Abstraction & Application **13** (2015) 37 – 55 UADY

De la Geometría Riemanniana a los Espacios de Alexandrov II: Caminos de Longitud Mínima y el Teorema de Hopf-Rinow

[a]Waldemar Barrera Vargas, [b]Luis M. Montes de Oca Mena, [c]Matías Navarro Soza, [d]Didier A. Solis Gamboa

[a,b,c,d]Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán, México

[a]bvargas@correo.uady.mx, [b]mau19248@hotmail.com, [c]matias.navarro@correo.uady.mx, [d]didier.solis@correo.uady.mx

Resumen

Este es el segundo de tres artículos que pretende dar un panorama de los fundamentos de la teoría de espacios de Alexandrov teniendo como punto de partida conceptos clásicos de la geometría riemanniana. En esta ocasión se presentan los conceptos básicos relativos a la estructura geodésica de un espacio métrico de caminos. Asimismo, presentamos la demostración de dos resultados fundamentales: una versión del teorema de Arzela-Ascoli y la generalización del teorema de Hopf-Rinow en el contexto de los espacios métricos de caminos.

Abstract

This is the second paper in a series of three aimed to bring a panoramic view on the basics behind the theory of Alexandrov spaces. Our starting point and motivation is found on well known concepts and results that arise in classical Riemannian geometry. In this work we introduce the fundamentals on paths of minimal lenght in metric spaces and provide a glance on two of the most remarkable results in this scenario: the convergence theorem of Arzela-Ascoli and the completeness theorem of Hopf-Rinow.

Keywords and phrases : Estructuras por caminos, espacio métrico de caminos, métricas inducidas.

2010 *Mathematics Subject Classification* 53C21, 54E35.

1. Introducción

Un espacio métrico de caminos (X, d), es un espacio métrico cuya métrica coincide con la *métrica intrínseca inducida* $\hat{d}$ en el sentido de [1], y en tal caso diremos que la métrica d es intrínseca. A continuación recordaremos cómo se define la métrica $\hat{d}$. Si $\gamma : [a, b] \to X$ es un camino (una función continua) y $P = \{a = p_0 < p_1 < \cdots < p_n = b\}$ una partición del intervalo $[a, b]$, se denota

$$S(P, \gamma, d) = \sum_{k=1}^{n} d(\gamma(p_{k-1}), \gamma(p_k)).$$

De esta manera la longitud de γ es el número

$$L_d(\gamma) = \sup\{S(P, \gamma, d) : P \text{ es una partición de } [a, b]\}.$$

A la función L_d se le conoce como la *longitud de caminos inducida* por la métrica d. La función L_d da origen a una *estructura por caminos*, cuyas propiedades se describieron con detalle en [1, 9]. En particular, con base en L_d podemos definir la métrica intrínseca inducida $\hat{d}$ como

$$\hat{d}(x,y) = \text{ínf}\{L_d(\gamma) : \gamma \text{ conecta a } x \text{ con } y\}$$

para $x, y \in X$. En caso que no existan caminos que unen x con y se define $\hat{d}(x,y) = \infty$. De la definición, es claro ver que si la métrica es intrínseca, entonces la distancia $d(x,y)$ se puede aproximar mediante las longitudes de caminos que conectan x con y. En un espacio métrico de caminos cuya métrica es *estríctamente intrínseca* siempre exiten caminos que realizan la distancia entre puntos, es decir, para cada dos puntos x, y siempre existe un camino γ que los conecta y de tal forma que $d(x,y) = L_d(\gamma)$. En [9] se demuestra que es suficiente la existencia de puntos medios y la completez de un espacio métrico de caminos para garantizar que existen caminos que realizan la distancia entre puntos. En esta ocasión daremos otros criterios –más orientados a las propiedades topológicas del espacio– que garanticen la existencia de estos caminos. En particular, demostraremos que en todo espacio métrico de caminos localmente compacto, completo y con métrica finita existen caminos de longitud mínima que conectan cualquier pareja de puntos.

El estudio de curvas que minimizan localmente la distancia en una variedad conforma una parte medular en el desarrollo de la geometría riemanniana [7, 6]. Las propiedades de estas curvas – llamadas *geodésicas* en el contexto de la geometría riemanniana – permiten establecer una teoría de comparación, en la cual se analiza la variación de diversos objetos geométricos a lo largo de ellas con el fin de compararlos con los correspondientes objetos en espacios que por su simpleza y alto grado de simetría se consideran como modelos de distintos tipos de geometría. Esta técnica ha resultado fundamental para establecer diversos teoremas de estructura, donde condiciones sobre las geodésicas y la curvatura de una variedad son suficientes para determinar la estructura global de la misma [3, 4]. Como ejemplos notables de este fenómeno tenemos el Teorema de Myers, que establece que toda variedad riemanniana geodésicamente completa con curvatura de Ricci estrictamente acotada por abajo por cero es compacta y de grupo fundamental finito, y el Teorema de Toponogov, que establece que toda variedad riemanniana geodésicamente completa, con curvatura de Ricci no negativa y que posee una curva que minimiza distancia entre cualquiera de sus puntos es isométrica a un producto.

Debido a la estrecha relación que existe entre la métrica y la longitud de caminos, en el contexto de los espacios métricos de caminos surge de manera muy natural el concepto de geodésica y por tanto se derivan de él resultados análogos a los de la geometría riemanniana clásica y una teoría geométrica de comparación. Uno de los principales resultados en el ámbito de la geometria riemanniana que puede generalizarse a los espacios métricos de caminos es el célebre teorema de Hopf-Rinow. Dicho resultado establece una importante relación entre las estructuras métrica y geodésica de una variedad riemanniana (M, g), a saber, las geodésicas de (M, g) son completas –es decir, su máximo dominio de definición es toda la recta real– si y solo si el espacio métrico (M, d_g) es completo. En este trabajo trataremos con detalle y numerosos ejemplos los principales conceptos necesarios para definir las geodésicas en espacios métricos de caminos y exploraremos algunas condiciones que garantizan su existencia. En la sección 2 definiremos formalmente lo que constituye una curva que minimiza distancia en el ámbito de los espacios métricos de caminos y probaremos un resultado fundamental de convergencia de curvas: el Teorema de Arzela-Ascoli. Finalmente, en la sección 3 daremos la demostración de la versión del teorema de Hopf-Rinow para espacios métricos de caminos. En las referencias [2, 11] – y especialmente en [1]– así como en el primer artículo de esta serie [9] se pueden encontrar las definiciones y resultados principales que se usarán a lo largo de este trabajo.

2. Caminos de longitud mínima

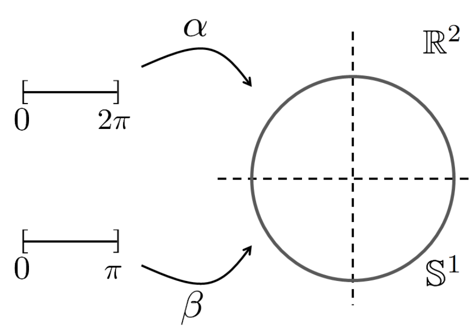
Con el fin de obtener resultados análogos a los de la geometría riemanniana clásica, en esta sección estudiaremos en detalle los caminos que minimizan distancias, así como geodésicas en espacios métricos de caminos. Como describiremos a continuación, muchos de los conceptos propios del Cálculo –como por ejemplo las reparametrizaciones por longitud de arco– son aplicables en el contexto no diferenciable de la geometría de espacios métricos.

2.1. Curvas y parametrizaciones naturales

A lo largo de la teoría es muy común referirse a caminos como funciones de la forma $\gamma : I \to X$ (donde I es un intervalo conexo de $\mathbb{R}$), sin perder de vista que en muchas ocasiones nos enfocamos en su imagen $\gamma(I) \subset X$, es decir, al objeto geométrico como tal. Muchas veces, hacer esto último resulta conveniente en muchos sentidos, simplemente para evitar ambigüedades o para resaltar alguna propiedad geométrica del objeto en cuestión.

Ejemplo 2.1. En $\mathbb{R}^2$ consideremos los caminos $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ y $\beta : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ definidos como

$$\alpha(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t)) \quad \text{y} \quad \beta(s) = (\cos(2s), \operatorname{sen}(2s)).$$



Circunferencia $\mathbb{S}^1$ parametrizada de dos maneras distintas.

Ambos caminos parametrizan la circunferencia $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$, pero la recorren con diferente velocidad.

Intuitivamente, una curva es una clase de equivalencia de caminos que parametrizan a un conjunto de puntos. En este sentido, una curva es un conjunto de puntos en cierto espacio junto con funciones definidas en intervalos de $\mathbb{R}$ que lo parametrizan, de manera que dichas funciones estén relacionadas en el sentido de la definición 2.2. En ausencia de herramientas como la diferenciabilidad, nuestra definición de curva estará basada en condiciones más técnicas, pero sin perder de vista las propiedades geométricas que debe satisfacer. A continuación formalizamos el concepto de curva.

Sea (X, d) un espacio métrico y (A, L_d) la estructura por caminos inducida por d, donde A es el conjunto de todos los caminos en X definidos en intervalos compactos de $\mathbb{R}$. En A consideremos la siguiente relación de equivalencia. Diremos que $\alpha \sim \beta$ si y solo si existe una sucesión finita de caminos $\{\gamma_i\}_{i=1}^n$ en A que satisface: $\gamma_1 = \alpha$, $\gamma_n = \beta$ y para $i = 1, \ldots, n-1$ se cumple que

$$\gamma_i = \gamma_{i+1} \circ \varphi_i \quad \text{o} \quad \gamma_{i+1} = \gamma_i \circ \varphi_i,$$

donde φ_i es una función suprayectiva, continua y no decreciente entre intervalos cerrados de $\mathbb{R}$. A los elementos de $A/\sim$ los denotaremos por $[\gamma]$, para $\gamma \in A$.

Definición 2.2 (Curva)**.** Una *curva* en X es una clase de equivalencia $[\gamma] \in A/\sim$. Los elementos de una misma clase se llaman *parametrizaciones* de la curva, y *re-parametrizaciones* una de otra, es decir, si $[\alpha] = [\beta]$ entonces α es reparametrización de β, y viceversa. Además, llamaremos *cambios de variable* a funciones suprayectivas y continuas φ entre intervalos cerrados de $\mathbb{R}$ que sean no decrecientes.

Observación 2.3. Un cambio de variable $\varphi : I \to J$ tiene que ser una función cerrada, es decir que para todo cerrado $C \subset I$ se cumple que $\varphi(C)$ es cerrado en J. Esto sucede porque si C es cerrado en I (recordemos que I es un intervalo compacto de $\mathbb{R}$) entonces C es compacto, y debido a que φ es continua se tendrá que $\varphi(C)$ es compacto en J, el cual es Hausdorff y así que $\varphi(C)$ es cerrado. También es claro que la composición de cambios de variable sigue siendo un cambio de variable.

Ejemplo 2.4. En el ejemplo 2.1, el cambio de variable $\varphi : [0, \pi] \to [0, 2\pi]$ dado por $\varphi(t) = 2t$, garantiza que $[\alpha] = [\beta]$. De hecho podemos asociar a la clase $[\alpha]$ el objeto geométrico $\mathbb{S}^1$ y pensar que este es la curva que describe α.

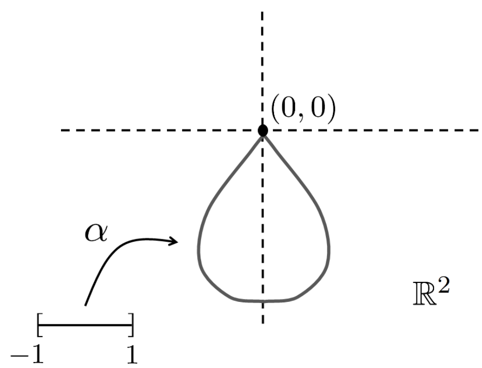
Si bien la definición de curva pudiera ser muy técnica, debido a cómo se definen las clases de equivalencia, muchas propiedades conocidas se derivan de esta definición. Las siguientes definiciones y proposiciones nos serán de mucha ayuda para ilustrar mejor dicho concepto.

Definición 2.5 (Camino Nunca Localmente Constante)**.** Un camino $\gamma : I \to X$ se dice *nunca localmente constante* si para todo $a, b \in I$, $a < b$, se cumple que $\gamma|_{[a,b]}$ no es constante.

En este sentido, un camino nunca localmente constante es un camino que a medida que recorre la curva nunca se detiene, aunque pudiera pasar por el mismo punto en varias ocasiones.

Ejemplo 2.6. Funciones inyectivas de intervalos conexos de $\mathbb{R}$ a espacios métricos son caminos nunca localmente constantes, en tanto que cualquier camino constante en un espacio métrico no lo es.

Ejemplo 2.7. En $\mathbb{R}^2$ considera el camino $\alpha : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$ dado por $\alpha(t) = (t^3 - t, t^2 - 1)$. Notemos que $\alpha(-1) = (0, 0) = \alpha(1)$, de donde α no es inyectiva, pero sí es un camino nunca localmente constante.

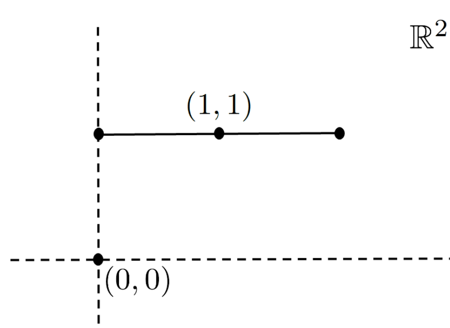


Curva que describe la función $\alpha(t) = (t^3 - t, t^2 - 1)$.

Ejemplo 2.8. El camino $\alpha : [0, 3] \to \mathbb{R}^2$ definido como

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, 1) & t \in [0, 1] \\ (1, 1) & t \in [1, 2] \\ (t-1, 1) & t \in [2, 3] \end{cases}$$

no es nunca localmente constante debido a que $\alpha(t) = (1, 1)$ para toda $t \in [1, 2]$. Sin embargo la curva que describe puede ser parametrizada por $\beta : [1, 2] \to X$ como $\beta(s) = (s, 1)$, el cual si es un camino nunca localmente constante.



El ejemplo anterior muestra que una misma curva puede tener distintas parametrizaciones nunca localmente constantes y también que no son nunca localmente constantes. Las siguientes proposiciones serán de gran utilidad para demostrar que en esencia si una curva admite dos parametrizaciones nunca localmete constantes, entonces dichas parametrizaciones son la misma salvo un homeomorfismo. Dicho resultado es el contenido de la proposición 2.12.

Proposición 2.9. Sean $\alpha : I \to X$ un camino nunca localmente constante y $\varphi : J \to I$ un cambio de variable. Entonces $\alpha \circ \varphi$ es nunca localmente constante si y solo si φ es un homeomorfismo.

Prueba. Supongamos que $\alpha \circ \varphi$ es nunca localmente constante. Debido a que φ es continua, cerrada y suprayectiva, bastará probar que es inyectiva. Sean $a, b \in J$ tales que $\varphi(a) = \varphi(b)$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $a \leq b$. Así, para toda $c \in [a, b]$ se cumple que

$$\varphi(a) \leq \varphi(c) \leq \varphi(b),$$

de donde $\varphi(a) = \varphi(c) = \varphi(b)$, luego la función $\alpha \circ \varphi$ es constante en el intervalo $[a, b]$, entonces necesariamente $a = b$, ya que $\alpha \circ \varphi$ es nunca localmente constante.

Recíprocamente, supongamos que φ es homeomorfismo y que $\alpha \circ \varphi$ es constante en un intervalo $[a, b] \subset J$. Es suficiente probar que $a = b$. Esto quiere decir que α es constante en el intervalo $[\varphi(a), \varphi(b)]$, y como α es nunca localmente constante se tendrá que $\varphi(a) = \varphi(b)$, de donde $a = b$ pues φ es biyectiva. □

Proposición 2.10. Sean $\alpha : I_1 \to X$ y $\beta : I_2 \to X$ dos caminos nunca localmente constantes, y sean $\varphi : J \to I_1$, $\psi : J \to I_2$ cambios de variable tales que $\alpha \circ \varphi = \beta \circ \psi$. Entonces existe un homeomorfismo no decreciente $\phi : I_1 \to I_2$ tal que $\alpha = \beta \circ \phi$.

Prueba. Notemos que para cada $a \in I_1$ existe $x \in J$ tal que $\varphi(x) = a$. Definimos $\phi : I_1 \to I_2$ como $\phi(a) = \psi(x)$. Veamos que ϕ está bien definida. Para ello sean $a \in I_1$ y $x, y \in J$ tales que $\varphi(x) = a = \varphi(y)$. Debemos probar que $\psi(x) = \psi(y)$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $x < y$ y observemos que para cada $t \in [x, y]$ se cumple que

$$a = \varphi(x) \leq \varphi(t) \leq \varphi(y) = a,$$

entonces $\varphi(t) = a$ para toda $t \in [x, y]$. En consecuencia,

$$(\beta \circ \psi)(t) = (\alpha \circ \varphi)(t) = \alpha(\varphi(t)) = \alpha(a),$$

para toda $t \in [x, y]$. Entonces β es constante en el intervalo $[\psi(x), \psi(y)]$, por lo tanto $\psi(x) = \psi(y)$. Mostremos ahora que ϕ es no decreciente. Tomemos $a, b \in I_1$ tales que $a < b$. Sean $x, y \in J$ tales que $\varphi(x) = a$ y $\varphi(y) = b$. Si $x \geq y$ entonces $\varphi(x) \geq \varphi(y)$, es decir $a \geq b$, lo que es una contradicción, luego $x < y$. Esto último implica que $\psi(x) \leq \psi(y)$ y por tanto $\phi(a) \leq \phi(b)$, por la definición de ϕ. Por otro lado, para cada $a \in I_1$ existe $x \in J$ tal que $\varphi(x) = a$ y así $\phi(a) = \psi(x)$. Entonces

$$\alpha(a) = \alpha(\varphi(x)) = (\alpha \circ \varphi)(x) = (\beta \circ \psi)(x) = \beta(\psi(x)) = \beta(\phi(a)) = (\beta \circ \phi)(a),$$

de donde $\alpha(a) = (\beta \circ \phi)(a)$ para toda I_1, por tanto $\alpha = \beta \circ \phi$.

Por último veamos que ϕ es suprayectiva y continua. Si $b \in I_2$ entonces existe $x \in J$ tal que $\psi(x) = b$, entonces $\phi(\varphi(x)) = \psi(x) = b$, por tanto existe $\varphi(x) \in I_1$ tal que $\phi(\varphi(x)) = b$, lo que significa que ϕ es suprayectiva. Para probar que ϕ es continua bastará que ver que si C es cerrado en I_2, entonces $\phi^{-1}(C)$ es cerrado en I_1. De hecho probaremos que

$$\phi^{-1}(C) = \varphi(\psi^{-1}(C)).$$

Sea $a \in \phi^{-1}(C)$, es decir $\phi(a) \in C$, además sea x tal que $\varphi(x) = a$ y $\phi(a) = \psi(x)$. Como $\psi(x) = \phi(a) \in C$, entonces $x \in \psi^{-1}(C)$ y así $a = \varphi(x) \in \varphi(\psi^{-1}(C))$. De aquí se tiene $\phi^{-1}(C) \subset \varphi(\psi^{-1}(C))$. Luego, si $a \in \varphi(\psi^{-1}(C))$, entonces existe $x \in \psi^{-1}(C)$ tal que $a = \varphi(x)$, de donde $\psi(x) \in C$. Así $\phi(a) = \psi(x) \in C$ y por tanto $a \in \phi^{-1}(C)$, de donde se tiene $\varphi(\psi^{-1}(C)) \subset \phi^{-1}(C)$ y así se tiene la igualdad $\phi^{-1}(C) = \varphi(\psi^{-1}(C))$. Además, si C es cerrado en I_2 entonces $\psi^{-1}(C)$ es cerrado en J, porque ψ es continua. Así que $\varphi(\psi^{-1}(C))$ es cerrado en I_1 porque φ es cerrada, es decir que $\phi^{-1}(C)$ es cerrado en I_1. En conclusión ϕ es continua, no decreciente y suprayectiva, además de que $\alpha = \beta \circ \phi$. Entonces por la proposición 2.9 se tendrá que ϕ es homeomorfismo. $\square$

Es un hecho que si una parametrización es constante en un intervalo, entonces dicha función no aporta información adicional de la curva. Es por ello que las parametrizaciones nunca localmente constantes adquieren mucha relevancia en el estudio de curvas. El siguiente teorema prueba que toda curva que admita una parametrización de longitud finita puede ser reparametrizada mediante un camino nunca localmente constante.

Teorema 2.11. Toda curva, que tenga una parametrización de longitud finita, admite una parametrización nunca localmente constante.

Prueba. Sea $\gamma : I = [a, b] \to X$ y consideremos la relación $\sim$ en I definida como sigue: $s \sim t$ si y solo si la función $\gamma|_{[s,t]}$ o la función $\gamma|_{[t,s]}$ es constante. Es fácil ver que $\sim$ es una relación de equivalencia en I. Consideremos $\pi : I \to I/\sim$ la proyección canónica, entonces $I/\sim$ adquiere la topología cociente mediante π. Además existe una única función continua $\bar{\gamma}$ que hace que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\pi"'] & X \\
I/\sim \arrow[ur, "\overline{\gamma}"'] &
\end{tikzcd}$$

o equivalentemente, $\gamma = \overline{\gamma} \circ \pi$.

Por otro lado notemos que si α es un camino constante, entonces $L_d(\alpha) = 0$. También, para toda $t \in [a, b]$ se cumple que

$$0 \leq L_d(\gamma|_{[a,t]}) \leq L_d(\gamma),$$

esto por las propiedades de la longitud de caminos inducida L_d, mismas que pueden ser revisadas en el teorema 4.3 de [9]. En general, si γ es constante en un intervalo $[\bar{a}, \bar{b}] \subset [a, b]$, entonces para toda $t \in [\bar{a}, \bar{b}]$ se cumple

$$L_d(\gamma|_{[a,t]}) = L_d(\gamma|_{[a,\bar{a}]} \cdot \gamma|_{[\bar{a},t]}) = L_d(\gamma|_{[a,\bar{a}]}) + L_d(\gamma|_{[\bar{a},t]}) = L_d(\gamma|_{[a,\bar{a}]}).$$

Definimos $\varphi : (I/\sim) \to J = [0, L_d(\gamma)]$ como $\varphi([t]) = L_d(\gamma|_{[a,t]})$, la cual está bien definida. Primero, φ es continua debido a las propiedades de la longitud de caminos inducida, por tanto para cada $\ell \in [0, L_d(\gamma)]$ existe $c \in I$ tal que $L_d(\gamma|_{[a,c]}) = \ell$, de donde $\varphi([c]) = \ell$ y así φ es suprayectiva. Ahora, para $[c], [\bar{c}] \in I/\sim$ tal que $\varphi([c]) = \varphi([\bar{c}])$ se tendrá, sin pérdida de generalidad $c \leq \bar{c}$. Si $c = \bar{c}$ se concluye que $[c] = [\bar{c}]$. En el otro caso se tendrá que

$$\varphi([\bar{c}]) = L_d(\gamma|_{[a,\bar{c}]}) = L_d(\gamma|_{[a,c]}) + L_d(\gamma|_{[c,\bar{c}]}) = \varphi([c]) + L_d(\gamma|_{[c,\bar{c}]}),$$

de donde $L_d(\gamma|_{[c,\bar{c}]}) = 0$, así que para toda $s, t \in [c, \bar{c}]$ se tendrá que

$$0 \leq d(\gamma(s), \gamma(t)) \leq L_d(\gamma|_{[s,t]}) \leq L_d(\gamma|_{[c,\bar{c}]}) = 0,$$

por tanto $d(\gamma(s), \gamma(t)) = 0$ y $\gamma(s) = \gamma(t)$. Esto quiere decir que $\gamma|_{[c,\bar{c}]}$ es constante, lo que implica que $[c] = [\bar{c}]$, entonces φ es inyectiva. Como I es compacto, entonces $I/\sim$ es compacto. Además como J es Hausdorff y φ es continua y biyectiva, tendrá que ocurrir que φ es homeomorfismo. De aquí que $I/\sim$ y J son homeomorfos.

En consecuencia,

$$\gamma = \bar{\gamma} \circ \pi = (\bar{\gamma} \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \pi)$$

y por tanto tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & X & \\
I \arrow[ur, "\gamma"] \arrow[r, "\pi"] & I/\sim \arrow[u, "\overline{\gamma}"] \arrow[r, shift left, "\varphi"] & J \arrow[ul, "\overline{\gamma}\circ\varphi^{-1}"'] \arrow[l, shift left, "\varphi^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

Probaremos que $\alpha = \bar{\gamma} \circ \varphi^{-1} : J \to X$ es un camino nunca localmente constante y que $\varphi \circ \pi$ es no decreciente. Procederemos por contradicción, es decir, supongamos que existe $[s,t] \subset J$ de forma que $s \neq t$ y que $\alpha|_{[s,t]}$ es constante, es decir que $\alpha|_{[s,t]}([s,t]) = \{p\}$, para alguna $p \in X$. Tomemos $x, y \in I$ tales que $\varphi^{-1}(s) = [x]$ y $\varphi^{-1}(t) = [y]$, así que para toda $z \in [x,y]$ (en el caso de que $x \leq y$) se cumple que $\varphi([z]) \in [s,t]$ porque φ es continua y biyectiva, por tanto estrictamente creciente o decreciente. Por lo tanto

$$\gamma(z) = \bar{\gamma} \circ \pi(z) = (\bar{\gamma} \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi([z])) = p$$

para toda $z \in [x,y]$, de donde $\gamma|_{[x,y]}$ es constante y por tanto $x \sim y$, esto es $[x] = [y]$. Esto último es una contradicción con el hecho de que φ es biyectiva, porque si $s \neq t$ entonces $[x] = \varphi^{-1}(s) \neq \varphi^{-1}(t) = [y]$. En conclusión $\bar{\gamma} \circ \varphi^{-1}$ es un camino nunca localmente constante. Para concluir, si $s, t \in I$ cumplen que $s \leq t$ entonces

$$(\varphi \circ \pi)(s) = \varphi([s]) = L_d(\gamma|_{[a,s]}) \leq L_d(\gamma|_{[a,t]}) = \varphi([t]) = (\varphi \circ \pi)(t),$$

por tanto $\varphi \circ \pi$ es una función continua, suprayectiva y no decreciente. Luego $\bar{\gamma} \circ \varphi^{-1}$ está relacionada con γ, que es lo que se quería probar. □

Como mencionamos previamente, la definición de curva no es muy útil para llevar a cabo cálculos concretos. No obstante la siguiente proposición establece una equivalencia que se usará para demostrar los resultados subsecuentes.

Proposición 2.12. Sean $\gamma_1 : I_1 \to X$ y $\gamma_2 : I_2 \to X$ dos caminos de longitud finita en X. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes

(1) $[\gamma_1] = [\gamma_2]$.

(2) Existe un camino $\gamma : J \to X$ y cambios de variable $\varphi_1 : I_1 \to J$ y $\varphi_2 : I_2 \to J$, tales que $\gamma_i = \gamma \circ \varphi_i$, para $i = 1, 2$. Más aún, si $\gamma_3 \in [\gamma]$, entonces existe φ_3 tal que $\gamma_3 = \gamma \circ \varphi_3$.

Prueba. (2)⇒(1) Se sigue inmediatamente de la definición 2.2. Veamos que (1)⇒(2). Sean γ_1, γ_2 tales que $[\gamma_1] = [\gamma_2]$. Esto significa que existen caminos $\alpha_i : J_i \to X$ para $i = 1, \ldots, n$, tales que $\alpha_1 = \gamma_1$, $\alpha_n = \gamma_2$, además para $i = 1, \ldots, n-1$ se cumple que

$$\alpha_i = \alpha_{i+1} \circ \psi_i \quad \text{o} \quad \alpha_{i+1} = \alpha_i \circ \psi_i.$$

Sea $\gamma : J \to X$ un camino nunca localmente constante y $\phi : I_1 \to J$ un cambio de variable tal que $\gamma_1 = \gamma \circ \phi$, el cual existe por el teorema 2.11. Sea $\beta_2 : K_2 \to X$ un camino nunca localmente constante y sea un cambio de variable $\phi_1 : J_2 \to K_2$ tal que $\alpha_2 = \beta_2 \circ \phi_1$. Se tienen dos casos:

(1) Cuando $\gamma_1 = \alpha_2 \circ \psi_1$, $\psi_1 : I_1 \to J_2$. Entonces

$$\gamma \circ \phi = \gamma_1 = \alpha_2 \circ \psi_1 = \beta_2 \circ (\phi_1 \circ \psi_1),$$

de donde $\gamma \circ \phi = \beta_2 \circ (\phi_1 \circ \psi_1)$. Debido a que γ y β_2 son caminos nunca localmente constantes y la proposición 2.9 garantiza que existe un cambio de variable y un homeomorfismo $\theta_1 : K_2 \to J$ tales que $\beta_2 = \gamma \circ \theta_1$. Así que $\alpha_2 = \gamma \circ (\theta_1 \circ \phi_1)$.

(2) Cuando $\alpha_2 = \gamma_1 \circ \psi_1$, $\psi_1 : J_2 \to I_1$. Así

$$\beta_2 \circ \phi_1 = \alpha_2 = \gamma_1 \circ \psi_1 = \gamma \circ (\phi \circ \psi_1),$$

y $\beta_2 \circ \phi_1 = \gamma \circ (\phi \circ \psi_1)$, y por tanto existe un cambio de variable y un homeomorfismo $\theta_1 : K_2 \to J$ tales que $\beta_2 = \gamma \circ \theta_1$. Entonces $\alpha_2 = \gamma \circ (\theta_1 \circ \phi_1)$.

De manera recursiva y siguiendo un proceso similar al anterior se puede probar que existen cambios de variable y homeomorfismos $\theta_i : K_{i+1} \to J$ tales que $\alpha_{i+1} = \gamma \circ (\theta_i \circ \psi_i)$. Sean entonces $\varphi_1 = \phi$ y $\varphi_2 = \theta_{n-1} \circ \psi_{n-1}$. Notemos que

$$\gamma_2 = \alpha_n = \gamma \circ (\theta_{n-1} \circ \psi_{n-1}) = \gamma \circ \varphi_2,$$

de donde $\gamma_2 = \gamma \circ \varphi_2$ y $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi_1$, que era lo que queríamos probar. Más aún, si $\gamma_3 \in [\gamma]$, entonces $\gamma_1 \sim \gamma_3$ y así existe φ_3 tal que $\gamma_3 = \gamma \circ \varphi_3$. $\square$

En el estudio de curvas siempre resaltan dos elementos de gran importancia, uno es el conjunto de puntos en el espacio (el objeto geométrico como tal) y el segundo la longitud. El siguiente resultado muestra que estos dos aspectos no se ven afectados bajo reparametrizaciones.

Proposición 2.13. Sea $[\gamma]$ una curva en (X, d) y supongamos que $L_d(\gamma) < \infty$. Entonces para toda $\alpha \in [\gamma]$ se cumple que $\mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Im}(\gamma)$ y $L_d(\alpha) = L_d(\gamma)$.

Prueba. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\gamma : J \to X$ es una parametrización nunca localmente constante, y sea $\alpha : I \to X$ una reparametrización de γ. Esto significa que existe un cambio de variable $\varphi : I \to J$ tal que $\alpha = \gamma \circ \varphi$. Primero probaremos que $\mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Im}(\gamma)$. Como $\varphi(I) \subset J$ entonces $\alpha(I) = \gamma(\varphi(I)) \subset \gamma(J)$, de donde $\alpha(I) \subset \gamma(J)$ y se tiene la contención $\mathrm{Im}(\alpha) \subset \mathrm{Im}(\gamma)$. Ahora, sea $p \in \gamma(J)$ entonces existe $a \in J$ tal que $\gamma(a) = p$. Como φ es sobre, existe $b \in I$ tal que $\varphi(b) = a$. Así

$$p = \gamma(a) = \gamma(\varphi(b)) = \alpha(b),$$

por tanto $p \in \alpha(I)$ y se tiene la otra contención $\gamma(J) \subset \alpha(I)$.

Probemos entonces que $L_d(\alpha) = L_d(\gamma)$. Sean $\gamma : [a, b] = J \to X$ y $\alpha : [u, v] = I \to X$ y sea $P = \{a = p_0 < p_1 < \cdots < p_n = b\}$ una partición de $[a, b]$. Debido a que φ es no decreciente y suprayectiva, para cada $k = 0, \ldots, n$ existe $q_k \in I$ tal que $\varphi(q_k) = p_k$ y $q_{k-1} < q_k$ para $k = 1, \ldots, n$. Esto sucede porque si $q_{k-1} \geq q_k$ para algún k, entonces $p_{k-1} = \varphi(q_{k-1}) \geq \varphi(q_k) = p_k$, lo cual contradice que $p_{k-1} < p_k$. Luego

$$Q = \{u = q_0 < q_1 < \cdots < q_n = v\},$$

es una partición de $[u, v]$. Así

$$S(P, \gamma, d) = \sum_{k=1}^{n} d(\gamma(p_{k-1}), \gamma(p_k)) = \sum_{k=1}^{n} d(\gamma(\varphi(q_{k-1})), \gamma(\varphi(q_k))) = \sum_{k=1}^{n} d(\alpha(q_{k-1}), \alpha(q_k)) = S(Q, \alpha, d) \leq L_d(\alpha),$$

de donde $S(P, \gamma, d) \leq L_d(\alpha)$ para toda partición P de $[a, b]$, así que $L_d(\gamma) \leq L_d(\alpha)$. Si $Q = \{u = q_0 < q_1 < \cdots < q_n = v\}$ es una partición de $[u, v]$, entonces

$$P = \{a = \varphi(u) \leq \varphi(q_1) \leq \cdots \leq \varphi(q_{n-1}) \leq \varphi(v) = a\},$$

es una partición de $[a, b]$ (pudiera inclusive ocurrir que $\varphi(q_k) = \varphi(q_{k+1})$ para alguna k). Entonces

$$S(Q, \alpha, d) = \sum_{k=1}^{n} d(\alpha(q_{k-1}), \alpha(q_k)) = \sum_{k=1}^{n} d(\gamma(\varphi(q_{k-1})), \gamma(\varphi(q_k))) = S(P, \gamma, d) \leq L_d(\gamma),$$

por tanto $S(Q, \alpha, d) \leq L_d(\gamma)$ para toda partición Q de α, así que $L_d(\alpha) \leq L_d(\gamma)$. En consecuencia, $L_d(\alpha) = L_d(\gamma)$. $\square$

El resultado anterior nos permite decir que una curva es *rectificable* si tiene alguna parametrización que lo sea. Es importante notar tambien que las proposiciones 2.12 y 2.13 nos permiten decir que toda curva, que admita al menos una parametrización con longitud finita, tiene una única reparametrización que es nunca localmente constante salvo un homeomorfismo no decreciente. Entre otras propiedades geométricas de interés, también resalta el estudio de parametrizaciones llamadas *simples*, como lo muestra la siguiente definición.

Definición 2.14 (Camino Simple)**.** Un camino $\gamma : J \to X$ se dice *simple* si la preimagen de cada punto en $\gamma(J)$ es un subintervalo compacto de J.

Ejemplo 2.15. Los ejemplos 2.1 y 2.7 son ejemplos de parametrizaciones que no son simples. En el segundo caso porque la preimagen del $(0, 0)$ es el conjunto $\{-1, 1\}$. Sin embargo el ejemplo 2.8 muestra parametrizaciones que si son simples.

Proposición 2.16. Sea $[\alpha]$ una curva rectificable en X tal que α es simple, entonces para toda $\beta \in [\alpha]$ se cumple que β es simple.

Prueba. Sea $\gamma : I \to X$ una parametrización nunca localmente constante de $[\alpha]$, entonces existen cambios de variable φ y ψ tales que $\alpha = \gamma \circ \varphi$ y $\beta = \gamma \circ \psi$. Primero probaremos que γ es inyectiva. Para ello, sean $a, b \in I$ tales que $\gamma(a) = \gamma(b) = p$, para $p \in \mathrm{Im}(\gamma)$, y supongamos que $a \leq b$. Como φ es un cambio de variable existen u, v tales que $\varphi(u) = a$, $\varphi(v) = b$ y $u \leq v$. Así

$$\alpha(u) = \gamma(\varphi(u)) = \gamma(a) = p = \gamma(b) = \gamma(\varphi(v)) = \alpha(v),$$

es decir $\alpha(u) = \alpha(v) = p$. Debido a que α es simple, se tendrá necesariamente que $\alpha(s) = p$ para todo $s \in [u, v]$. En consecuencia

$$\gamma(\varphi(s)) = \alpha(s) = p,$$

para cada $s \in [u, v]$, por lo tanto γ es constante en el intervalo $[\varphi(u), \varphi(v)] = [a, b]$. Esto último implica que $a = b$. Para terminar, se sigue inmediatamente, de que γ es inyectiva y ψ un cambio de variable, que β es simple. Esto concluye la prueba. $\square$

De esta manera una curva se dice *simple* si existe alguna parametrización que sea simple. En este sentido una curva simple es una curva que no contiene autointersecciones. Un hecho interesante es que si dos curvas son simples y tienen la misma imagen, entonces tienen que ser la misma curva. En consecuencia, una curva simple se puede identificar plenamente con el objeto geométrico que representa. Este último hecho se prueba en la siguiente proposición.

Proposición 2.17. Sean $[\alpha]$ y $[\beta]$ dos curvas rectificables y simples de tal forma que $\mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Im}(\beta)$, entonces $[\alpha] = [\beta]$.

Prueba. Debido a la proposición 2.16, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\alpha : I \to X$ y $\beta : J \to X$ son nunca localmente constantes y simples, y sea $C = \mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Im}(\beta)$. Esto significa que los mapeos $\alpha : I \to C$ y $\beta : J \to C$ son biyectivos. Sea entonces $\varphi : I \to J$ definido como $\varphi = \beta^{-1} \circ \alpha$, el cual es continuo, biyectivo y con inversa continua, así que φ es estrictamente creciente o decreciente. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que φ es decreciente, por lo tanto $\alpha = \beta \circ \varphi$, de donde se tiene $[\alpha] = [\beta]$. $\square$

En geometría riemanniana clásica resulta de vital importancia la función *longitud de arco* para una curva diferenciable $\gamma : [a, b] \to M$, definida por

$$s(t) = L(\gamma|_{[a,t]}) = \int_a^t \sqrt{g(\gamma'(u), \gamma'(u))}\, du,$$

donde M es una variedad riemanniana con métrica g. Es una consecuencia inmediata del Teorema Fundamental del Cálculo que s es diferenciable y que $s'(t) = \sqrt{g(\gamma'(t), \gamma'(t))}$. Por tanto, una curva está parametrizada por longitud de arco si y solo si $s'(t) = 1$ para toda $t \in [a, b]$. De todas las reparametrizaciones de una curva γ, estas parametrizaciones de velocidad unitaria son de gran utilidad en la práctica. No solo para realizar diversos cálculos, sino también para entender mejor el comportamiento de la curva. Una clara muestra de ello es el formalismo de Frenet que describe la geometría clásica de curvas inmersas en $\mathbb{R}^3$ [5]. En el contexto de los espacios métricos de caminos, esta definición se generaliza como se muestra a continuación.

Definición 2.18 (Parametrización Natural)**.** Sea $\gamma : I \to X$ un camino en (X, d). Decimos que γ es una parametrización *natural* si $L_d(\gamma, a, b) = |a - b|$ para toda $a, b \in I$, donde $L_d(\gamma, a, b) = L_d(\gamma|_{[a,b]})$.

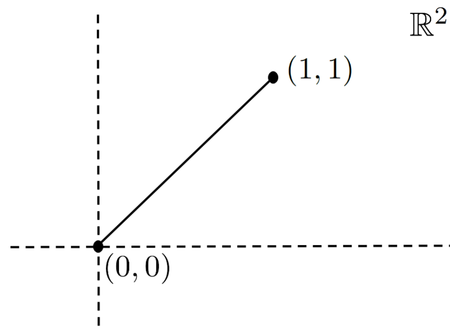
Ejemplo 2.19. El camino $\alpha : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ definido como $\alpha(t) = (t^2, t^2)$ no es una parametrización natural debido a que

$$L(\alpha, t, s) = ||\alpha(t) - \alpha(s)|| = ||(t^2, t^2) - (s^2, s^2)|| = \sqrt{2}|t^2 - s^2| \neq |t - s|,$$

para $t \neq s$. Mientras que $\beta : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ dado por $\beta(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(t, t)$ si es una parametrización natural porque

$$L(\beta, t, s) = ||\beta(t) - \beta(s)|| = \frac{1}{\sqrt{2}}||(t, t) - (s, s)|| = |t - s|.$$

Notar que en ambos casos, las curvas $[\alpha]$ y $[\beta]$ son simples y tienen la misma imagen, la cual es el segmento euclidiano en $\mathbb{R}^2$ que une el punto $(0, 0)$ con el punto $(1, 1)$. Por lo tanto $[\alpha] = [\beta]$.



El siguiente teorema muestra que todo camino de longitud finita admite una reparametrización natural y por lo tanto toda curva rectificable lo hace. Esto resulta de vital importancia al igual que en el caso riemanniano.

Teorema 2.20. Sea $\gamma : [a,b] \to X$ un camino en (X,d) que tiene longitud finita. Entonces existe un camino $\bar{\gamma} : [0, L_d(\gamma)] \to X$, que es una parametrización natural y un cambio de variable $\varphi : [a,b] \to [0, L_d(\gamma)]$ de tal forma que $\gamma = \bar{\gamma} \circ \varphi$.

Prueba. Definamos $\varphi(t) = L_d(\gamma, a, t)$ para cada $t \in [a,b]$. Entonces φ es una función continua y no decreciente, por la propiedades de la longitud de camino L_d, además $\varphi(t) \in [0, L_d(\gamma)]$. Ahora para cada $\tau \in [0, L_d(\gamma)]$ elijamos $t \in [a,b]$ de manera que $\varphi(t) = \tau$ y definimos $\overline{\gamma}(\tau) = \gamma(t)$. La función $\overline{\gamma}$ está bien definida debido a que si $t, t' \in [a,b]$ son tales que $\varphi(t) = \varphi(t')$, entonces

$$d(\gamma(t), \gamma(t')) \leq L_d(\gamma, t, t') = |L_d(\gamma, a, t) - L_d(\gamma, a, t')| = |\varphi(t) - \varphi(t')| = 0,$$

lo que quiere decir que $\gamma(t) = \gamma(t')$. Por la construcción se obtiene que $\gamma = \overline{\gamma} \circ \varphi$. Probemos entonces que $\overline{\gamma}$ es una parametrización natural. Sean $\tau_1 = \varphi(t_1)$ y $\tau_2 = \varphi(t_2)$, entonces

$$d(\overline{\gamma}(\tau_1), \overline{\gamma}(\tau_2)) \leq L_d(\gamma, t_1, t_2) = |\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| = |\tau_1 - \tau_2|,$$

lo que muestra que $\overline{\gamma}$ es Lipschitz y por tanto continua. Además $L_d(\overline{\gamma}, \tau_1, \tau_2) = L_d(\gamma, t_1, t_2) = |\tau_1 - \tau_2|$, pues $L_d(\overline{\gamma}) = L_d(\overline{\gamma} \circ \varphi) = L_d(\gamma)$, entonces $\overline{\gamma}$ es natural. Lo anterior concluye la prueba. □

Dado que podemos pensar que en un camino parametrizado por longitud de arco el parámetro recorre la imagen con velocidad unitaria, podemos generalizar el concepto de parametrización natural para incluir curvas que se recorren uniformemente. De hecho, una parametrización γ es de *velocidad constante* $v > 0$ si $L_d(\gamma, a, b) = v|a - b|$ para todo $a, b \in I$. Como consecuencia del teorema 2.20 se tiene la siguiente proposición.

Proposición 2.21. Sea $v > 0$. Entonces cualquier curva rectificable admite una parametrización con velocidad constante v. Además, existe una reparametrización $\alpha : [0,1] \to X$ con velocidad constante.

Prueba. Sea $[\gamma]$ una curva rectificable y supongamos sin pérdida de generalidad que $\gamma : [0, L_d(\gamma)] \to X$ es una parametrización natural de $[\gamma]$. Consideremos la función $\varphi : [0, L_d(\gamma)/v] \to [0, L_d(\gamma)]$ definida como $\varphi(t) = tv$, el cual es un cambio de variable. Notemos que para $\alpha = \gamma \circ \varphi$ y para toda $a, b \in [0, L_d(\gamma)/v]$ se cumple que

$$L_d(\alpha, a, b) = L_d(\gamma, \varphi(a), \varphi(b)) = L_d(\gamma, av, bv) = v|a - b|,$$

de donde α es una parametrización con velocidad constante v. Para probar la segunda parte basta considerar $\varphi : [0,1] \to [0, L_d(\gamma)]$. Como $\varphi(t) = tL_d(\gamma)$, entonces la reparametrización α con velocidad constante será $\alpha = \gamma \circ \varphi$. □

2.2. Existencia de Caminos de Longitud Mínima y el Teorema de Arzela-Ascoli

En general, un espacio métrico de caminos no siempre tiene caminos que realizan la distancia entre puntos. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ con la métrica euclidiana usual no existen caminos que tengan por longitud la distancia entre el punto $(-1, 0)$ y $(1, 0)$. En esta sección mostramos algunos criterios para que dichos caminos de longitud mínima existan.

El Teorema de Compacidad de Arzela-Ascoli es uno de los teoremas clásicos en Análisis Funcional que garantizan la existencia de subsucesiones convergentes para cualquier sucesión en un espacio con ciertas propiedades [10]. En el ámbito de los espacios métricos de caminos también existe una versión de dicho teorema adaptada al escenario de la convergencia de curvas.

Definición 2.22 (Convergencia Uniforme de Curvas)**.** Una sucesión de curvas $\{[\gamma_i]\}_{i=1}^{\infty}$ *converge uniformemente* a una curva $[\gamma]$ si cada curva $[\gamma_i]$ admite una parametrización (cada una de estas con el mismo dominio) que converge uniformemente a una parametrización de $[\gamma]$.

Teorema 2.23 (Arzela-Ascoli)**.** En un espacio métrico compacto (X, d), cualquier sucesión de curvas con longitud uniformemente acotada contiene una subsucesión uniformemente convergente.

Prueba. Para cada $[\gamma_i]$, sea $\gamma : [0, 1] \to X$ una parametrización con velocidad constante v_i. Notemos que

$$L_d([\gamma_i]) = L_d(\gamma_i, 0, 1) = v_i|1 - 0|,$$

de donde $v_i = L_d([\gamma_i])$. Debido a que la sucesión de curvas $\{[\gamma_i]\}$ tienen longitud uniformemente acotada, existe $C > 0$ tal que $v_i < C$ para toda i. De forma que

$$d(\gamma_i(t), \gamma_i(t')) \leq L_d(\gamma_i, t, t') = v_i|t - t'| < C|t - t'|,$$

para toda i y para cada $t, t' \in [0, 1]$.

Sea $S = \{t_j\}$ un subconjunto de $[0, 1]$ numerable y denso. Utilizando el proceso diagonal de Cantor podemos encontrar una subsucesión γ_{n_i} de $\{\gamma_i\}$ de manera que para cada $j \in \mathbb{N}$, la sucesión $\{\gamma_{n_i}(t_j)\}_{i=1}^{\infty}$ converge. Probaremos que la sucesión $\{\gamma_{n_i}\}$ converge. Sin pérdida de generalidad (basta simplemente con renombrar los índices) supongamos que la subsucesión es $\{\gamma_i\}$. Ahora, sea $t \in [0, 1]$. Veamos que la sucesión $\{\gamma_i(t)\}$ es de Cauchy. Escojamos $\varepsilon > 0$ y sea $t_j \in S$ tal que $|t - t_j| < \varepsilon/C$. De la convergencia de la sucesión $\{\gamma_i(t_j)\}_{i=1}^{\infty}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $i, k \geq N$ se cumple que

$$d(\gamma_i(t_j), \gamma_k(t_j)) < \varepsilon.$$

Por lo tanto

$$\begin{array}{rcl} d(\gamma_i(t), \gamma_k(t)) & \leq & d(\gamma_i(t), \gamma_i(t_j)) + d(\gamma_i(t_j), \gamma_k(t_j)) + d(\gamma_k(t_j), \gamma_k(t)) \\ & < & C|t - t_j| + \varepsilon + C|t - t_j| \\ & < & 3\varepsilon, \end{array}$$

de donde $\{\gamma_i(t)\}$ es una sucesión de Cauchy y por tanto convergente. Definimos $\gamma : [0, 1] \to X$ como

$$\gamma(t) = \lim_{i \to \infty} \gamma_i(t).$$

Observemos que para toda $t, t' \in [0, 1]$ se cumple

$$d(\gamma(t), \gamma(t')) = \lim_{i \to \infty} d(\gamma_i(t), \gamma_i(t')) \leq \lim_{i \to \infty} C|t - t'| = C|t - t'|,$$

así que γ es Lipschitz y en particular continua, además como γ está definida en el compacto $[0, 1]$, entonces γ es uniformemente continua. Para finalizar probemos que la sucesión de caminos $\{\gamma_i\}$ converge uniformemente al camino γ. Sea $\varepsilon > 0$ y elijamos $1/N > \varepsilon/4C$, además tomemos $k \in \{0, 1, \ldots, N\}$. Debido a como se definió γ, existe M_k tal que

$$d(\gamma(k/N), \gamma_i(k/N)) < \frac{\varepsilon}{2},$$

para toda $i \geq M_k$ y para cada k. Sea $M = \max\{M_k\}$ y observemos que para toda $t \in [0, 1]$ existe $k \in \{0, 1, \ldots, N - 1\}$ tal que

$$\frac{k}{N} \leq t \leq \frac{k + 1}{N},$$

así que para toda $i \geq M$ se tendrá

$$\begin{aligned} d(\gamma(t),\gamma_i(t)) &\leq d(\gamma(t),\gamma(k/N)) + d(\gamma(k/N),\gamma_i(k/N)) + d(\gamma_i(k/N),\gamma_i(t)) \\ &< C\left|t-\frac{k}{N}\right| + \frac{\varepsilon}{2} + C\left|t-\frac{k}{N}\right| \\ &< C\left(\frac{\varepsilon}{4C}\right) + \frac{\varepsilon}{2} + C\left(\frac{\varepsilon}{4C}\right) \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

es decir que $d(\gamma(t),\gamma_i(t)) < \varepsilon$ para toda $i \geq M$, por tanto $\{\gamma_i\}$ converge uniformemente a γ. $\square$

Como mencionamos en la introducción, uno de los principales objetivos de este artículo es mostrar que bajo ciertos criterios, los caminos de longitud mínima, en espacios métricos de caminos, siempre existen. En general se puede definir el concepto de camino de longitud mínima en espacios métricos:

Definición 2.24 (Camino de longitud mínima)**.** Un camino $\gamma : [a,b] \to X$ se dice que es un *camino de longitud mínima* si para todo camino α que conecta $\gamma(a)$ con $\gamma(b)$ se cumple que $L_d(\alpha) \geq L_d(\gamma)$.

Cuando (X,d) es un espacio métrico de caminos, es decir $\hat{d} = d$, la definición anterior se puede reformular como sigue: un camino γ es un *camino de longitud mínima* si $L_d(\gamma) = d(\gamma(a),\gamma(b))$. Estos caminos también son conocidos como *minimizantes de la distancia*.

Los caminos de longitud mínima en espacios métricos de caminos guardan una estrecha similitud con los segmentos de rectas que unen dos puntos el plano, pues en ambos casos la longitud del camino que los conecta realiza la distancia entre los puntos. Dado que prácticamente todos los aspectos métricos de la geometría euclidiana clásica están relacionados con las propiedades minimizantes de los segmentos de recta, esta noción de minimalidad es de capital relevancia en geometría métrica. Notemos también que cualquier segmento contenido en otro segmento de recta en $\mathbb{R}^2$ sigue preservando la propiedad de minimizar la distancia. Esta propiedad también la tienen los caminos de longitud mínima, como veremos a continuación.

Proposición 2.25. Sea $\gamma : [a,b] \to (X,d)$ un camino de longitud mínima. Entonces $\gamma|_{[p,q]}$ es un camino de longitud mínima para todo $[p,q] \subset [a,b]$.

Prueba. Procedamos por contradicción, es decir, supongamos que existe $[p,q] \subset [a,b]$ tal que $\gamma|_{[p,q]}$ no es un camino de longitud mínima, es decir que existe un camino α que conecta $\gamma(p)$ con $\gamma(q)$ y cumple que $L_d(\alpha) < L_d(\gamma|_{[p,q]})$. Consideremos el camino $\beta = \gamma|_{[a,p]} \cdot \alpha \cdot \gamma|_{[q,b]}$ (donde $\cdot$ denota la concatenación de caminos [1, 9]), y notemos que

$$L_d(\beta) = L_d(\gamma|_{[a,p]}) + L_d(\alpha) + L_d(\gamma|_{[q,b]}) < L_d(\gamma|_{[a,p]}) + L_d(\gamma|_{[p,q]}) + L_d(\gamma|_{[q,b]}) = L_d(\gamma),$$

de donde β es un camino que conecta $\gamma(a)$ con $\gamma(b)$ y cumple que $L_d(\beta) < L_d(\gamma)$, lo cual contradice que γ sea de longitud mínima. $\square$

La siguiente proposición prueba que la convergencia uniforme de caminos de longitud mínima preserva la propiedad de ser un camino de longitud mínima en el límite.

Proposición 2.26. Sea $\{\gamma_i\}$ una sucesión de caminos de longitud mínima en un espacio métrico de caminos (X,d), de tal forma que dicha sucesión converge uniformemente a un camino $\gamma : [a,b] \to X$. Entonces γ es un camino de longitud mínima.

Prueba. Sea $\gamma_j : [a,b] \to X$. Como $\gamma_j \to \gamma$ entonces $\gamma_j(a) \to \gamma(a)$ y $\gamma_j(b) \to \gamma(b)$ cuando $j \to \infty$, así que $L_d(\gamma_j) = d(\gamma_j(a),\gamma_j(b)) \to d(\gamma(a),\gamma(b))$ cuando $j \to \infty$. Debido a que L es semi-continua por abajo se tendrá que

$$L_d(\gamma) \leq \lim_{j\to\infty} L_d(\gamma_j) = d(\gamma(a),\gamma(b)).$$

Como $d(\gamma(a),\gamma(b)) \leq L_d(\gamma)$ se tiene la igualdad $d(\gamma(a),\gamma(b)) = L_d(\gamma)$. $\square$

Proposición 2.27. Sea (X,d) un espacio métrico compacto y sean $x,y \in X$ dos puntos que pueden ser conectados por al menos un camino rectificable. Entonces existe un camino de longitud mínima conectando x con y.

Prueba. Sea $L_{\text{ínf}}$ el ínfimo de las longitudes de caminos rectificables conectando x con y, entonces existe una sucesión de curvas $\{\gamma_j\}$ de forma que $L_d(\gamma_j) \to L_{\text{ínf}}$. Por el Teorema de Arzela-Ascoli, la sucesión $\{\gamma_j\}$ contiene una subsucesión convergente, es decir, existe $\{\gamma_{j_k}\} \to \gamma$. Entonces

$$L_d(\gamma) \leq \operatorname{lím} L(\gamma_{j_k}) = L_{\text{ínf}}.$$

Como γ conecta x con y se tiene que $L(\gamma) \geq L_{\text{ínf}}$, de donde $L(\gamma) = L_{\text{ínf}}$. □

Definición 2.28. Un espacio métrico se dice *acotadamente compacto* si todo subconjunto cerrado y acotado es compacto.

Por ejemplo, el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ con la métrica usual es un espacio métrico acotadamente compacto. Esto de debe al Teorema de Heine-Borel, el cual dice que todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que es cerrado y acotado debe ser compacto.

Proposición 2.29. Sea (X, d) un espacio métrico acotadamente compacto. Entonces para cada dos puntos $x, y \in X$ conectados por un camino rectificable, existe una camino de longitud mínima que une x con y.

Prueba. Sea L la longitud de un camino rectificable uniendo x con y. Notemos que este camino, y cualquier otro camino de longitud menor o igual a L que conecte x con y, está contenido en la bola cerrada con centro en x y radio L, $\overline{B}_L(x)$. En efecto, si $\alpha : [a, b] \to X$ es un camino que conecte a x con y y de tal manera que $L_d(\alpha) \leq L$, entonces para toda $t \in [a, b]$ se cumple que

$$d(x, \alpha(t)) = d(\alpha(a), \alpha(t)) \leq L_d(\alpha|_{[a,t]}) \leq L_d(\alpha) \leq L,$$

por lo tanto $\alpha(t) \in \overline{B}_L(x)$, es decir $\operatorname{Im}(\alpha) \subset \overline{B}_L(x)$. Debido a que $\overline{B}_L(x)$ es compacta y usando la proposición 2.27 existe un camino de longitud mínima uniendo x con y. □

En [9] se prueba que en un espacio métrico de caminos, para cualesquiera dos puntos en él siempre existen $\varepsilon-$puntos medios [1] y esto sucede para toda $\varepsilon > 0$. Lo anterior implica la siguiente proposición, la cual será utilizada en los resultados siguientes.

Proposición 2.30. Sean (X, d) un espacio métrico de caminos y $x, y \in X$. Entonces para toda $\varepsilon > 0$ existe una sucesión finita $\{p_i\}_{i=1}^m$ de puntos en X tal que $p_1 = x$, $p_m = y$, $d(p_i, p_{i+1}) \leq \varepsilon$ para toda $i = 1, \ldots, m-1$ y de tal forma que

$$\sum_{i=1}^{m-1} d(p_i, p_{i+1}) - d(x, y) \leq \varepsilon.$$

El resultado anterior muestra que en un espacio métrico de caminos siempre se puede aproximar la distancia entre dos puntos mediante sucesiones de puntos que pueden escogerse tan cercanos como se quiera. Más aún, este hecho resulta ser cierto inclusive en ausencia de la existencia de caminos de longitud mínima. En consecuencia de ello, se derivan algunas propiedades interesantes como la siguiente:

Proposición 2.31. Consideremos dos puntos x, y en un espacio métrico de caminos (X, d) y sea $r < d(x, y)$. Entonces $\operatorname{dist}(y, B_r(x)) = d(x, y) - r$, donde

$$\operatorname{dist}(y, B_r(x)) = \inf_{p \in B_r(x)} \{d(y, p)\}.$$

Prueba. Primero veamos que para cada punto $p \in B_r(x)$ se tiene que

$$d(x, y) \leq d(x, p) + d(y, p) < r + d(y, p),$$

de donde $d(x, y) - r < d(y, p)$ para toda $p \in B_r(x)$, así que $d(x, y) - r \leq \operatorname{dist}(y, B_r(x))$. Por otro lado, si $\varepsilon > 0$ cumple que $\varepsilon < r$ y $\varepsilon < d(x, y) - r$, entonces existe una sucesión de puntos $\{p_i\}_{i=1}^m$ como en la proposición 2.30, pero además se cumple que existe k tal que $p_k \in B_r(x)$ y $p_{k+1} \notin B_r(x)$. Denotemos $x_\varepsilon = p_k$. Sea una sucesión $\varepsilon_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ tal que $\varepsilon_n < r$ y $\varepsilon_n < d(x, y) - r$, y sea $x_n = x_{\varepsilon_n}$. Mostraremos dos cosas, la primera es que $d(x, x_n) \to r$ cuando $n \to \infty$ y la segunda

$$\operatorname{dist}(y, B_r(x)) \leq d(x, y) + \varepsilon_n - d(x, x_n), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Para ver lo primero bastará probar que para toda $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < r$ y $\varepsilon < d(x,y) - r$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|d(x, x_n) - r| < \varepsilon, \forall n \geq N.$$

Sea entonces $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < r$ y $\varepsilon < d(x,y) - r$, de forma que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\varepsilon_n < \varepsilon$ para toda $n \geq N$. Sea $n \geq N$. Entonces existe una sucesión $\{p_i\}_{i=1}^m$ de puntos en X tal que $p_1 = x$, $p_m = y$, $d(p_i, p_{i+1}) \leq \varepsilon$ para $i = 1, \ldots, m-1$, y tal que

$$\sum_{i=1}^{m-1} d(p_i, p_{i+1}) - d(x,y) \leq \varepsilon_n.$$

Además, por la forma en que elegimos x_n, existe k tal que $x_n = p_k \in B_r(x)$ y $p_{k+1} \notin B_r(x)$. Así

$$r < d(x, p_{k+1}) \leq d(x, p_k) + d(p_k, p_{k+1}) \leq d(x, p_k) + \varepsilon_n < d(x, x_n) + \varepsilon,$$

por tanto $r - \varepsilon < d(x, x_n)$. Además como $x_n \in B_r(x)$, es claro que $d(x, x_n) < r + \varepsilon$. Por tanto

$$|d(x, x_n) - r| < \varepsilon.$$

Esto prueba que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x, x_n) = r$. Para probar lo segundo notemos que para cada n se cumple lo siguiente. Utilizando la desigualdad triangular se obtiene que

$$\begin{aligned} d(x, x_n) + d(x_n, y) &= d(x, p_k) + d(p_k, y) \\ &\leq \sum_{i=1}^{m-1} d(p_i, p_{i+1}) \\ &\leq d(x,y) + \varepsilon_n, \end{aligned}$$

por tanto

$$\operatorname{dist}(y, B_r(x)) \leq d(y, x_n) \leq d(x,y) + \varepsilon_n - d(x, x_n).$$

Por último, tomando el límite cuando $n \to \infty$ en la desigualdad previa resulta que

$$\operatorname{dist}(y, B_r(x)) \leq d(x,y) - r.$$

En consecuencia, $\operatorname{dist}(y, B_r(x)) = d(x,y) - r$. $\square$

Definición 2.32. Un espacio topológico X se dice *localmente compacto* si cada punto en X tiene una vecindad pre-compacta, es decir que su cerradura es compacta.

Proposición 2.33. Si (X,d) es un espacio métrico de caminos, localmente compacto y completo, entonces toda bola cerrada en X es compacta.

Prueba. Sea $x \in X$. Notemos que si $\bar{B}_r(x)$ es compacto para algún r, entonces $\bar{B}_\rho(x)$ es compacto para toda $\rho < r$. Definimos

$$R = \sup\{r > 0 : \bar{B}_r(x) \text{ es compacto}\}.$$

Como X es localmente compacto, el punto x tiene una vecindad precompacta U. Además existe $r > 0$ tal que la bola cerrada $\bar{B}_r(x) \subset \overline{U}$, así que $\bar{B}_r(x)$ es compacto y por tanto $R \geq r > 0$. Supongamos que $R < \infty$ y denotemos $B = \bar{B}_R(x)$. Probaremos que B es compacto. Como B es cerrado en un espacio métrico completo, es suficiente probar que para toda $\varepsilon > 0$, B contiene una $\varepsilon-$red finita. Es claro que si $\varepsilon \geq R$, entonces $\{x\}$ es una $\varepsilon-$red finita de B. Supongamos que $\varepsilon < R$. Sea $B' = \bar{B}_{R-\varepsilon/3}(x)$. Debido a como escogimos R se tiene que B' es compacta y por tanto contiene una $\varepsilon/3-$red finita, digamos S. Luego, como X es un espacio métrico de caminos, entonces para cada $y \in B$ se tiene que

$$\operatorname{dist}(y, B') = d(x,y) - (R - \varepsilon/3) = \varepsilon/3 + d(x,y) - R,$$

y como $R > d(x,y)$, entonces $\operatorname{dist}(y, B') \leq \varepsilon/3$. Luego $\operatorname{dist}(y, B') < \varepsilon/2$, así que existe $y' \in B'$ tal que $d(y, y') < \varepsilon/2$. Por otro lado, $\operatorname{dist}(y', S) \leq \varepsilon/3 < \varepsilon/2$. Entonces existe $s \in S$ tal que $d(y', s) < \varepsilon/2$. De esta forma

$$\operatorname{dist}(y, S) \leq d(y, s) \leq d(y, y') + d(y', s) < \varepsilon,$$

como $y \in B$ fue arbitraria, entonces S es una $\varepsilon-$red de B. Esto último implica que B es compacto.

Ahora, cada punto $y \in B$ tiene una vecindad precompacta U_y. Entonces la colección abierta $\{U_y\}_{y\in B}$ cubre a B, luego existe una subcubierta finita, digamos $\{U_y\}_{y\in Y}$, que cubre a B, además

$$U = \bigcup_{y\in Y} U_y,$$

es una vecindad precompacta de B. Sea $r = \mathrm{dist}(B, X\setminus U)$, entonces existe una sucesión $(b_n, x_n) \in B\times(X\setminus U)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} d(b_n, x_n) = r,$$

y como B es compacto, entonces $\{b_n\}$ tiene una subsucesión convergente, digamos $\{b_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ convergente a $b \in B$. Esto significa que

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, b) = r.$$

Si $r = 0$, entonces la sucesión $\{x_n\}$ converge a b, pero como U es abierto, $X \setminus U$ es cerrado, así que necesariamente $b \in X \setminus U$, lo que es una contradicción debido a que $b \in B \subset U$. Luego $r > 0$. Sea $0 < \varepsilon < r$ y consideremos la $\varepsilon-$vecindad de B, es decir, el conjunto

$$U_\varepsilon(B) = \{p \in X : \mathrm{dist}(p, B) < \varepsilon\}.$$

Si $p \in U_\varepsilon(B) \cap (X \setminus U)$ entonces $\mathrm{dist}(p, B) < \varepsilon$, así que existe $b \in B$ tal que $d(p, b) < \varepsilon$. Además se cumple que

$$r = \mathrm{dist}(B, X \setminus U) \leq d(p, b) < \varepsilon,$$

de donde $\varepsilon > r$, lo que es una contradicción, así que $U_\varepsilon(B) \cap (X \setminus U) = \varnothing$ y por tanto $U_\varepsilon(B) \subset U$. Por último, sea $p \in B_{R+\varepsilon}(x)$. Si $p \in B$ entonces $\mathrm{dist}(p, B) = 0$ y $\mathrm{dist}(p, B) < \varepsilon$, así que $p \in U_\varepsilon(B)$. En el caso que $p \notin B$ se tiene que

$$\mathrm{dist}(p, B) = d(x, p) - R < \varepsilon,$$

pues $d(x, p) < R + \varepsilon$, así que también $p \in U_\varepsilon(B)$. Esto prueba la contención

$$B_{R+\varepsilon}(x) \subset U_\varepsilon(B) \subset U,$$

por lo tanto $\bar{B}_{R+\varepsilon}(x) \subset \bar{U}$, pero como U es pre-compacto, entonces $\bar{U}$ es un compacto de X, de donde $\bar{B}_{R+\varepsilon}(x)$ es compacto. Esto contradice la elección de R. En conclusión $R = \infty$, lo que significa que todas las bolas centradas en x son compactas. $\square$

Utilizando las proposiciones 2.29 y 2.33 se concluye el siguiente resultado.

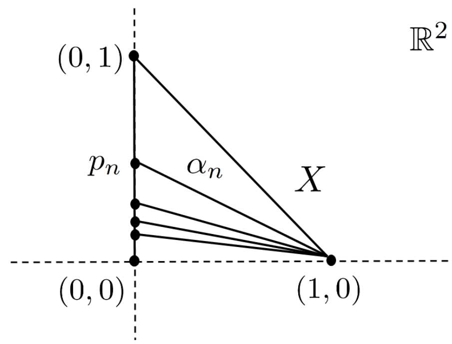
Teorema 2.34. Sea (X, d) un espacio métrico de caminos localmente compacto y completo. Entonces para cualesquiera dos puntos $x, y \in X$ de tal forma que $d(x, y) < \infty$, existe un camino de longitud mínima γ que los conecta.

La completez del espacio métrico es esencial para que el teorema anterior se cumpla. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, no existe un camino de longitud mínima que conecte al punto $(-1, 0)$ con el $(1, 0)$. De la misma forma, es importante que X sea localmente compacto como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.35. En $\mathbb{R}^2$ consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$ el punto $p_n = (0, 1/n)$. Denotemos por α_n al segmento que une el punto p_n con el punto $(1, 0)$. Además sea α_0 el segmento que une el punto $(0, 1)$ con el punto $(0, 0)$. Sea

$$X = \bigcup_{n=0}^{\infty} \alpha_n.$$

El conjunto X es un espacio métrico con la métrica intrínseca inducida por la restricción de la distancia de $\mathbb{R}^2$ a X.



El espacio métrico resultante es completo, pero no es localmente compacto en el $(1,0)$. Notemos además que la distancia entre $(0,0)$ y $(1,0)$ es 1, pero no existe un camino de longitud mínima uniéndolos.

Ejemplo 2.36. Otro aspecto que vale la pena resaltar acerca del teorema anterior es que no dice nada acerca de la unicidad de dichos caminos. Existen espacios métricos donde cada pareja de puntos puede unirse mediante una infinidad de caminos de longitud mínima, como es el caso de $\mathbb{R}^2$ con la métrica del taxi. Por otro lado existen espacios donde dichos caminos son únicos salvo en casos excepcionales, como sucede en la esfera $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^2$ donde la unicidad no se cumple únicamente en el caso cuando los puntos p, q son antipodales.

Como aplicación del teorema 2.34 se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.37. Consideremos un espacio métrico de caminos (X, d) compacto y que es homeomorfo a un intervalo $[a, b]$. Entonces (X, d) tiene que ser isométrico a un intervalo.

Prueba. Sea $f : [a, b] \to (X, d)$ un homeomorfismo y sean $p = f(a)$, $q = f(b)$. Notemos que para toda $x \in X \setminus \{p, q\}$ se cumple que $X \setminus \{x\}$ se puede dividir en dos componentes conexas, digamos A, B tales que $p \in A$ y $q \in B$, además $A \cap B = \varnothing$. Esto se debe a que si $c \in [a, b]$ es tal que $f(c) = x$, entonces el intervalo $[a, b]$ se divide en dos componentes conexas y estas se preservan bajo el homeomorfismo f. Más aún $f[a, c) = A$ y $f(c, b] = B$. Aplicando el teorema 2.34 existe un camino $\gamma : [u, v] \to X$ de longitud mínima tal que $\gamma(u) = p$ y $\gamma(v) = q$. Parametrizando γ por longitud de arco se obtiene un camino $\alpha : [0, L_d(\gamma)] \to X$ de longitud mínima que satisface $\alpha(0) = p$ y $\alpha(L) = q$, donde $L = L_d(\gamma)$. Si $s, t \in [0, L]$ tales que $\alpha(s) = \alpha(t)$, entonces

$$|s - t| = L_d(\alpha, s, t) = d(\alpha(s), \alpha(t)) = 0,$$

de donde $s = t$ y por tanto α es inyectiva. En particular α es isometría en su imagen, así que α es un homeomorfismo de $[0, L]$ en $C = \mathrm{Im}(\gamma) = \mathrm{Im}(\alpha)$. Probaremos que $C = X$. Supongamos que existe $z \in X \setminus C$, en particular $z \neq p$ y $z \neq q$. Esto quiere decir que $X \setminus \{z\}$ se divide en dos componentes conexas como vimos al principio, además p y q están en diferentes componentes conexas. Sin embargo el camino C es un camino que no contiene a z y une p con q, lo que es una contradicción, pues p y q están en diferentes componentes conexas. En conclusión $z \in C$ y por tanto $C = X$. En consecuencia $\alpha : [0, L] \to (X, d)$ es una isometría. $\square$

3. Geodésicas y el Teorema de Hopf-Rinow

Intuitivamente, una geodésica es una curva que mantiene cierta dirección y velocidad a medida que avanza. En geometría riemanniana se define formalmente una geodésica como aquella curva γ que satisface $\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$, donde ∇ es la conexión de Levi-Civita de la variedad riemanniana, es decir que la derivada del vector tangente a la curva, en dirección del mismo vector tangente, es el campo idénticamente cero. Posteriormente se verifica que las geodésicas minimizan localmente distancias entre puntos de la variedad. En ánimos de obtener una definición análoga a la anterior, se tiene la siguiente definición.

Definición 3.1 (Geodésica y Geodésica Minimal)**.** Sea (X, d) un espacio métrico de caminos. Una función $\gamma : I \to X$ (donde I es un intervalo conexo de $\mathbb{R}$) se dice *geodésica* si existe $v > 0$, y para todo $t \in I$, existe una vecindad U de t tal que

$$d(\gamma(a), \gamma(b)) = L_d(\gamma|_{[a,b]}) = v|a - b|,$$

para toda $a, b \in U$. Diremos también que γ es una *geodésica minimal* si la igualdad anterior se cumple para toda $a, b \in I$.

La definición anterior dice que una geodésica es un camino que minimiza distancias localmente y que su velocidad permanece constante a lo largo de la curva. Es claro que todo camino de longitud mínima es una geodésica, pero no toda geodésica es un camino de longitud mínima como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2. En la esfera unitaria $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, vista como subvariedad riemanniana, la distancia resultante es la métrica angular. Los círculos máximos minimizan localmente la distancia, por tanto son geodésicas. Sin embargo, no cualquier segmento de círculo máximo es un camino de longitud mínima.

Ejemplo 3.3. En $\mathbb{R}^3$ consideremos la función $\alpha : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ definida como $\alpha(t) = (t, 0, 0)$, la cual es continua con la métrica euclidiana de $\mathbb{R}^3$. Es fácil ver que α es una geodésica minimal.

El siguiente teorema generaliza el teorema clásico de Hopf-Rinow para variedades riemannianas [6].

Teorema 3.4 (Teorema de Hopf-Rinow, Cohn-Vossen)**.** En un espacio métrico de caminos (X, d) localmente compacto y tal que para todo $x, y \in X$ se tiene que $d(x, y) < \infty$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) (X, d) es un espacio métrico completo

(2) (X, d) es acotadamente compacto, es decir que cada bola cerrada en X es compacta.

(3) Cada geodésica $\gamma : [0, a) \to X$ se extiende a un camino continuo $\bar{\gamma} : [0, a] \to X$.

(4) Existe un punto $p \in X$ tal que cada geodésica minimal $\gamma : [0, a) \to X$, de forma que $\gamma(0) = p$, se extiende a un camino continuo $\bar{\gamma} : [0, a] \to X$.

Prueba. Probaremos la equivalencia mediante las siguientes implicaciones

$$(2) \Rightarrow (1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (2).$$

(2)⇒(1) Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en X, así que $\{x_n\}$ está acotada y por tanto existe $r > 0$ y $x \in X$ tal que $\{x_n\} \subset \bar{B}_r(x)$. Como X es acotadamente compacto, entonces $\bar{B}_r(x)$ es compacta, así que $\{x_n\}$ tiene una subsucesión convergente $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, pero debido a que $\{x_n\}$ es de Cauchy, entonces $\{x_n\}$ converge al mismo límite que $\{x_{n_k}\}$.

(1)⇒(3) Como γ es de velocidad constante, digamos $v > 0$, entonces para toda $s, t \in [0, a)$ se cumple que

$$L_d(\gamma|_{[s,t]}) = v|s - t|.$$

Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente al número a y consideremos la sucesión $\{\gamma(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$. Como $\{a_n\}$ es de Cauchy (debido a que es convergente) entonces para toda $\varepsilon > 0$ existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a_m| < \varepsilon/v$ para cada $n, m \geq M$, así que

$$d(\gamma(a_n), \gamma(a_m)) \leq L_d(\gamma|_{[a_n,a_m]}) = v|a_n - a_m| < \varepsilon,$$

de donde la sucesión $\{\gamma(a_n)\}$ es de Cauchy en (X, d). Dado que (X, d) es completo se tendrá que $\{\gamma(a_n)\}$ converge a un punto x. Veamos que el punto x no depende de la sucesión convergente al número a que se escoja. Sea entonces $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente al número a y supongamos que $\{\gamma(b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un punto $y \in X$. Luego, para toda $\varepsilon > 0$ existe M tal que la siguiente desigualdad se cumple para toda $n \geq M$,

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, \gamma(a_n)) + d(\gamma(a_n), \gamma(b_n)) + d(\gamma(b_n), y) \\ &\leq d(x, \gamma(a_n)) + L_d(\gamma|_{[a_n,b_n]}) + d(\gamma(b_n), y) \\ &= d(x, \gamma(a_n)) + v|a_n - b_n| + d(\gamma(b_n), y) < \varepsilon, \end{aligned}$$

debido a que $v|a_n - b_n| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Por tanto $d(x,y) < \varepsilon$ para cada $\varepsilon > 0$. Entonces $x = y$. Definimos $\bar{\gamma} : [0,a] \to X$ como

$$\bar{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{si } t \in [0,a) \\ x & \text{si } t = a. \end{cases}$$

La función $\bar{\gamma}$ claramente es continua en $[0,a)$. Además, también es continua en a, por construcción.

(3)⇒(4) Debido a que cada geodésica minimal es una geodésica, se tiene el resultado.

(4)⇒(2) Sea $p \in X$ tal que se satisface (4). Definimos

$$R = \sup\{r : \bar{B}_r(p) \text{ es compacta}\}.$$

Como X es localmente compacto, entonces todas las bolas cerradas $\bar{B}_r(p)$ con compactas para r suficientemente pequeña, así que $R > 0$. Supongamos que $R < \infty$. Primero probaremos que la bola $B_R(p)$ es precompacta. Para ello será suficiente probar que cualquier sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset B_R(p)$ contiene una subsucesión convergente (cuyo límite no necesariamente está en la bola). Denotemos $r_i = d(p, x_i)$. Podemos asumir que $r_i \to R$ cuando $i \to \infty$, pues en caso contrario una subsucesión de $\{x_i\}$ está contenida en una bola $\bar{B}_r(p)$ para alguna $r < R$, y por tanto existe una subsucesión convergente porque esta bola más pequeña es compacta, debido a como se definió R.

Sean $\gamma_i : [0, r_i] \to X$ caminos de longitud mínima los cuales son parametrizaciones naturales, tales que $\gamma_i(0) = p$ y $\gamma_i(r_i) = x_i$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Estos caminos existen debido a la proposición 2.29. Ahora, utilizando el teorema de Arzela-Ascoli podemos escoger una subsucesión $\{\alpha_i^1 = \gamma_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ de tal forma que las restricciones $\gamma_{n_i}|_{[0,r_1]}$ forman una sucesión convergente. De la sucesión $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$, también existe una subsucesión $\{\alpha_i^2 = \alpha_{n_i}^1\}_{i=1}^{\infty}$ de tal forma que la sucesión $\{\alpha_{n_i}^1|_{[0,r_2]}\}_{i=1}^{\infty}$ es convergente. De forma que utilizando el proceso diagonal de Cantor (esto es eligiendo el $n-$ésimo elemento de la $n-$ésima subsucesión para $n = 1, 2, \ldots$) se obtiene una subsucesión $\{\gamma_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ de tal forma que para toda $t \in [0, R)$ la sucesión $\{\gamma_{n_i}(t)\}_{i=1}^{\infty}$ converge en X. Definimos entonces $\gamma : [0, R) \to X$ como

$$\gamma(t) = \lim_{i\to\infty} \gamma_{n_i}(t).$$

Veamos ahora que γ es una geodésica minimal. Sean $a, b \in [0, R)$, así

$$d(\gamma(a), \gamma(b)) = \lim_{i\to\infty} d(\gamma_{n_i}(a), \gamma_{n_i}(b)) = \lim_{i\to\infty} |a - b| = |a - b|.$$

Como $\gamma(0) = p$ y γ es una geodésica minimal, existe una extensión $\bar{\gamma} : [0, R] \to X$, y por continuidad se debe cumplir que la sucesión $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ converja a $\bar{\gamma}(R)$, pues $\{r_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ converge a R. Entonces $B_R(p)$ es precompacta, esto significa que la bola cerrada $\bar{B}_R(p)$ es compacta. Ahora probaremos que existe $\varepsilon > 0$ tal que la bola $B_{R+\varepsilon}$ es precompacta. Como X es localmente compacto, entonces para cada $x \in \bar{B}_R(p)$ existe un $r(x) > 0$ tal que la bola $B_{r(x)}(p)$ es precompacta. Así, podemos escoger una subcubierta finita $\{B_{r(x_i)}(x_i)\}_{i=1}^{N}$ de $\bar{B}_R(x)$. Tomemos $\varepsilon = \min_{i=1,\ldots,N}\{r(x_i)\} > 0$ y notemos que

$$B_{R+\varepsilon}(p) \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_{r(x_i)}(x_i).$$

Esto signica que $B_{R+\varepsilon}(p)$ es precompacta, es decir que $\bar{B}_{R+\varepsilon}(p)$ compacta, pero esto contradice que $R < \infty$. En conclusión $R = \infty$, así que cualquier bola cerrada en X es compacta. □

Agradecimientos

Los autores desean agradecer al árbitro por su minucioso trabajo y por sus sugerencias, que fueron de gran ayuda para enriquecer este artículo.

Referencias

[1] D. Burago, Y. Burago y S. Ivanov. *A Course in Metric Geometry.* American Mathematical Society, GSM Vol. 33, Providence, (2001).

[2] M. R. Bridson y A. Haefliger. *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*, 2a edición. Springer-Verlag, GMW Vol. 319, Berlin, (2011).

[3] I. Chavel *Riemannian Geometry: a modern introduction*, 2a edición. Cambridge University Press, Cambridge, (2006).

[4] J. Cheeger y D. Ebin *Comparison theorems in Riemannian geometry.* American Mathematical Society, Chelsea, (2008)

[5] M. P. do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces.* Prentice Hall, New Jersey, (1976).

[6] M. P. do Carmo. *Riemannian Geometry*, 2a. edición. Birkhauser, Boston, (1992).

[7] J. M. Lee. *Riemannian Manifolds, an Introduction to Curvature.* Springer-Verlag, GTM Vol. 176, New York, (1997).

[8] L. Montes de Oca y D. Solís. *Los Postulados de Euclides en Espacios Métricos.* Abstraction & Application. Vol. 9, pp 27-49, Universidad Autónoma de Yucatán, México, (2013).

[9] W. Barrera, L. Montes de Oca, M. Navarro y D. Solís. *De la Geometría Riemanniana a los Espacios de Alexandrov I: Estructuras por Caminos y Métricas Inducidas.* Abstraction & Application. Vol. 12, pp 18-41, Universidad Autónoma de Yucatán, México, (2015)

[10] J. Munkres. *Topology,* 2a. edición. Prentice Hall, Upper Saddle River, (2000).

[11] M. Searcóid. *Metric Spaces.* Springer-Verlag, SUMS Vol. 19, Londres, (2007).