

Método de Schwarz aditivo de dos niveles mediante funciones de base radial

Miguel Angel Can Ek^a, Alejandro Cobá Magaña^b

Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán, México

^amcan@uady.mx, ^balejandro.coba@uady.mx

Abstract

In this article, we formulate and numerically study a two level Schwarz domain decomposition method for a radial basis function (RBF) collocation technique. We numerically prove by using a coarse grid correction, that the RBF Schwarz additive technique, considerable reduces the number of iterations as the number of subdomains increases. In other words, we numerical investigate the scalability behavior of the two level RBF Schwarz additive method.

Resumen

En este artículo formulamos y estudiamos numéricamente el método de descomposición de dominio de Schwarz aditivo de dos niveles mediante la técnica de colocación con funciones de base radial (FBR). Numéricamente mostramos que usando una corrección de una malla gruesa, la técnica de Schwarz aditivo con FBR, reduce considerablemente el número de iteraciones cuando el número de subdominios se incrementa. En otras palabras, investigamos numéricamente la escalabilidad del método de Schwarz aditivo de dos niveles con FBR.

Keywords and phrases : radial basis function, domain decomposition, partial differential equations, two levels.

2010 *Mathematics Subject Classification* : 65D07 , 65F10, 41A15.

1. Introducción

Durante la última década, los métodos de funciones de base radial para la solución de ecuaciones diferenciales parciales han producido un impacto tanto en la ingeniería como en las matemáticas. En la literatura se pueden encontrar varios enfoques para las solución de ecuaciones diferenciales parciales (EDP) usando funciones de base radial (FBR), entre los cuales destacan los trabajos pioneros [20, 21] donde se formulan por primera vez los métodos de colocación. La versión simétrica de este enfoque se plantea en [8]. Durante este periodo se formulan además, los métodos de cuadratura diferencial [30], el método de soluciones fundamentales [11], el esquema de Galerkin [31], el método de reciprocidad dual [35, 10], entre otros.

Los métodos anteriores han tenido ya un impacto considerable en diferentes campos aplicados, de los cuales destacamos: matemáticas financieras [13, 16], transferencia de calor [26], problemas de valor inicial [14], ecuación no lineal de Burger [15], convección difusión [5, 22, 27, 17], ecuaciones diferenciales elípticas [25], modelación de aguas de poca profundidad [19, 37, 28], campo superficial del viento [12], flujo en cavidades [7],

modelos mixtos bifásico y trifásico [36, 34], geofísica y dinámica de fluidos [3, 9]. La diferencia fundamental que distinguen a los métodos de funciones de base radial, respecto a los métodos clásicos como Diferencias Finitas, Elemento Finito o Volumen Finito, es que a diferencia de estos últimos los primeros no requieren de construcción de mallas. Otra de las ventajas más importantes de estos métodos es que son algorítmicamente más simples que las técnicas clásicas, pues se ajustan con facilidad tanto para casos que involucran altas dimensiones como para fronteras más complicadas, además de que puede alcanzarse convergencia exponencial cuando se incrementa el número de nodos [1].

Por otra parte, los métodos de colocación mediante funciones de base radial, dan lugar a un sistema de ecuaciones lineales en donde la matriz de discretización es mal condicionada cuando el número de nodos aumenta [29]. Para enfrentar este problema se han utilizado de forma destacada las técnicas de descomposición de dominio y de preconditionamiento.

En relación a las técnicas de descomposición de dominio, mediante colocación asimétrica existen varios antecedentes en la literatura. En particular para problemas estacionarios tenemos [33, 22, 24, 23], y para problemas no estacionarios [18, 2, 6]. Los trabajos anteriores se han formulado para técnicas de Schwarz con traslape, tanto aditivas como multiplicativas. La convergencia de estos métodos se ha presentado recientemente en [38], para el caso de dos subdominios.

Como se sabe los métodos aditivo y multiplicativo de Schwarz aplicados con descomposición de dominio y que actualmente se investigan en el ámbito de funciones de base radial, tienen una limitación importante al requerir un número de iteraciones considerablemente alto en su proceso, además de que no convergen al aumentar el número de subdominios. Para resolver lo anterior, proponemos utilizar un método iterativo de dos niveles que incorpore una segunda malla cuyo espaciado sea mayor que el de la primera malla. Es aquí donde radica la contribución de este trabajo, pues en lo que se refiere a FBR, este método conocido como *método de dos niveles* aún no se ha investigado.

El presente artículo está organizado como sigue. En la sección 2, se da una breve revisión del método de colocación asimétrico para problemas estacionarios. En la sección 3 se formula el método de Schwarz aditivo de dos niveles mediante descomposición de dominio y FBR. Además se propone un algoritmo que cubre los detalles del enfoque de colocación para la discretización de la EDP. En la sección 4, se muestran los ejemplos numéricos y funcionamiento del enfoque propuesto. Finalmente, en la sección 5, se presentan las conclusiones.

2. Método de colocación para funciones de base radial

Consideremos el siguiente problema estacionario

$$\mathcal{L}u = f \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^d, \quad \mathcal{B}u = g \quad \text{on } \partial\Omega, \quad (2.1)$$

donde $u = u(x)$ es la función desconocida, \mathcal{L} es un operador diferencial arbitrario y \mathcal{B} un operador que denota las condiciones de frontera las cuales pueden ser Dirichlet, Neumann o Robin.

En el enfoque de Kansas [20, 21], el dominio $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ se discretiza utilizando N distintos puntos de colocación, que son divididos en nodos interiores $\{x_j\}_{j=1}^{n_i}$ y nodos frontera $\{x_j\}_{j=n_i+1}^N$, donde $N = n_i + n_j$ con $n_f = n_i + 1, \dots, N$. La solución exacta $u(x)$ del problema 2.1 se puede entonces aproximar como

$$u(x) \approx s(x) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \phi(\|x - x_j\|) + p(x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad (2.2)$$

donde $\{\lambda_j\}_{j=1}^N$ son los coeficientes desconocidos, ϕ es cualquier función de base radial, aquí $\|\cdot\|$ denota la norma usual entre el par de puntos $x, x_j \in \mathbb{R}^d$. En 2.2 el polinomio $p \in \pi_{m-1}^d$ es de grado al menos $m-1$ en d dimensiones el cual depende de la FBR usada [4, 32]. Las FBR más usuales se muestran en la tabla 1.

Sustituyendo (2.2) en la EDP 2.1, tomando $p = 0$ para mayor claridad, se obtiene el siguiente sistema lineal de ecuaciones

Núcleo Radial	Nombre	Tipo de Soporte
$\phi(r) = r^{2d} \log r$	Placa delgada	Suave a tramos
$\phi(r) = \sqrt{r^2 + c^2}$	Multicuádrica	C^∞
$\phi(r) = (\sqrt{r^2 + c^2})^{-1/2}$	Inv. Multicuádrica	C^∞
$\phi(r) = e^{-r^2 c^2}$	Gaussiana	C^∞
$\phi(r) = (1 - r)_+^4$	Wendland	Compacto

Tabla 1: Diferentes tipos de FBR.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \mathcal{L}\phi(\|x_i - x_j\|)\lambda_j &= f_i, & i = 1, \dots, n_i, & j = 1, \dots, N, \\ \sum_{j=1}^N \mathcal{B}\phi(\|x_i - x_j\|)\lambda_j &= g_i, & i = n_i + 1, \dots, N, & j = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

que puede ser expresado en forma compacta como

$$A\Lambda = F, \quad (2.3)$$

donde $F = [f \ g]^T$, $A = [\mathcal{L}\Phi_a \ \mathcal{B}\Phi_b]^T$, $\Lambda \in \mathbb{R}^N$, $\Phi_a \in \mathbb{R}^{n_i \times N}$, $\Phi_b \in \mathbb{R}^{n_f \times N}$. El sistema de ecuaciones lineales (2.3) puede resolverse directamente por algún método como el de factorización LU. Sin embargo, es bien conocido que la complejidad computacional necesita $O(N^3)$ operaciones y de almacenamiento $O(N^2)$, por lo que el método de colocación asimétrico propuesto es inviable para N , número de nodos, grande. Este es uno de los principales obstáculos al utilizar FBR para problemas prácticos de ingeniería, otro obstáculo es el mal condicionamiento que se deteriora al aumentar el número de nodos, esto se conoce como el principio de incertidumbre de Schaback [29]. Además, el número de condicionamiento comienza rápidamente a mal condicionarse cuando el parámetro c , un número real dado, como se muestra en la tabla 1 también crece. Así pues para contrarrestar estos efectos y a su vez mejorar el rendimiento computacional, el método de descomposición de dominio ha sido investigado recientemente demostrando resultados alentadores. En la siguiente sección se formula el método de descomposición de dos niveles para el esquema de colocación asimétrica desarrollado en esta sección.

3. Método de descomposición de dominio de dos niveles

Como se sabe, en el caso de problemas elípticos, el comportamiento global de la función de Green presenta altas frecuencias en la solución y así la comunicación global de los métodos de descomposición de dominio es requerida a fin de que haya convergencia cuando el número de subdominios aumenta. Métodos como de elemento finito han surgido para tratar este problema. De manera puntual, los métodos multi-malla para la técnica de elemento finito se han formulado y analizado exitosamente y así, condiciones apropiadas para escalabilidad óptima se han obtenido. La principal diferencia entre estos métodos y la técnica de Schwarz de dos niveles, es que mientras los métodos multi-malla se construyen usando un conjunto anidado de subespacios, llegando entonces al uso de mallas anidadas, en el método de dos niveles la malla gruesa no necesariamente debe coincidir con la malla fina. Los métodos multi-malla son buenos para alcanzar escalabilidad pero también tienen un costo computacional alto. Por otro lado está que el método de Schwarz de dos niveles es barato pero la relación entre la malla fina y la malla gruesa es difícil de determinar.

Sin embargo, algunos resultados que se han obtenido dentro del contexto de los métodos clásicos, indican que para problemas elípticos el tamaño de la malla gruesa es del orden del diámetro de los subdominios. En este trabajo seguiremos este resultado para la selección de la malla gruesa. Para una mejor exposición, primero se revisará brevemente el método clásico aditivo de Schwarz. Luego se introducirá el método aditivo de Schwarz de dos niveles en el contexto de funciones de base radial. Además se dará un algoritmo computacional que cubre los detalles de la implementación.

Siguiendo la notación de Zhou et al. [39], brevemente el método aditivo de Schwarz de un nivel,

$$u^{n+1} = u^n + B(F^n - Au^n), \quad (3.1)$$

donde

$$B = \sum_{i=1}^k B_i, \quad B_i = P_i A_i^{-1} P_i^T, \quad (3.2)$$

B es el preconditionador de un nivel. En la construcción de las ecuaciones P_i y P_i^T son los operadores prolongación y restricción respectivamente, mientras que $F^n - Au^n$ es el residual caracterizado como

$$A = \sum_{i=1}^k P_i A_i P_i^T, \quad F = \sum_{i=1}^k P_i F_i, \quad (3.3)$$

donde A_i es la matriz del subdominio que se compone de los nodos internos y de los nodos de la frontera artificial. Recordar que, la información entre diferentes dominios se transmite únicamente de manera local a través del vector F^n , esta es la principal limitación del método de Schwarz de un nivel. Es bien sabido que una comunicación global se requiere para obtener un algoritmo escalable, es decir, una técnica cuyas iteraciones no se incrementen si el número de subdominios aumentan.

Este es el propósito del método de Schwarz aditivo de dos niveles con descomposición de dominio y funciones de base radial que se describe enseguida. Primero, considerar una malla gruesa para el dominio a fin de obtener un óptimo preconditionador o el más óptimo. Así el método aditivo de Schwarz de dos niveles puede genéricamente caracterizarse modificando el preconditionador de un nivel como

$$B^C = P_0 A_0 P_0^T + \sum_{i=1}^k P_i A_i P_i^T, \quad (3.4)$$

donde el segundo término del lado derecho es el preconditionador de un nivel, mientras que el primero corresponde a la corrección dada por la malla gruesa. Donde dada la malla gruesa con parámetro de malla H , P_0 y P_0^T son los operadores de prolongación y restricción relativos a la malla gruesa, A_0 es la matriz de discretización de FBR del problema elíptico sobre la malla gruesa. Sustituyendo B en (3.1) y (3.4) se obtiene el algoritmo de dos niveles. A continuación se describe los detalles de la versión computacional del método de Schwarz de dos niveles.

Algorithm 1 Método aditivo de Schwarz de dos niveles para funciones de base radial

Definir las variables: ϵ , k y N_{max} .

Particionar Ω para obtener los subdominios Ω_i , $i = 1, \dots, k$.

Formar las zonas de traslape e iniciar en cero las fronteras artificiales

while iteracion < N_{max} o criterio de paro **do**

1.- Resolver la EDP en la malla fina mediante Schwarz aditivo

2.- Conformar los lados derechos de las EDP, f_c en la malla gruesa aplicando $\mathcal{L}u_c = f_c$.

3.- Resolver la EDP en la malla gruesa.

4.- Actualizar los valores en la malla fina $u \in \Gamma_i$ con la solución de la malla gruesa.

end while

El criterio de paro para el algoritmo propuesto está dado por

$$\|u^{k+1} - u^k\|_\infty < \epsilon,$$

donde ϵ es la tolerancia fijada por el usuario, el criterio de paro considera solamente los nodos que están en las fronteras artificiales. Cuando el rango de la solución se encuentra fuera del intervalo $(0, 1)$, es recomendable usar el error relativo. En los ejemplos numéricos se emplea $\epsilon = 10^{-3}$. Como de costumbre, en un algoritmo iterativo se incorpora un número máximo de iteraciones N_{max} para evitar un ciclo infinito.

El primer paso del Algoritmo 1, corresponde a un paso del clásico método aditivo de Schwarz. El segundo, basado en la solución actual en cada subdominio, específicamente para $\lambda_{i=1}^k$, se construye el lado derecho f_c de la EDP sobre la malla gruesa. La meta es mejorar aplicando un operador lineal diferencial \mathcal{L} sobre las funciones de base radial en cada subdominio

$$f_c(x) := \sum_{j=1}^{N^i} \lambda_j^i \mathcal{L}\phi(\|x - x_j^i\|), \quad \text{for } x \in \Omega_i, \quad (3.5)$$

donde se ha omitido el polinomio $p(x)$ para mayor claridad. El nodo x pertenece a la distribución de nodos de la malla gruesa Ω_c y está contenido en la región de uno o más subdominios. En el último caso, se compone sutilmente el lado derecho f_c mediante un promedio de los resultados calculados. Es importante hacer notar que los valores de $f_c(x)$ cambia con los resultados de la actualización en cada iteración del algoritmo.

Una vez que se construye el lado derecho f_c de la EDP, los valores de la frontera real en $\partial\Omega_c$ se incorporan en el tercer paso del algoritmo a fin de resolver la EDP en la malla gruesa. Basado en la solución u_c , obtenida de la malla gruesa, se actualizan los valores de las fronteras artificiales de cada subdominio. El proceso se realiza fácilmente usando (3.5) correspondiente a la malla gruesa e interpolando en los nodos de las fronteras artificiales en la malla fina.

4. Ejemplos numéricos

En esta sección mostraremos dos experimentos numéricos para ver el funcionamiento del enfoque de dos niveles propuesto versus el método clásico aditivo de Schwarz, en concreto vamos a estudiar la escalabilidad de la formulación de dos niveles.

En los ejemplos numéricos se ha usado de manera exclusiva el kernel spline placa delgada dada en la tabla 1 con $k = 2$, los elementos del polinomio base son seis con grado a lo más dos. El error numérico reportado fue calculado sobre todo el dominio $\bar{\Omega}$ bajo la norma $\|\cdot\|_\infty$. En todas las comparaciones numéricas se usó la misma región de traslape de dos nodos en cada dirección sobre los subdominios.

4.1. Ejemplo 1

Como primer ejemplo, se considera el siguiente problema de Poisson en dos dimensiones

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} &= f(x, y), \quad \text{in } \Omega = (0, 1)^2, \\ u(x, y) &= g(x, y), \quad \text{on } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (4.1)$$

las condiciones de frontera Dirichlet se definen por

$$\begin{aligned} g(0, y) &= \frac{5}{48} + \frac{1}{12} \cos(5.4y), & g(1, y) &= \frac{1}{24} + \frac{1}{30} \cos(5.4y), \\ g(x, 0) &= \frac{2.25}{6 + 6(3x - 1)^2}, & g(x, 1) &= \frac{1.884692}{6 + 6(3x - 1)^2}. \end{aligned}$$

El lado derecho de la EDP está determinado mediante la solución analítica

$$u(x, y) = \frac{\frac{5}{4} + \cos(5.4y)}{6 + 6(3x - 1)^2}.$$

La primer meta, consiste en dos experimentos numéricos, para verificar los efectos producidos en la variación de la región de traslape y el incremento del número de subdominios para el método de Schwarz de un nivel. Además, se compara el método de Schwarz de dos niveles versus el método de un nivel, ambos enfoques basados en la formulación de FBR. En todo este trabajo se usa una malla Cartesiana tanto para la malla fina como para la malla gruesa.

En la tabla 2 se verifica que cuando el diámetro de la región de traslape crece, el número de iteraciones decrece. Este resultado es bien conocido dentro del contexto de los métodos clásicos y aquí esto se verifica para el método de colocación asimétrico FBR. Cabe señalar que los resultados de esta tabla, en lo que se refiere al error, éste muestra un comportamiento oscilatorio. Precisamente en [39] sucede algo similar. No obstante, sería importante justificar si es algo inherente al algoritmo o a la EDP, situación que queda fuera del propósito de este artículo.

En la tabla 3 se verifica que para el algoritmo de Schwarz de un nivel, cómo el número de subdominios aumenta para un diámetro de traslape fijo, el número de iteraciones crece y claramente se observa el deterioro de la solución numérica. Esto es una verificación numérica de que este algoritmo no es escalable.

En la tabla 4 se muestra claramente que usando el método de Schwarz de dos niveles, Algoritmo 1, es escalable. Esto es, cuando el número de subdominios crece no lo hace el número de iteraciones ni el error se deteriora. Este hecho es de fundamental importancia para problemas en paralelo de gran escala, pues el número de subdominios crece, el tiempo de CPU permanece casi constante, mientras el error no se deteriora sustancialmente.

$n \times n$	$k \times k$	d	Error	Iteraciones
7×7	2×2	2	0.00740	17
		4	0.00412	16
13×13	2×2	2	0.00853	22
		4	0.00416	17
		6	0.00291	16
		8	0.00281	15
19×19	2×2	10	0.00255	15
		2	0.01118	26
		4	0.00590	19
		6	0.00375	17
		8	0.00308	16
		10	0.00245	16
25×25	2×2	12	0.00283	15
		14	0.00250	15
		16	0.00299	14
		8	0.00357	17

Tabla 2: Resultados numéricos al variar el tamaño de traslape.

$n \times n$	$k \times k$	d	Error	Iteraciones
49×49	2×2	2	0.02899	34
		3	0.03078	55
		4	0.04334	59
		8	0.07520	77
		12	0.09810	91
		16	0.12203	102

Tabla 3: Resultados numéricos al aumentar el número de subdominios.

M. Fina	M. Gruesa	Subdominios	d	Iter 1N	Iter 2N	Error
49×49	25×25	2×2	2	47	26	0.01862
	25×25	3×3	2	70	36	0.01963
	13×13	4×4	2	104	20	0.01772
	25×25	8×8	2	246	30	0.01465
	13×13	12×12	2	175	35	0.05719
	17×17	16×16	2	262	31	0.05874

Tabla 4: Resultados numéricos al variar el número de subdominios con la incorporación de una malla gruesa, ejemplo 1.

Para completar el análisis de este ejemplo, en la Figura 1 se muestra la gráfica de las columnas cuatro y cinco de la Tabla 4. Esto corresponde al número de iteraciones para los esquemas de Schwarz de uno y dos niveles. Se debería observar en la Fig. 1 que el número de iteraciones del algoritmo de dos niveles permanece casi constante, a diferencia del método de Schwarz de un nivel. Notar que para 16×16 subdominios, los últimos puntos en la gráfica, el enfoque propuesto de Schwarz de dos niveles tiene una eficiencia de 88% en el número de iteraciones, en comparación con el método clásico de Schwarz.

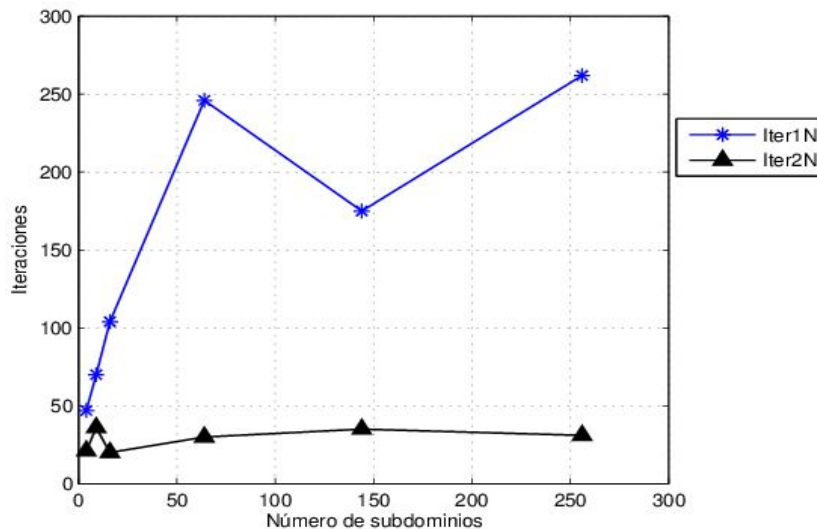


Figura 1: Comparación de iteraciones de la tabla 4.

4.2. Ejemplo 2

Como segundo ejemplo, se tiene el siguiente problema elíptico semi-lineal

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} - u(x, y) &= 0, \quad \text{en } \Omega = (0, 1)^2, \\ u(x, y) &= g(x, y), \quad \text{on } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde las condiciones de frontera están dadas por la solución analítica $u(x, y) = xe^y$. Esta ecuación también fue usada en [39].

En la tabla 5, se muestran los resultados del método clásico de Schwarz y el Schwarz de dos niveles. En la primera columna, se trata del número de nodos de la malla fina, en la segunda y tercera columna se detalla la variación de la malla gruesa y el número de subdominios respectivamente. El número de iteraciones del método clásico de Schwarz está en la cuarta columna. Los resultados obtenidos con el esquema propuesto son mostrados en la columna cinco. La última columna corresponde a la medida del error en la malla fina.

M. Fina	M. Gruesa	Dominios	Iter 1N	Iter 2N	Error
49 × 49	25 × 25	2 × 2	121	63	0.01319
	25 × 25	3 × 3	146	74	0.01779
	13 × 13	4 × 4	209	51	0.01485
	25 × 25	8 × 8	358	99	0.03671
	13 × 13	12 × 12	504	40	0.06275
	17 × 17	16 × 16	683	66	0.08931

Tabla 5: Resultados numéricos al variar el número de subdominios del ejemplo 2.

Para una exposición clara, en la Figura 2 se muestra el número de iteraciones para los esquemas de uno y dos niveles tomados de la tabla 5. Puede observarse que el número de iteraciones del algoritmo de dos niveles mantiene el mismo orden de magnitud. De otra manera, con el método aditivo de Schwarz de un nivel el número de iteraciones crece dramáticamente, como se esperaba. Es importante hacer notar que la última fila en la tabla 5, que para 16×16 subdominios en enfoque de dos niveles tiene una eficiencia de 90% en el número de iteraciones, en comparación con el método clásico de Schwarz.

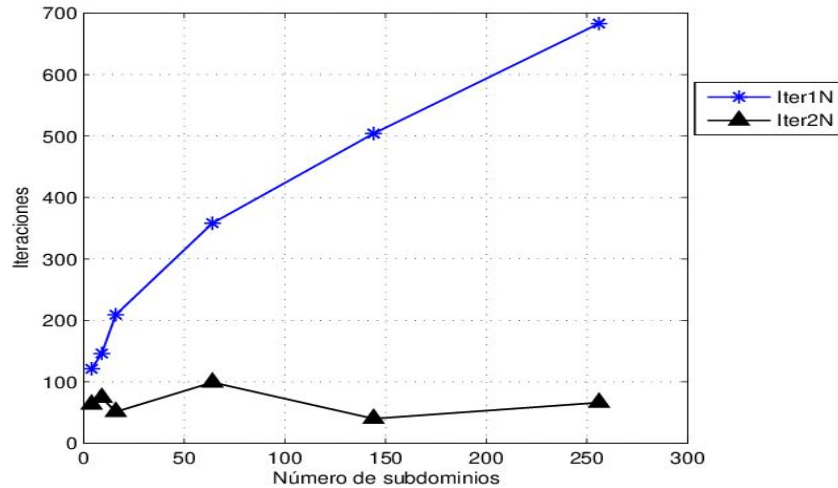


Figura 2: Comparativo de iteraciones de la tabla 5.

En este ejemplo se verifica que para un problema elíptico semi-lineal la escalabilidad se cumple. Se nota, como se esperaba, en este caso el número de iteraciones crece más rápido que en el ejemplo anterior. Como antes, el error se mantiene en el mismo orden de magnitud.

5. Conclusiones

En este artículo se introdujo el método de descomposición de dominio de dos niveles de Schwarz para funciones de base radial con el esquema de colocación. El principal objetivo fue mostrar numéricamente la escalabilidad del método de FBR de dos niveles, para el enfoque de Kansas, usando una corrección de malla gruesa.

Las corridas numéricas se llevaron a cabo para dos problemas elípticos en dos dimensiones. Estos ejemplos mostraron claramente que no solo se redujo el número de iteraciones, sino que el máximo error mantiene la misma magnitud. Así se verificó numéricamente la escalabilidad de este método. Específicamente, para el primer caso el número de iteraciones fue reducido en un 88 % mientras que en el segundo caso fue de un 90 %.

Es preciso señalar que este nuevo algoritmo incrementó considerablemente el rendimiento del esquema en comparación con el esquema de Schwarz de un nivel mediante FBR.

Es decir, el método hace que sea posible resolver los problemas con un gran número de nodos de una manera práctica y eficiente. También vale la pena mencionar que, si bien a través de este trabajo con subdominios cartesianos, el método de dos niveles de Schwarz con FBR propuesto puede ser extendido a las distribuciones de nodos dispersos con dominios irregulares.

Referencias

- [1] E. J. Kansa A. H. D. Cheng, M. A. Golberg and G. Zammito. Exponential convergence and h-c multiquadric collocation method for partial differential equations. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 19:571–594, 2003.
- [2] T. S. Li S. L. Chung A. S. M. Wong, Y. C. Hon and E. J. Kansa. Multizone decomposition for simulation of time-dependent problems using the multiquadric scheme. *Numerical Methods Partial Differential Equations*, 37:23–43, 1999.

- [3] M. D. Buhmann. *Radial basis functions*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [4] Martin D. Buhmann. *Radial Basis Functions: Theory and Implementations*. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, 2003.
- [5] P. P. Chinchapatnam, K. Djidjeli, and P.B. Nair. Unsymmetric and symmetric meshless schemes for the unsteady convection-diffusion equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:2432–2453, 2006.
- [6] P. P. Chinchapatnam, K. Djidjeli, and Prasanth B. Nair. Domain decomposition for time-dependent problems using radial based meshless methods. *Numerical Methods Partial Differential Equations*, 23:38–59, 2007.
- [7] C. Y. Lin C. L. Chiu D. L. Young, S. C. Jane and K. C. Chen. Solution of 2d and 3d stokes laws using multiquadric mehtod. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 28:1223–1243, 2004.
- [8] G. E. Fasshauer. *Solving differential equations by collocation with radial basis functions*. A. Le Mehaute, C. Rabut, L. Schumaker, editors, Surface Fitting Multiresolution Methods, Vanderbilt University, Nashville, Tennessee, United States, 1997.
- [9] G. E. Fasshauer. *Meshfree approximation methods with Matlab*. World Scientific Publishers, Singapore, 2007.
- [10] M. A. Golberg and C. S. Chen. The theory of radial basis functions applied to the bem for inhomogeneous partial differential equations. *Boundary Elements Communications*, 5:57–61, 1994.
- [11] M. A. Golberg and C. S. Chen. *Boundary Integral Methods - Numerical and Mathematical Aspects, chapter The method of fundamental solutions for potential, Helmholtz and diffusion problems*. WIT Press, pp. 103-176, 1998.
- [12] F. J. Hickernell and Y. C. Hon. Radial basis function approximation of the surface wind field from scattered data. *International Journal of Applied Science and Computations*, 4:221–247, 1998.
- [13] Y. C. Hon. A quasi-radial basis functions method for american options pricing. *Computers and Mathematics with Applications*, 43:513–524, 2002.
- [14] Yiu-Chung Hon and X. Z. Mao. A multiquadric interpolation method for solving initial value problems. *Journal of Scientific Computing*, 12:51–55, 1997.
- [15] Yiu-Chung Hon and X. Z. Mao. An efficient numerical scheme for Burger’s equation. *Applied Mathematics and Computation*, 95:37–50, 1998.
- [16] Yiu-Chung Hon and X. Z. Mao. A radial basis function method for solving options pricing models. *Financial Engineering*, 8:31–49, 1999.
- [17] Yiu-Chung Hon and X. Z. Mao. An analysis of the linear advection-diffusion equation using mesh-free and mesh-dependent methods. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 26:889–895, 2002.
- [18] P. González-Casanova J. A. Muñoz Gómez and G. Rodríguez-Gómez. *Domain decomposition by radial basis functions for time dependent partial differential equations*. S. Sahni, editor, Proceedings of the 2nd IASTED International Conference on Advances in Computer Science and Technology, Puerto Vallarta, Mexico, ACTA Press, pp. 105-109, 2006.
- [19] Darrel Pepper Jichun Li, C. S. Chen and Yitung Chen. Mesh-free method for groundwater modeling. *Boundary Elements XXIV, pp 115-124*, pages 115–124, 2002.
- [20] E. J. Kansa. Multiquadrics - a scattered data aproximation scheme with applications to computational fluid dynamics - I: Surface approximations and partial derivative estimaes. *Computers and Mathematics with Applications*, 19:127–145, 1990.
- [21] E. J. Kansa. Multiquadrics - a scattered data aproximation scheme with applications to computational fluid dynamics - II: Solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial diferential equations. *Computers and Mathematics with Applications*, 19:147–161, 1990.

- [22] J. Li and C. S. Chen. Some observations on unsymmetric radial basis function collocation methods for convection-diffusion problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57:1085–1094, 2003.
- [23] J. Li and Y. C. Hon. Domain decomposition for radial basis meshless methods. *Numerical Methods Partial Differential Equations*, 20:450–462, 2004.
- [24] L. Ling and E. J. Kansa. Preconditioning for radial basis functions with domain decomposition methods. *Mathematical and Computer Modelling*, 40:1413–1427, 2004.
- [25] E. J. Kansa M. Sharan and S. Gupta. Applications of the multiquadric method for numerical solutions of elliptic partial differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, 84:275–302, 1997.
- [26] K. Djidjeli M. Zerroukat and A. Charafi. Explicit and implicit meshless methods for linear advection-diffusion-type partial differential equations. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 48:19–35, 2000.
- [27] K. Djidjeli M. Zerroukat and A. Charafi. Explicit and implicit meshless methods for linear advection-diffusion-type partial differential equations. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 48:19–35, 2000.
- [28] Y. C. Hon S. M. Wong and M. A. Golberg. Compactly supported radial basis functions for shallow water equations. *Applied Mathematics and Computation*, 127:79–101, 2002.
- [29] R. Schaback. Error estimates and condition numbers for radial basis function interpolation. *Advances in Computational Mathematics*, 3:251–264, 1995.
- [30] C. Shu. *Differential quadrature and its application in engineering*. Springer-Verlag. London, 2000.
- [31] H. Wendland. Meshless Galerkin methods using radial basis functions. *Mathematics of Computation*, 68:1521–1531, 1999.
- [32] H. Wendland. *Scattered Data Approximation*. Cambridge University Press, 2005.
- [33] Z. Wu and Y. C. Hon. Additive Schwarz domain decomposition with radial basis approximation. *International Journal of Applied Mathematics*, 4:81–98, 2000.
- [34] W. M. Xue Y. C. Hon, M. W. Lu and X. Zhou. Numerical algorithm for triphasic model of charged and hydrated soft tissues. *Computational Mechanics*, 29:1–15, 2002.
- [35] T. Yamada and L. C. Wrobel. Properties of gaussian radial basis functions in the dual reciprocity boundary element method. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 44:1054–1067, 1993.
- [36] W. M. Xue Yiu-Chung Hon, M. W. Lu and Y. M. Zhu. Multiquadric method for the numerical solution of a byphasic mixture model. *Applied Mathematics and Computation*, 88:153–175, 1997.
- [37] Xian-Zhong Mao Yiu-Chung Hon, Kwok Fai Cheung and Edward J. Kansa. Multiquadric solution for shallow water equations. *Journal of Hydraulic Engineering*, 125:524–533, 1999.
- [38] Y. Zhang and Y. Tan. Convergence of general meshless Schwarz method using radial basis functions. *Applied Numerical Mathematics*, 56:916–936, 2006.
- [39] X. Zhou, Y.C. Hon, and Jichun Li. Overlapping domain decomposition method by radial basis functions. *Applied numerical mathematics*, 44:241–255, 2003.