ ; para ello se deben buscar soluciones numéricas del sistema (12-13).

Con nuestro enfoque se estudian las propiedades del campo EM en metamateriales dispersivos; donde  $Re(n)$  se convierte en negativo para cierto rango de frecuencias. Además destaca que una comprensión más profunda de los efectos de las ondas en el caso dispersivo requiere de la formulación explícita del modelo del material dispersivo. En la literatura reciente normalmente se aplican los modelos de Drude o Lorenz (ver [13-14] y sus referencias). Puesto que nuestro material contiene un ingrediente metal, tuvimos que elegir el modelo Drude. Consideramos un medio que se caracteriza por la permitividad eléctrica  $\epsilon(\omega)$  y la permeabilidad magnética  $\mu(\omega)$ , ambas funciones complejas de la frecuencia  $\omega$  y que satisfacen:

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Te}^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_e} \quad (14)$$

$$\mu(\omega) = 1 + \frac{\omega_{pm}^2}{\omega_{Tm}^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_m} \quad (15)$$

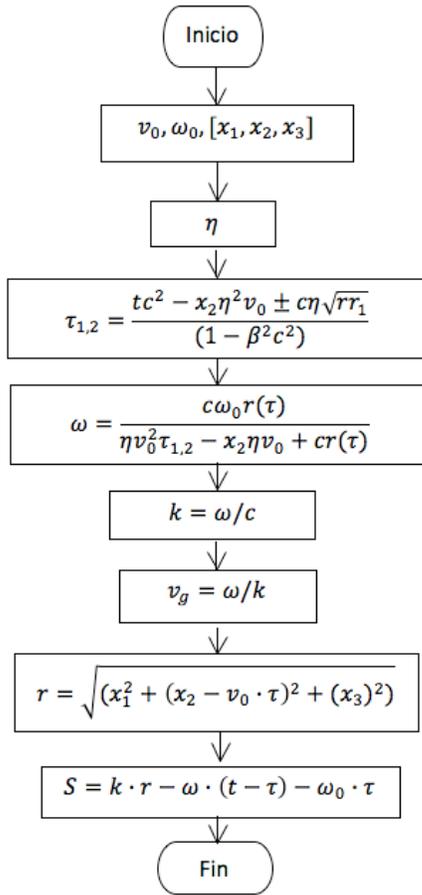
Para tales  $\epsilon(\omega)$  y  $\mu(\omega)$ , el índice refractivo complejo de un metamaterial puede ser escrito como sigue [13]:

$$n(\omega) = \sqrt{|\epsilon(\omega)\mu(\omega)|} e^{i[\phi_\epsilon(\omega) + \phi_\mu(\omega)]/2} \quad (16)$$

Nuestra estrategia para obtener las soluciones numéricas a las ecuaciones mostradas en ésta sección es la siguiente:

Primero resolvemos numéricamente el sistema no lineal (10-11). Para ello aplicamos el método de Newton Raphson. Como valor inicial usamos las soluciones para el caso sin dispersión (cuadro 1), que

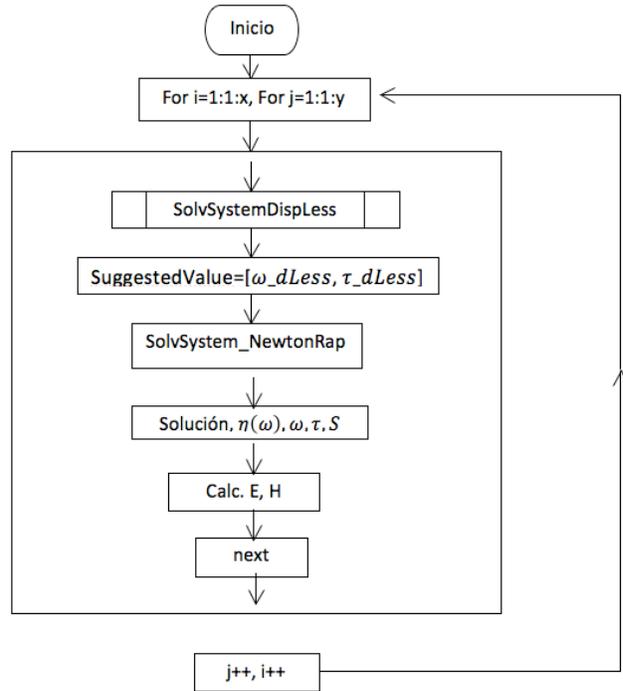
en general permite la convergencia más rápida. Una vez que se tienen las soluciones iniciales, se llama a la función de biblioteca de Matlab que resuelve sistemas no lineales; así, con las raíces del sistema y el resto de los parámetros recuperamos los valores del campo E y H con las aproximaciones (5-7). Para mostrar la secuencia de los cálculos anteriores, hemos realizado, de forma resumida, los diagramas de flujo de los cuadros 1 y 2.



**Cuadro 1.** Diagrama de flujo de la función SolvSystemDispLess que obtiene la solución al sistema sin dispersión (12-13), para un índice refractivo  $\eta=1.2$ , y calcula además el número de onda  $k$ , la velocidad de grupo  $v_g$  y la fase  $S$

#### 4 RESULTADOS

Consideramos un material homogéneo e isotrópico con estructura *fishnet* [15] y en nuestra simulación numérica usamos variables adimensionales, donde para la normalización se aplica la velocidad de la luz

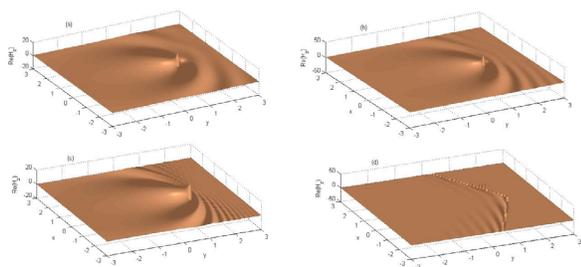


**Cuadro 2.** Esquema de flujo principal que muestra la secuencia que se lleva a cabo para encontrar las soluciones numéricas de las ecuaciones (5-8)

en el vacío  $c$  y la longitud de onda de plasma  $l_0=c/\omega_{pe}$ . Para metales, tales como aluminio, cobre, oro y plata, la densidad de los electrones libres es del orden  $10^{23}cm^{-3}$  y el valor típico es  $\omega_{pe} \approx 2 \cdot 10^{16} s^{-1}$ . Con tal normalización, la frecuencia de plasma del metal en el modelo Drude se convierte en  $\omega_{pe}=5$  y  $\omega_{pm}=7$ . Los campos eléctrico y magnético son normalizados con la escala eléctrica  $E_0=q \cdot l_0 \cdot \epsilon_0$  y la escala magnética  $H_0=(\epsilon_0/\mu_0)^{0.5}$ [7].

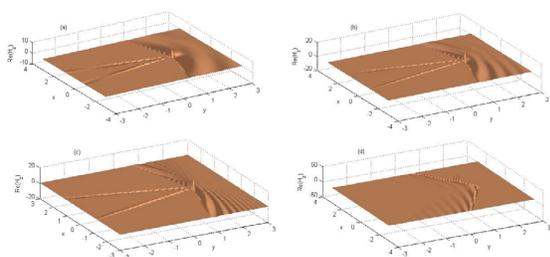
A continuación mostramos los resultados obtenidos. Las figuras 1 y 2 exponen la distribución del campo espacial del componente  $H_z$  para distintas velocidades de una partícula en un tiempo  $t=2$ . En la figura 1 se muestra la distribución del campo EM a través de un material no dispersivo. La figura 1 (a-c) corresponde a las velocidades  $v_0=0.65, 0.75, 0.8 < 0.833=v_c$ . Ahí se observa una considerable disminución en la amplitud del campo. Sin embargo, al superar la velocidad crítica  $v_0=0.8333$  del material (figura 1), obtenemos el cono de la radiación de Cherenkov convencional, con  $n=1.2$ .

Una vez que se ha validado el algoritmo computacional que modela el campo EM de una fuente en movimiento en un medio libre de dispersión, aplicamos



**Figura 1.** Distribución del campo espacial para la componente Hz en un material sin dispersión, donde  $n=1.2$ . (a)  $v_0=0.65$ . (b)  $v_0=0.75$ . (c)  $v_0=0.8$ . (d)  $v_0=0.93 > 0.833=v_c$ . Cono de la radiación de Cherenkov.

las ecuaciones del método de fase estacionaria para calcular el campo EM en un metamaterial dispersivo. Los resultados se muestran en la figura 2. En este caso surge una situación muy interesante: para las velocidades  $v_0=0.65, 0.75, 0.8$ , el cono de la radiación de Cherenkov se manifiesta en doble ramificación, donde el cono interno de la distribución espacial del campo corresponde a un índice refractivo negativo y las ramas externas surgen en un índice refractivo positivo. Al aumentar la velocidad en  $v_0=0.93$  (figura 2), se aprecia el cono de la radiación de Cherenkov de forma muy similar al caso sin dispersión.



**Figura 2.** Distribución del campo espacial para la componente Hz en un material dispersivo, donde  $\eta=\eta(\omega)$ . (a)  $v_0=0.65$ ,  $\eta=-1.26$  y  $\eta=1.16$ , respectivamente para las ramas interna y externas. (b)  $v_0=0.75$ ,  $\eta=-1.15$  y  $\eta=1.19$ . (c)  $v_0=0.8$ ,  $\eta=-1.67$  y  $\eta=1.2$ . (d)  $v_0=0.93$ . Cono de la radiación de Cherenkov.

## CONCLUSIONES

En este trabajo aplicamos el método de fase estacionaria para problemas de radiación de ondas por una fuente en un medio dispersivo y con pérdida; en

particular, estudiamos el efecto de Cherenkov en zona lejana. Acoplamos las ecuaciones correspondientes al modelo analítico en un código computacional con un enfoque orientado a objetos. En nuestras simulaciones aplicamos el modelo de Drude, donde, para ciertas frecuencias se puede obtener un índice refractivo negativo. Hemos observado que una fuente a través de un metamaterial registra una doble ramificación del cono de Cherenkov, donde el índice refractivo se convierte en negativo y positivo para las ramas interna y externa, respectivamente.

## REFERENCIAS

1. Babich, V. M, Buldirev, V. S., Molotkov, I. A. *Space-time ray methods. Linear and non-linear waves*. Leningrado: Universidad de Leningrado, 1998.
2. Lewis, R. M. Asymptotic methods for the solution of dispersive hyperbolic equations, Asymptotic solutions of differential equations and their applications, *University of Wisconsin Symposium Proceedings*, Nueva York: John Wiley & Sons, 1964.
3. Burlak, G., Ravinovich, V. Propagation of electromagnetic waves generated by modulated moving source in dispersive lossy media. *Mathematical methods in the applied sciences*, 2014.
4. Burlak G., Ravinovich V., Time-frequency integrals and the stationary phase. Method in problems of waves propagation from moving sources. *SIGMA* 8, 2012, 096.
5. Afanasiev, G. N. *Vavilov-Cherenkov and synchrotron radiation*. Denver: Alwin Van Der Merwe / University of Denver.
6. Bolotovskii, B. M. Vavilov-Cherenkov radiation: its discovery and applications. *Physics-Uspexhi*. 2009, 52 (11).
7. Burlak, G., Martinez-Sanchez, E. Change of structure of the Cherenkov emission at modulated source in dispersive metamaterials, *Progress in electromagnetics research*, 2013, 139, 277-288.
8. Martinez-Sanchez, E. Tesis: *Aplicación de las condiciones de frontera absorbentes para problemas de propagación de ondas electromagnéticas*, 2013.
9. Tamm, I. E., Frank, I. M., The coherent radiation of a fast electron in a medium, *Doklady Akad. Nauk SSSR*, 1937, 14 (107).
10. Cherenkov P. A., Visible radiation produced by electrons moving in a medium with velocities exceeding that of light, *Physical review*. 1937, 52 (4).
11. Jackson, J. D., J. Willey and Sons. New York, London, Sidney. 1962.
12. Landau, L. D., Lifshitz, E. M. *Theoretical Physics vol. II, Field Theory*, Moscow: Nauka, 1988.
13. Lu, J., Grzegorzczak, T., Zhang, Y., Pacheco, J., Wu, B.I., Kong, J., Chen, M., Cherenkov radiation in materials with negative permittivity and permeability, *Optics express*, 2003, 11 (7), 723-734.
14. Duan, Z., Wu, B.I., Xi, S., Chen, H., Chen, M., Research progress in reversed Cherenkov radiation in double-negative metamaterials, *Progress in electromagnetics research*, 2009, 90, 75-87.
15. Xiao, S., Drachev, V. P., Kildishev, A. V., Xingjie, N., Chettiar, U. K., Yuan, H-K., Shalaev, V. M. Loss-free and active optical negative-index metamaterials. *Nature*. 2010, 466, 735-738.

### Acerca de los autores



Erika Martínez Sánchez. Licenciada en Matemáticas Aplicadas por la Universidad Autónoma de Coahuila en 2010 y Maestra en Ciencias por el Centro de Investigaciones en Ingeniería y Ciencias Aplicadas de la Universidad Autónoma del Estado de Morelos (CIICAP-UAEM) en 2013. Actualmente es doctorante en la misma institución.



Gennadiy Burlak. Licenciado y Maestro por la Universidad Nacional de Kiev (KNU) en 1975, obtuvo el Doctorado en Ciencias físico-matemáticas por la KNU en 1988. Desde 1998 es Profesor-Investigador Titular C definitivo del CIICAP-UAEM. Cuenta con el nivel III del SNI, por parte del Conacyt. Es autor y coautor de cuatro libros y más de 150 artículos en revistas arbitradas. Ha presentado 118 ponencias en congresos nacionales e internacionales.