Abstraction & Application **9** (2013) 74 − 81 UADY

Sobre las funciones zeta y multizeta (I)

[a]Víctor Manuel Bautista Ancona, [b]José Alejandro Lara Rodríguez

Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán

[a]vbautista@uady.mx, [b]lrodri@uady.mx

Abstract

In this paper, we define the zeta and multizeta functions. For zeta functions, we describe some of their properties, analytic continuation, functional equation and the relationship of his zeroes with Bernoulli numbers. Also, we describe the properties of multizeta function and his close relationship with the original zeta function.

Resumen

En este artículo definimos las funciones zeta y multizeta. Para las funciones zeta describimos algunas de sus propiedades, su continuación analítica, su ecuación funcional y la relación de sus ceros con los números de Bernoulli. También, describimos la función multizeta y su cercana relación con la función zeta.

Keywords and phrases : Función zeta, función multizeta, continuación analítica, ceros de funciones, números de Bernoulli.

2010 *Mathematics Subject Classification* 11M06, 11M32, 11B68.

La función zeta de Riemann, y sus generalizaciones en diversos contextos, son algunas de las funciones más importantes en la teoría de números; en particular, los valores de la función zeta en argumentos enteros parecen dictar las propiedades más importantes de los objetos a los cuales están asociados. En este artículo se introduce la función zeta de una variable y su generalización a r variables, denominada función multizeta, y se muestran algunas de la las relaciones algebraicas que existen entre los valores $\zeta(s_1, \ldots, s_r)$ de estas funciones. Los valores de las funciones zeta cuando $r = 1, 2$, fueron estudiados originalmente por L. Euler. A manera de ejemplo de estas relaciones algebraicas, mencionamos la relación $\zeta(3) = \zeta(2, 1)$ descubierta por L. Euler. En [Zag94], D. Zagier define y estudia la función multizeta para cualquier número de variables.

1. Euler y la función zeta

La serie de Dirichlet

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \tag{1.1}$$

converge si $s > 1$ y diverge si $s \leq 1$. El trabajo de Euler empezó alrededor de 1730 con aproximaciones al valor de $\zeta(2)$.

Euler trabajó con la función modificada

$$\zeta^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-s} = \left(1 - 2^{1-s}\right) \zeta(s).$$

Haciendo $s = 0$ en la suma para $\zeta^*(s)$ *formalmente* obtenemos $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$; Euler, sin miedo de tal serie divergente, realizó lo siguiente:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 \cdots + x^n + \cdots,$$

y así,

$$\frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 + \cdots = \zeta^*(0).$$

Para obtener los valores de $\zeta^*(s)$ en los otros enteros positivos, Euler aplicó repetidamente el operador $x\frac{d}{dx}$ a $\frac{1}{1-x}$ y evaluó en $x = -1$. Por ejemplo,

$$\frac{1}{4} = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 + \cdots,$$

lo maravilloso de todo esto es que, Euler encontró *exactamente* los valores Riemann que obtuvo rigurosamente muchos años después vía el análisis complejo.

Habiendo calculado los valores de $\zeta(s)$ (y de aquí, los de $\zeta^*(s)$) en los enteros positivos, Euler encontró (alrededor de 1749) que para valores pequeños $n \geq 2$, uno tiene

$$\frac{\zeta^*(1-n)}{\zeta^*(n)} = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+1}(2^n-1)(n-1)!}{(2^{n-1}-1)\pi^n} & \text{si } n \text{ es par,} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Usando las funciones gamma $\Gamma(s)$ y coseno, Euler conjeturó que

$$\frac{\zeta^*(1-s)}{\zeta^*(s)} = -\frac{-\Gamma(s)(2^s-1)\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)}{(2^{s-1}-1)\pi^s},$$

lo cual marca el original descubrimiento de la ecuación funcional para $\zeta(s)$. Para más detalles ver [Ay74].

2. Riemann, la continuación analítica y la ecuación funcional

Riemann toma como punto de inicio la fórmula

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \tag{2.1}$$

donde el producto infinito se toma sobre todos los números primos. Esta fórmula, la cual es ahora conocida como la *fórmula del producto de Euler*, aparece por primera vez en el libro de L. Euler publicado en 1748 y que lleva por título *Introductio in Analysin Infinitorum*. Esta fórmula muestra cómo la función zeta codifica información relativa a los números enteros y la distribución de los números primos.

El desarrollo del análisis complejo fue uno de los intereses conocidos de Riemann y por lo tanto, no es de sorprenderse que al principio Riemann considerara a s como una variable compleja. De hecho, es fácil mostrar que ambos lados de la fórmula del producto de Euler convergen para s compleja en el semiplano $\mathbb{R}e(s) > 1$, pero Riemann fue mucho más allá y mostró que ambos lados de (2.1) divergen para otros valores de s, entonces la función definida tiene sentido para *todos* los valores de s excepto por un polo en $s = 1$. Esta extensión del rango de s requiere unos pocos hechos acerca de la función factorial la cual no hablaremos aquí (el lector interesado puede consultar [Ed74]).

La *función zeta de Riemann* es la continuación analítica de la serie de Dirichlet (1.1) a todo el plano complejo menos el punto $s = 1$. En particular, para $\mathbb{R}e\,(s) > 1$, la función zeta de Riemann está definida por

$$\zeta(s) = \zeta_{\mathbb{Z}}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}.$$

Es interesante notar que Riemann nunca habla de "continuación analítica" de la función $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ más allá del semiplano $\mathbb{R}e\,(s) > 1$, pero habla de hallar una fórmula la cual "permanece válida para toda s". Esto indica que él vió el problema en términos de una función factorial que como una extensión pedazo a pedazo de la función en la manera en como la continuación analítica se hace hoy en día.

Como mencionamos antes, Euler tenía una prueba empírica de la ecuación funcional para la función zeta, y es enteramente posible que Riemann la encontrara en el trabajo de Euler. Sin embargo, Riemann es el primero en dar una prueba rigurosa de una forma ligeramente distinta a la dada por Euler.

Teorema 2.1 *(Riemann) La función zeta $\zeta\,(s)$ es analítica en todo el plano complejo excepto en su polo simple $s = 1$ con residuo 1. Y además, satisface la ecuación funcional*

$$\zeta\,(s) = 2^s \pi^{s-1} sen\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma\,(1-s)\,\zeta\,(1-s)\,.$$

En la ecuación funcional, uno puede multiplicar por $s\,(s-1)$ para eliminar el polo en $s = 1$, respetando la simetría, entonces si uno introduce la función zeta extendida

$$\xi\,(s) = \frac{1}{2} s\,(s-1)\,\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta\,(s)\,,$$

(el factor $\frac{1}{2}$ está únicamente en esta expresión por razones históricas porque Riemann en su memoria utilizó la función $\Pi\,(s) = \Gamma\,(s-1)$), la ecuación funcional se convierte

$$\xi\,(s) = \xi\,(s-1)\,.$$

La ecuación ξ es una función entera de orden 1 cuyos ceros son los ceros de ζ excepto por los triviales. Dado que $\xi\,(s)$ es no cero cuando $\mathbb{R}e\,(s) > 1$, la función no se anula para $\mathbb{R}e\,(s) < 0$, así que todos los ceros se mantienen el la franja crítica $0 \leq \mathbb{R}e\,(s) \leq 1$.

3. Los números de Bernoulli y los ceros de la función zeta

En la actualidad, las fórmulas

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + n &= \frac{n\,(n+1)}{2}, \\ 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 &= \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}, \\ 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 &= \frac{n^2\,(n+1)^2}{4} \end{aligned}$$

son conocidas. Pero fue en 1631, cuando Johann Faulhaber (conocido en sus días como *El Gran Aritmético de Ulm*) publicó su libro *Academia Algebra* donde exhibe una fórmula para la suma de las potencias mayores:

$$1^{k-1} + 2^{k-1} + \cdots + n^{k-1} = \frac{1}{k}\left[n^k + \binom{k}{1} n^{k-1} \times \frac{1}{2} + \binom{k}{2} n^{k-2} \times \frac{1}{6} + \binom{k}{3} n^{k-3} \times 0 + \binom{k}{4} n^{k-4} \times \frac{-1}{30} + \cdots\right].$$

Observe que la expresión entre corchetes es exactamente como la fórmula binomial, excepto que no tiene término constante y los otros términos son multiplicados por ciertas constantes:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{6},\ 0,\ \frac{-1}{30},\ 0,\ \frac{1}{42},\ 0,\ \frac{-1}{30},\ \frac{5}{66},\ 0, \ldots$$

Estas constantes en la fórmula de Faulhaber son conocidos como los números de Bernoulli, dado que ellos fueron intensamente discutidos por Jacob Bernoulli en su famoso *Ars Conjectandi*, publicado en Basel en el año 1713, donde Bernoulli le dá todo el crédito a Faulhaber.

A continuación, definimos los números de Bernoulli.

Definición 3.1 *Para cada número complejo x, definimos la función $B_n(x)$ por la ecuación*

$$\frac{ze^{xz}}{e^z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(x)}{n!}z^n,$$

en donde $|z|<2\pi$. Las funciones $B_n(x)$ son llamadas polinomios de Bernoulli. *Los* números de Bernoulli *$B_k=B_k(0)$ son definidos por la ecuación*

$$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{n\geq 0}B_k\frac{x^k}{k!}.$$

Entonces tenemos que $B_0=1, B_1=-\frac{1}{2}$ y $B_{2n+1}=0$ para $n\geq 1$. Los primeros valores de los números de Bernoulli son

$$B_2=\frac{1}{6},\qquad B_4=-\frac{1}{30},\qquad B_6=\frac{1}{42},\qquad B_8=-\frac{1}{30},\qquad B_{10}=\frac{5}{66},\qquad B_{12}=-\frac{691}{2730}.$$

Observemos que

$$\zeta(1-n)=(-1)^{n-1}\frac{B_n}{n}.$$

De aquí, $\zeta(1-n)=0$ para $n\geq 3$ impares y para n par tenemos

$$\zeta(1-n)=-\frac{B_n}{n}\in\mathbb{Q}.$$

En particular,

$$\zeta(0)=-\frac{1}{2},\qquad \zeta(-1)=-\frac{1}{12},\qquad \zeta(-3)=\frac{1}{120},\qquad \zeta(-5)=-\frac{1}{252},\qquad \zeta(-7)=\frac{1}{240}$$

y $\zeta(-2k)=0$ para $k\geq 1$. Estos son conocidos como los *ceros triviales* de la función zeta ζ. Hacemos notar que estos ceros triviales viven en la línea real.

4. La hipótesis de Riemann

Es conocido que todo numero natural se puede escribir como un producto de números primos, por ejemplo $36=2^2\cdot 3^2$. Este hecho se conoce como el Teorema Fundamental de la Aritmética. Es importante mencionar que los números primos están presentes en nuestra vida diaria. Por ejemplo, cada vez que visitamos una página web, nos conectamos a cualquier red social, realizamos compras en línea o transacciones bancarias, estamos usando los números primos para mantener nuestra información privada. El principio que se usa es simple: es más fácil multiplicar números que factorizarlos. Escribir un número de 1000 dígitos como un producto de primos parece ser algo que está fuera del alcance de las tecnologías actuales. La seguridad de los algunos métodos actuales de cifrado depende precisamente de que no existen métodos computacionalmente eficientes para factorizar números grandes.

Dado que los números primos son los bloques de construcción de los enteros, es natural preguntarse como están los distribuidos los números primos entre los enteros. Al respecto se tiene

> "There are two facts about the distribution of prime numbers. The first is that, despite their simple definition and role as the building blocks of the natural number, the prime numbers belong to the most arbitrary and ornery objects studied by mathematicians: they grow like weeds among the natural numbers, seeming to obey no other law than that of chance, and nobody can predict where the next one will sprout. The second fact is even more astonishing, for it states just the opposite: that the prime numbers exhibit stunning regularity, that there are laws governing their behavior, and that they obey these laws with almost military precision."
>
> —Don Zagier[Zagier75]

En español dice más o menos lo siguiente:

> "Hay dos hechos sorprendentes acerca de la distribución de los números primos. El primero es que, a pesar de su definición tan simple y su papel como los bloques a partir de los cuales se construyen los números naturales, son los objetos más arbitrarios y engañosos estudiados por los matemáticos: crecen como hierba entre los números naturales, y parece que no obedecen ninguna ley excepto a la casualidad, y nadie puede predecir donde brotará el siguiente número primo. El segundo hecho es aún más increíble, porque es exactamente opuesto al primero: los números primos exhiben una regularidad impresionante así que hay leyes que gobiernan su comportamiento, y que obedecen a estas leyes con precisión casi militar".
>
> —Don Zagier[Zagier75]

El matemático Alemán G.F.B. Riemann (1826-1866) observó que la frecuencia de los números primos está íntimamente relacionada con el comportamiento de la ahora llamada función zeta. La conexión de la función zeta de Riemann con los números primos queda de manifiesto en la Ecuación 2.1 conocida como *Producto de Euler*. Aparte de los ceros triviales de la función zeta en los enteros negativos pares, que pertenecen todos a la recta real, hay otros ceros, llamados *ceros no triviales*. Riemann formuló la siguiente conjetura:

Hipótesis de Riemann. Los ceros no triviales de $\zeta(s)$ son de la forma $\frac{1}{2}+i\alpha$, es decir, están sobre la recta $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$.

La *Hipótesis de Riemann*, que es el problema no resuelto más famoso en teoría de números, da una respuesta muy precisa a la pregunta de cómo están distribuidos los números primos.

Para los enteros pares positivos m se tiene el Teorema de Euler

$$\zeta(m) = -\frac{B_m(2\pi i)^m}{2(m!)}.$$

Hasta la fecha no se conoce una fórmula para $\zeta(2k+1)$ análoga a la anterior. Gracias a R. Apéry [Apé79] se sabe que $\zeta(3)$ es irracional. En general, no se sabe si $\zeta(2k+1)$ es un número racional o irracional. En 2001, K. Ball y T. Rivoal probaron que hay una infinidad de valores irracionales de la función zeta de Riemann en los números impares [BR01]. En 2002, T. Rivoal probó que al menos uno de los nueve números $\zeta(5),\zeta(7),\ldots,\zeta(21)$ es irracional [Riv02].

5. Euler y la función multizeta

L. Euler trató sin éxito de encontrar una fórmula explícita para $\zeta(3)$. Durante este proceso aparecieron las *zetas dobles* también llamadas ahora valores multizeta. Antes de definir las zetas dobles o más generalmente, las funciones multizeta, recordemos la notación de sumas iteradas. Sean $f_1,\ldots,f_r$ funciones definidas en números enteros. Entonces

$$\sum_{N>n_1>\cdots>n_r>0} f_1(n_1)\cdots f_r(n_r)$$

se define de manera iterativa como sigue:

$$\sum_{N>n_1>\cdots>n_r>0} f_1(n_1)\cdots f_r(n_r) = \sum_{N>n_1>0} f_1(n_1) \sum_{n_1>n_2>\cdots>n_r>0} f_2(n_2)\cdots f_r(n_r).$$

Por ejemplo, si $a, b \in \mathbb{Z}_+$, y $f_1(n) = 1/n^a$ y $f_2(n) = 1/n^b$, entonces

$$\sum_{5>n_1>n_2>0} \frac{1}{n_1^a n_2^b} = \sum_{5>n_1>n_2>0} f_1(n_1) f_2(n_2) = \sum_{n_1=1}^{4} \frac{1}{n_1^a} \sum_{n_1>n_2>0} \frac{1}{n_2^b} = \sum_{n_1=1}^{4} \sum_{n_2=1}^{n_1-1} \frac{1}{n_1^a n_2^b}.$$

En 1775, aproximadamente 30 años después de que introdujo los valores zeta, L. Euler [Eul75] introduce las *zetas dobles*

$$\zeta(s_1, s_2) = \sum_{n_1>n_2>0} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2}} \qquad (s_1, s_2 \in \mathbb{Z}, s_1 > 1, s_2 > 0).$$

La condición $s_1 > 1$ es necesaria para la convergencia de la serie. Euler estudió por muchos años esta nueva serie y descubrió algunas identidades, tales como $\zeta(3) = \zeta(2, 1)$ y

$$\zeta(s, 1) + \zeta(s-1, 2) + \cdots + \zeta(2, s-1) = \zeta(s+1).$$

En 1992 [Zag94], D. Zagier generaliza de manera natural la función zeta en dos variables. Sean $s_1, \ldots, s_r$ enteros positivos con $s_1 > 1$. El valor zeta múltiple o valor multizeta $\zeta(s_1, \ldots, s_r)$ de peso $s_1 + \cdots + s_r$ y longitud r asociado con la r-ada $(s_1, \ldots, s_r)$ está dado por

$$\zeta(s_1, \ldots, s_r) = \sum_{n_1>n_2>\cdots>n_r>0} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \cdots n_r^{s_r}}.$$

Igual que antes, la condición $s_1 > 1$ se requiere para garantizar la convergencia de la serie. Cuando $r = 1$, tenemos el valor zeta clásico, de tal manera que los valores multizeta son una generalización de los valores zeta.

En 1949, F. V. Atkinson [Atk49] prueba la continuación analítica de la función zeta en dos variables. En 2000, J. Zhao [Zha00] prueba que en la región

$$\{(s_1, \ldots, s_r) \mid \mathrm{Re}(s_1) > 1, \sum_{i=1}^{r} \mathrm{Re}(s_i) > r\}$$

la función multizeta de longitud r es absolutamente convergente. En ese mismo artículo J. Zhao prueba que esta función se extiende por continuación analítica a una función meromorfa en todo $\mathbb{C}^r$, con posibles polos en $s_1 = 1$. En 2001, S. Akiyama y otros [AET01] presentan otra prueba de la continuación analítica de la función multizeta de longitud r.

Por valor multizeta $\zeta(s_1, \ldots, s_r)$ nos referimos a la función multizeta evaluada en $(s_1, \ldots, s_r)$. Los valores multizeta surgen de manera natural al multiplicar dos valores zeta. Recordemos que el producto de Cauchy de dos series convergentes, es convergente, si al menos una de las dos series converge absolutamente. La serie que define a un valor zeta es absolutamente convergente si $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Dado que la serie que define a la función zeta de Riemann es absolutamente convergente para $\mathrm{Re}(s) > 1$, el producto $\zeta(a)\zeta(b)$ es una serie convergente y de hecho absolutamente convergente. Por lo tanto, cualquier reordenamiento del producto de las series converge y de hecho converge al producto de las series. De acuerdo con la definición de producto de Cauchy para series, tenemos

$$\zeta(a)\zeta(b) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^b} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a+b}} + \sum_{n_2>n_1>0} \frac{1}{n_1^a n_2^b} + \sum_{n_1>n_2>0} \frac{1}{n_1^a n_2^b}.$$

Por lo tanto, se sigue que

$$\zeta(a)\zeta(b) = \zeta(a+b) + \zeta(b,a) + \zeta(a,b). \tag{5.1}$$

De manera esquemática tenemos que el producto

$$\zeta(a)\zeta(b) = \left(\frac{1}{1^a} + \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \cdots\right)\left(\frac{1}{1^b} + \frac{1}{2^b} + \frac{1}{3^b} + \cdots\right)$$

da por resultado

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{1^a1^b} + \frac{1}{1^a2^b} + \frac{1}{1^a3^b} + \frac{1}{1^a4^b} + \frac{1}{1^a5^b} + \cdots \\
\frac{1}{2^a1^b} + \frac{1}{2^a2^b} + \frac{1}{2^a3^b} + \frac{1}{2^a4^b} + \frac{1}{2^a5^b} + \cdots \\
\frac{1}{3^a1^b} + \frac{1}{3^a2^b} + \frac{1}{3^a3^b} + \frac{1}{3^a4^b} + \frac{1}{3^a5^b} + \cdots \\
\frac{1}{4^a1^b} + \frac{1}{4^a2^b} + \frac{1}{4^a3^b} + \frac{1}{4^a4^b} + \frac{1}{4^a5^b} + \cdots \\
\frac{1}{5^a1^b} + \frac{1}{5^a2^b} + \frac{1}{5^a3^b} + \frac{1}{5^a4^b} + \frac{1}{5^a5^b} + \cdots \\
\cdots
\end{array}$$

La suma de los elementos en la diagonal, es decir, los sumandos de la forma $\frac{1}{n^a n^b}$ da por resultado $\zeta(a+b)$; los suma de todos los elementos que están por arriba de la diagonal, es decir, la suma de los elementos de la forma $\frac{1}{n_1^a n_2^b}$ con $n_1 < n_2$, da por resultado $\zeta(b,a)$. Finalmente, la suma de todos los elementos que están por debajo de la diagonal da $\zeta(a,b)$.

Sean n_1, n_2 enteros tales que $n_1 > n_2$. Dado otro entero n, se dan cinco posibilidades: $n > n_1 > n_2$, $n = n_1 > n_2$, $n_1 > n > n_2$, $n_1 > n = n_2$ y $n_1 > n_2 > n$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\zeta(a)\zeta(b,c) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \sum_{n_1>n_2>0} \frac{1}{n_1^b n_2^c} \\
&= \sum_{n>n_1>n_2} \frac{1}{n^a n_1^b n_2^c} + \sum_{n=n_1>n_2>0} \frac{1}{n_1^{a+b} n_2^c} + \sum_{n_1>n>n_2>0} \frac{1}{n_1^b n^a n_2^c} \\
&\quad + \sum_{n_1>n=n_2>0} \frac{1}{n_1^b n_2^{a+c}} + \sum_{n_1>n_2>n>0} \frac{1}{n_1^b n_2^c n^a}.
\end{aligned}$$

De esta manera llegamos a

$$\zeta(a)\zeta(b,c) = \zeta(a,b,c) + \zeta(a+b,c) + \zeta(b,a,c) + \zeta(b,a+c) + \zeta(b,c,a). \tag{5.2}$$

Nos referiremos a las sumas del tipo (5.1) o (5.2) como *sumas barajeadas clásicas.*

En general, el producto de dos valores multizeta es una $\mathbb{Z}$-combinación lineal de valores multizeta. Luego el $\mathbb{Q}$-espacio lineal generado por todos los valores multizeta es una $\mathbb{Z}$-álgebra.

En la actualidad sigue siendo de interés el problema de entender las relaciones algebraicas entre los valores multizeta. Además, éstos tienen ciertas conexiones con topología [LM95] y física [BK97]. Las relaciones algebraicas entre los valores multizeta se han estudiado ampliamente por J. Borwein y D. Zagier entre otros ([BBBL98], [Zag93], [Zag94]). El estudio sistemático de los valores multizeta está en sus etapas iniciales.

Referencias

[AET01] Shigeki Akiyama, Shigeki Egami, and Yoshio Tanigawa. Analytic continuation of multiple zeta-functions and their values at non-positive integers. *Acta Arith.*, 98(2):107–116, 2001.

[Apé79] Roger Apéry. Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$. *Astérisque*, 61:11–13, 1979.

[Atk49] Frederick Valentine Atkinson. The mean-value of the Riemann zeta function. *Acta Math.*, 81:353–376, 1949.

[Ay74] R. Ayoub. Euler and the Zeta Fucntion. *Amer. Math. Monthly*, 81(10):1067–1086, 1974.

[BR01] Keith Ball and Tanguy Rivoal. Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs. *Invent. Math.*, 146(1):193–207, 2001.

[BBBL98] Jonathan Michael Borwein, David M. Bradley, David J. Broadhurst, and Petr Lisoněk. Combinatorial aspects of multiple zeta values. *Electron. J. Combin.*, 5:Research Paper 38, 12 pp. (electronic), 1998.

[BK97] David J. Broadhurst and Dirk Kreimer. Association of multiple zeta values with positive knots via Feynman diagrams up to 9 loops. *Phys. Lett. B*, 393(3-4):403–412, 1997.

[Ed74] H.M. Edwards. Riemann's Zeta Function. *Academic Press*, 1974.

[Eul75] Leonard Euler. Meditationes circa singvlare seriervm genus. *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, 20:140–186, 1775.

[Knu93] Donald E. Knuth. Johan Falhaber and Sums of Powers. *Mathematics of Computation*, 61(203):277–294, 1993.

[LM95] Tu Quoc Thang Le and Jun Murakami. Kontsevich's integral for the Homfly polynomial and relations between values of multiple zeta functions. *Topology Appl.*, 62(2):193–206, 1995.

[Riv02] Tanguy Rivoal. Irrationalité d'au moins un des neuf nombres $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\ldots$, $\zeta(21)$. *Acta Arith.*, 103(2):157–167, 2002.

[Zagier75] Don Zagier. The first 50 million prime numbers. 1975.

[Zag93] Don Zagier. Periods of modular forms, traces of Hecke operators, and multiple zeta values. *Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku*, (843):162–170, 1993. Research into automorphic forms and L functions (Japanese) (Kyoto, 1992).

[Zag94] Don Zagier. Values of zeta functions and their applications. In *First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, 1992)*, volume 120 of *Progr. Math.*, pages 497–512. Birkhäuser, Basel, 1994.

[Zha00] Jianqiang Zhao. Analytic continuation of multiple zeta functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 128(5):1275–1283, 2000.