

De la Geometría Riemanniana a los Espacios de Alexandrov I: Estructuras por Caminos y Métricas Inducidas

^aWaldemar Barrera Vargas, ^bLuis M. Montes de Oca Mena, ^cMatías Navarro Soza,
^dDidier A. Solis Gamboa

^{a,b,c,d}Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán, México

^abvargas@uady.mx, ^bmau19248@hotmail.com, ^cnsoza@uady.mx, ^ddidier.solis@uady.mx

Resumen

Este trabajo es el primero de tres artículos en los que se pretende dar un panorama de los fundamentos de la teoría de espacios de Alexandrov, tomando como punto de partida elementos bien conocidos de geometría riemanniana y generalizándolos para dar origen a los conceptos más importantes en la teoría de espacios de curvatura acotada. En esta primera entrega abordaremos el estudio de las estructuras por caminos y métricas inducidas sobre espacios topológicos.

Abstract

This is the first of three papers in which we present a panoramic view on the basics of the theory of Alexandrov spaces. We take as a starting point well known properties of riemannian manifolds and use them as motivation in order to generalize the fundamental geometrical concepts to the category of spaces with bounded curvatures. The present work is devoted to the study of length structures and their induced metrics in topological spaces.

Keywords and phrases : Estructuras por caminos, espacio métrico de caminos, métricas inducidas

2010 *Mathematics Subject Classification* 53C21, 54E35 .

1. Introducción

La geometría riemanniana nos provee de una gran variedad de ejemplos que ilustran diversas propiedades geométricas que pueden explorarse en un contexto topológico o analítico. Algunas de estas propiedades están íntimamente relacionadas con la estructura diferencial de la variedad. Tal es el caso del concepto de la diferenciabilidad de curvas que resulta ser un elemento fundamental para definir la longitud de arco y con ello una estructura de espacio métrico.

Formalmente, si (M, g) es una variedad riemanniana y $\Omega(M)$ es el conjunto de curvas diferenciables a trozos en M , entonces la longitud de una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, $\gamma \in \Omega(M)$ es

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt.$$

Posteriormente se induce una función distancia $d_L : M \times M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, definida por

$$d_L(p, q) = \inf\{L(\gamma) : \gamma \in \Omega(p, q)\},$$

donde $\Omega(p, q)$ denota a todas las curvas diferenciables a trozos en M que conectan a p con q , y en el caso que $\Omega(p, q) = \emptyset$ se define $d_L(p, q) = \infty$. Luego (M, d_L) es un espacio métrico y su topología coincide con la topología de la variedad M . Vemos entonces que el funcional L guarda una estrecha relación con la topología de la variedad, y esto se refleja de manera clara en diversos resultados que establecen una conexión entre propiedades geométricas de (M, g) y propiedades del espacio métrico (M, d_L) . Quizá el ejemplo más conocido de esta relación es el célebre teorema de Hopf-Rinow, que establece que el espacio métrico (M, d_L) es completo si y sólo si la variedad (M, g) es geodésicamente completa. Más aún, bajo estas hipótesis M es geodésicamente conexa, es decir, dados dos puntos existe un segmento geodésico de longitud mínima que los une [11, 8].

En este sentido, observemos que una variedad riemanniana (M, g) contiene dos elementos importantes que permiten definir en ella una función distancia. Estos son, por un lado, la colección de curvas diferenciables a trozos $\Omega(M)$ y por otro, el funcional de longitud L , que depende de la métrica riemanniana asignada. En conjunto, dichos elementos forman lo que se conoce como una estructura por caminos en M . Esta construcción se puede generalizar de manera natural a un contexto no necesariamente diferenciable, obteniendo así ejemplos de espacios con propiedades geométricas similares a las que comunmente se observan en las variedades riemannianas, pero con una mayor diversidad [2, 3, 13].

2. Estructura por Caminos

Como se mencionó en la introducción, uno de los elementos importantes que conforman la geometría de una variedad es su estructura por caminos. Debido a que nuestro objetivo es ampliar el contexto a uno no diferenciable, en los sucesivos consideraremos un espacio topológico (X, τ) localmente compacto y Hausdorff. Recordemos que un *camino* en (X, τ) es una función continua $\gamma : I \rightarrow X$ definida en un intervalo conexo $I \subset \mathbb{R}$. A continuación enunciamos de manera formal este concepto.

Definición 2.1 (Estructura por caminos). Sea (X, τ) un espacio topológico. Una *estructura por caminos* en X es una clase A de caminos en X , los cuales llamaremos *admisibles*, junto con un mapeo $L : A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$, llamado *longitud de caminos*.

La clase A debe satisfacer las siguientes condiciones:

- (1) A es cerrado bajo restricciones: si $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ es un camino admisible y $a \leq c \leq d \leq b$, entonces la restricción $\gamma|_{[c, d]}$ de γ en $[c, d]$ es también un camino admisible, es decir $\gamma|_{[c, d]} \in A$.
- (2) A es cerrado bajo concatenaciones o productos de caminos: si un camino $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ es tal que sus restricciones $\gamma|_{[a, c]}$ y $\gamma|_{[c, b]}$ son ambos caminos admisibles, entonces también lo es γ , en tal caso escribiremos $\gamma = \gamma|_{[a, c]} \cdot \gamma|_{[c, b]}$.
- (3) A es cerrado bajo reparametrizaciones lineales: para un camino admisible $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ y un homeomorfismo $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ de la forma $\varphi(t) = st + r$, la composición $\gamma \circ \varphi$ es también un camino admisible.

El mapeo L debe tener las siguientes propiedades:

- (1) La longitud de caminos es aditiva: $L(\gamma|_{[a, b]}) = L(\gamma|_{[a, c]}) + L(\gamma|_{[c, b]})$ para cualquier $c \in [a, b]$.
- (2) Para un camino $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ de longitud finita, denotemos por $L(\gamma, a, t)$ a la longitud de la restricción $\gamma|_{[a, t]}$. Entonces la función $L(\gamma, a, \cdot)$ debe ser una función continua.
- (3) Dados $\gamma \in A$, donde $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ y $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ un homeomorfismo lineal de la forma $\varphi(t) = st + r$, se tiene que $L(\gamma \circ \varphi) = L(\gamma)$.

(4) Para cualquier vecindad U_x de $x \in X$ se debe cumplir que

$$\inf\{L(\gamma) : \gamma : [a, b] \rightarrow X, \gamma(a) = x, \gamma(b) \in X \setminus U_x\} > 0.$$

Las propiedades (1), (2) y (3) que satisfacen las longitudes de caminos se abstraen de manera natural de la longitud de arco definida en una variedad riemanniana, y debido a que en general una longitud de caminos no proviene de una integral, requerimos en particular la condición (4) para garantizar la no negatividad de L . Diremos además que un camino γ es *rectificable* si $L(\gamma) < \infty$. Si $\gamma : I \rightarrow X$ es un camino admisible, entonces denotaremos a la longitud del camino $\gamma|_{[a,b]}$ por $L(\gamma, a, b)$, es decir

$$L(\gamma, a, b) = L(\gamma|_{[a,b]}), \text{ para } [a, b] \subset I.$$

También definimos $L(\gamma, b, a) = -L(\gamma, a, b)$. Con esto último se tendrá la relación

$$L(\gamma, a, b) = L(\gamma, a, c) + L(\gamma, c, b), \quad \forall a, b, c \in I.$$

Eventualmente, algunos ejemplos conocidos de la literatura son ejemplos de estructuras por caminos, de forma que a continuación presentamos algunos de ellos.

Ejemplo 2.2. Tomemos a \mathbb{R}^2 con la topología usual, es decir, la topología generada por la métrica euclidiana d_E . Para dos puntos $x, y \in \mathbb{R}^2$ consideremos los caminos $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, que conectan x con y , de la forma ilustrada en la Figura 1. Es decir, curvas lineales a trozos con segmentos paralelos a los ejes coordenados. El conjunto A de todos estos caminos que conectan punto en \mathbb{R}^2 y la longitud de arco L usual en \mathbb{R}^2 forman una estructura por caminos (A, L) en \mathbb{R}^2 .

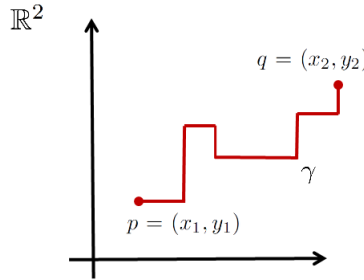


Figura 1: Caminos lineales a trozos.

Ejemplo 2.3. Consideremos un conjunto abierto y conexo $U \subset \mathbb{R}^n$ y denotemos por $\Omega(U)$ al conjunto de todas las curvas diferenciables a trozos en U . Sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función positiva y continua. Definimos la longitud de camino L de una curva $\gamma : I \rightarrow U$ por

$$L(\gamma) = \int_I f(\gamma(t)) \cdot |\gamma'(t)| dt.$$

Este último ejemplo resalta el hecho de que en ocasiones la longitud de un camino no siempre corresponde a su longitud de arco y que algunas veces podemos considerar otros factores en su definición. Concretamente, podemos pensar en una ciudad en la que para desplazarnos de un lugar a otro es necesario seguir el derrotero de las calles. Factores como el tráfico, la dirección del flujo y las condiciones del terreno influyen al momento de tomar la decisión de elegir el “camino más corto” para optimizar algún valor, como por ejemplo el tiempo [1].

Ejemplo 2.4. Una situación física de sumo interés que puede modelarse usando el ejemplo 2.3 es el de la propagación de los rayos de luz en un medio. De acuerdo al Principio de Fermat, el camino que un haz de luz sigue a través de un medio traslúcido corresponde al recorrido que minimiza el tiempo, por lo que la “longitud” del camino óptico γ sería en realidad el tiempo total del recorrido. Por ejemplo, si pensamos en

$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ como el interior de un recipiente lleno de un medio inhomogéneo cuyo índice de refracción $n(y)$ aumenta de manera lineal a medida que uno se aproxima al fondo del recipiente (es decir, a $y = 0$), entonces se tiene que la velocidad $v(y)$ de la onda luminosa satisface $v(y) = ds/dT$ y por tanto

$$dT = \frac{ds}{v(y)} = n(y)ds = n(y)|\gamma'|dt.$$

En consecuencia

$$L(\gamma) = \int_I dT = \int_I \frac{|\gamma'(t)|}{y(t)} dt.$$

Es decir, la longitud de caminos que se obtiene es justamente la correspondiente a la longitud de arco respecto a la métrica hiperbólica en el modelo del semiplano superior $\mathbb{H}^2 = (U, g_H)$. [12, 5]

3. Espacios Métricos por Caminos

Siguiendo la misma idea en como se induce la función distancia d_L en una variedad riemanniana (M, g) , consideremos una estructura por caminos (A, L) definida en (X, τ) . Para cualesquiera dos puntos $x, y \in X$ definimos la función distancia $d_L : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ asociada a la estructura por caminos (A, L) como sigue:

$$d_L(x, y) = \inf\{L(\gamma) : \gamma : [a, b] \rightarrow X, \gamma \in A, \gamma(a) = x, \gamma(b) = y\},$$

y en el caso de que no existan caminos que conectan a x con y se define $d_L(x, y) = \infty$. Esta construcción da lugar a una métrica definida en X como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 3.1. (X, d_L) es un espacio métrico y a la métrica d_L se le conoce como la *métrica inducida por la estructura por caminos* (A, L) .

Prueba. De las propiedades de L se tiene que $d_L(x, x) = 0$. Si $x \neq y$, como X es Hausdorff existe un abierto U_x , con $x \in U_x$, de manera que $y \notin U_x$ y por tanto

$$d_L(x, y) = \inf\{L(\gamma) : \gamma : [a, b] \rightarrow X, \gamma \in A, \gamma(a) = x, \gamma(b) = y \in X \setminus U_x\} > 0,$$

de nuevo por las características que satisface L . La simetría de d_L se debe al hecho de que para cada camino admisible $\gamma : [a, b] \rightarrow X$, con $\gamma(a) = x$ y $\gamma(b) = y$, la reparametrización lineal $\varphi : [a, b] \rightarrow [a, b]$ dada por

$$\varphi(t) = \frac{(a-t)a + (t-b)b}{a-b},$$

garantiza un camino admisible $\hat{\gamma} = \gamma \circ \varphi$, de manera que $\hat{\gamma}(a) = y$, $\hat{\gamma}(b) = x$ y $L(\gamma) = L(\hat{\gamma})$, y viceversa. Así que

$$\begin{aligned} d_L(x, y) &= \inf\{L(\gamma) : \gamma : [a, b] \rightarrow X, \gamma \in A, \gamma(a) = x, \gamma(b) = y\} \\ &= \inf\{L(\hat{\gamma}) : \hat{\gamma} : [a, b] \rightarrow X, \hat{\gamma} \in A, \hat{\gamma}(a) = y, \hat{\gamma}(b) = x\} \\ &= d_L(y, x). \end{aligned}$$

Por último mostremos la desigualdad triangular. Sean $x, y, z \in X$ y consideremos $\alpha : [a, b] \rightarrow X$, $\beta : [c, d] \rightarrow X$, $\alpha, \beta \in A$, de manera que $\alpha(a) = x, \alpha(b) = z = \beta(c), \beta(d) = y$. El homeomorfismo lineal $\psi : [b, b+1] \rightarrow [c, d]$

$$\psi(t) = (t-b)d + (b+1-t)c,$$

tiene la propiedad de que para la concatenación $\alpha \cdot (\beta \circ \psi)$ se cumple que

$$L(\alpha \cdot (\beta \circ \psi)) = L(\alpha) + L(\beta \circ \psi) = L(\alpha) + L(\beta),$$

esto quiere decir que el conjunto

$$\begin{aligned} C &= \{L(\alpha) + L(\beta) : \alpha, \beta : [a, b], [c, d] \rightarrow X, \alpha, \beta \in A, \alpha(a) = x, \alpha(b) = z = \beta(c), \beta(d) = y\} \\ &= \{L(\alpha) : \alpha : [a, b] \rightarrow X, \alpha \in A, \alpha(a) = x, \alpha(b) = z\} \\ &\quad + \{L(\beta) : \beta : [c, d] \rightarrow X, \beta \in A, \beta(c) = z, \beta(d) = y\} \end{aligned}$$

está contenido en el conjunto $B = \{L(\gamma) : \gamma : [e, f] \rightarrow X, \gamma \in A, \gamma(e) = x, \gamma(f) = y\}$, es decir $C \subset B$, entonces $\inf C \geq \inf B$. Como $d(x, z) + d(z, y)$ es igual a

$$\inf\{L(\alpha) + L(\beta) : \alpha, \beta : [a, b], [c, d] \rightarrow X, \alpha, \beta \in A, \alpha(a) = x, \alpha(b) = z = \beta(c), \beta(d) = y\},$$

se tiene la desigualdad pedida $d(x, z) + d(z, y) \geq d(x, y)$. \square

Ejemplo 3.2. Como habíamos notado anteriormente, la estructura por caminos L del ejemplo 2.4 coincide con la longitud de arco en el modelo hipérbolico del semiplano superior. Por lo tanto, la métrica inducida d_L es justamente la distancia hiperbólica

$$d_H(z, w) = 2 \tanh^{-1} \left| \frac{z - w}{z - \bar{w}} \right|. \quad z, w \in \mathbb{H}^2$$

Ejemplo 3.3. En el ejemplo 2.2 se define una estructura por caminos (A, L) , en donde A esta conformado por todas las curvas lineales a trozos con lados paralelos a los ejes y que conectan puntos de \mathbb{R}^2 . Debido a que la función L es la longitud de arco usual en \mathbb{R}^2 se tendrá que la longitud de cada uno de estos caminos es igual a la suma de las longitudes euclidianas de cada uno de los segmentos que forman el camino. Por ejemplo, si $\gamma_0 : [1, 7] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es el camino que conecta a $(1, 1)$ con $(4, 4)$ definido por

$$\gamma_0(t) = \begin{cases} (1, t) & 1 \leq t \leq 2 \\ (t-1, 2) & 2 < t \leq 3 \\ (2, t-1) & 3 < t \leq 5 \\ (t-3, 3) & 5 < t \leq 7 \end{cases}$$

entonces $L(\gamma_0) = 6$ debido a que γ_0 está compuesto por dos segmentos de longitud 1 y dos segmentos de longitud 2. Debido a la forma concreta de los caminos en la colección A , necesariamente se cumple que si $p = (x_1, y_1)$ y $q = (x_2, y_2)$ son dos puntos en \mathbb{R}^2 , entonces cualquier camino $\gamma \in A$ que conecte p con q tendrá que satisfacer $L(\gamma) \geq |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$, así que $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ es una cota inferior para el conjunto $C(p, q) = \{L(\gamma) : \gamma \in A, \gamma \text{ conecta a } p \text{ con } q\}$. Esto último implica que $d_L(p, q) \geq |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. No obstante, siempre podemos encontrar un camino γ_1 que satisfaga $L(\gamma_1) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ (ver Figura 2).

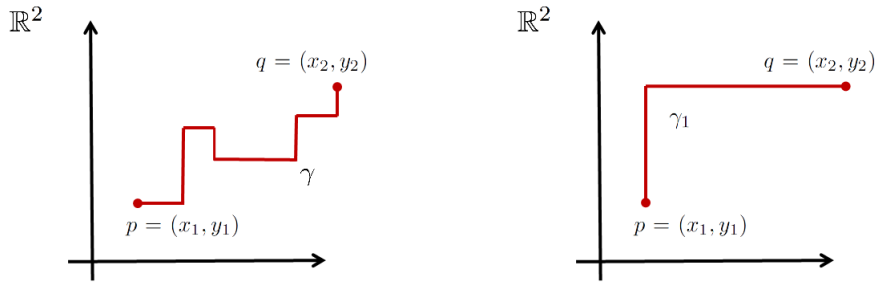


Figura 2: $L(\gamma_1) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$.

Así que por la desigualdad previa se obtiene que

$$d_L(p, q) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|.$$

La métrica d_L que se obtiene de este ejemplo es una métrica conocida como *métrica del taxi* y se denota por d_T . Dicho nombre proviene del parecido con que se miden las distancias entre diferentes puntos en una ciudad y por tanto se asemeja a la forma en que un taxi recorre las calles [7]. Así, vemos directamente de la definición que d_T es una métrica inducida por una estructura por caminos donde dados dos puntos existen caminos que realizan la distancia. Más adelante en esta sección estudiaremos con más detalle esta clase de espacios métricos (ver definición 3.8) y desarrollaremos técnicas para determinar cuando una métrica ha sido inducida por una estructura por caminos.

Notemos que el ejemplo 3.3 la métrica inducida d_T no coincide con la métrica euclidiana original d_E . Sin embargo, estas métricas son equivalentes ya que

$$d_T(p, q) \leq d_E(p, q) \leq \sqrt{2}d_T(p, q) \quad \forall p, q \in \mathbb{R}^2$$

y en consecuencia d_T y d_E generan la misma topología en \mathbb{R}^2 [10]. Sin embargo, en general la topología original τ no coincide con la topología que se genera a partir de la métrica d_L . No obstante, los caminos admisibles de la estructura por caminos siguen siendo continuos con la métrica d_L .

Proposición 3.4. Caminos admisibles de longitud finita son continuos respecto a (X, d_L) .

Prueba. Tomemos $\alpha : [a, b] \rightarrow X$ un camino admisible tal que $L(\alpha) < \infty$, y $\varepsilon > 0$. Sea $t_0 \in [a, b]$, como $L(\alpha, t_0, \cdot)$ es continua y $L(\alpha) < \infty$, entonces existe $\delta > 0$ de manera que $|L(\alpha, t_0, t)| < \varepsilon$ para $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. Esto significa que

$$\begin{aligned} d_L(\alpha(t_0), \alpha(t)) &= \inf\{L(\gamma) : \gamma : [c, d] \rightarrow X, \gamma \in A, \gamma(c) = \alpha(t_0), \gamma(d) = \alpha(t)\} \\ &\leq |L(\alpha, t_0, t)| < \varepsilon \end{aligned}$$

siempre que $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, lo que muestra la continuidad de α respecto a (X, d_L) . \square

Definición 3.5 (Espacio Métrico de Caminos). Una métrica que puede ser obtenida como la función distancia de una estructura por caminos es llamada *métrica intrínseca*. Un espacio métrico cuya métrica es intrínseca es llamado *espacio métrico de caminos*.

Debido a la forma en la que los espacios métricos de caminos se obtienen, estos satisfacen propiedades que están íntimamente relacionadas con los caminos que conectan puntos, su longitud y la métrica. En particular, dichos espacios resultan ser localmente conexos por caminos.

Proposición 3.6. Un espacio métrico de caminos es localmente conexo por caminos.

Prueba. Sea (X, d) un espacio métrico de caminos, es decir existe una estructura por caminos (A, L) de manera que $d_L = d$. Para cada $x \in X$ consideremos una vecindad U_x de x , entonces para cada $p \in U_x$ existe una bola abierta $B_r(p)$ con centro en p y radio r de forma que $B_r(p) \subset U_x$. Mostraremos que $B_r(p)$ es conexa por caminos. Sea $q \in B_r(p)$, entonces $d_L(p, q) < r$, esto quiere decir que el ínfimo

$$\inf\{L(\gamma) : \gamma(a) = p, \gamma(b) = q, \gamma \in A\} < r,$$

y para que esto suceda es necesario que exista $\gamma_q \in A$ con $\gamma_q(a) = p, \gamma_q(b) = q$ de manera que $L(\gamma_q) < r$ (si no existiera dicha γ_q entonces p y q se unen mediante caminos cuya longitud es mayor o igual que r , ó no existen caminos uniéndolos, que en cualquier caso contradice el hecho de que $q \in B_r(p)$), de esta forma siempre existe un camino (continuo con respecto a d_L por la proposición 3.4) uniendo p con q . Para cualesquiera puntos $q, q' \in B_r(p)$ siempre se pueden unir mediante la concatenación $\hat{\gamma}_q \cdot \gamma_{q'}$, donde $\hat{\gamma}_q$ es el camino que recorre γ_q pero en sentido contrario, es decir $\hat{\gamma}_q$ va de q a p siguiendo el camino de γ_q . Lo anterior muestra que (X, d_L) es localmente conexo por caminos. \square

Mediante la proposición anterior el siguiente ejemplo no puede ser un espacio métrico de caminos.

Ejemplo 3.7. Consideremos la unión de segmentos

$$[(0, 0), (1, 0)] \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} [(0, 0), (\cos(\pi/2j), \text{sen}(\pi/2j))],$$

en el plano euclideano, con la topología subespacio inducida por \mathbb{R}^2 , como se muestra en la Figura 3.

Observemos que cualquier bola con centro en el punto $(1/2, 0)$ y radio menor a $1/2$ no es conexa por caminos. Esto significa que dicho espacio, que se conoce como *bouquet de rayos*, no puede ser un ejemplo de espacio métrico de caminos.

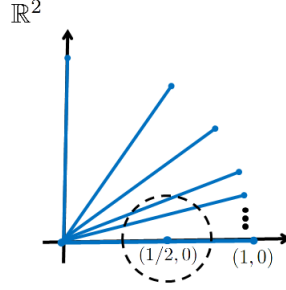


Figura 3: Bouquet de rayos.

Si bien la función d_L se obtiene de calcular un ínfimo, este no necesariamente se alcanza para algún camino admisible, es decir, no siempre existe un camino admisible γ de forma que $d_L(x, y) = L(\gamma)$. No obstante, la teoría muestra algunos ejemplos en los que esta situación si sucede.

Definición 3.8 (Estructura completa). Una estructura por caminos se dice *completa* si para cualesquiera dos puntos x, y existe un camino admisible uniéndolos cuya longitud es $d_L(x, y)$, es decir, existe un camino admisible de longitud mínima. Una métrica intrínseca asociada con una estructura por caminos completa se conoce como *estrictamente intrínseca*.

Usando la definición anterior, una variedad riemanniana (M, g) conexa y completa induce una estructura por caminos completa conformada por la longitud de arco (como la definida en la introducción) y las curvas diferenciables a trozos en M , así que la distancia inducida en una variedad riemanniana con tales propiedades es una métrica estrictamente intrínseca. No obstante, dentro del conjunto de las métricas intrínsecas siempre es posible encontrar algunas que no son estrictamente intrínsecas y por tanto se obtienen ejemplos de estructuras por caminos que no son completas, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.9. Consideremos en $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ al conjunto $A = \Omega(U)$ de todas las curvas diferenciables a trozos y L la longitud de arco usual, así que $A \subset \Omega(\mathbb{R}^2)$. Sean $p = (-1, 0)$ y $q = (0, 1)$ y demostremos que $d_L(p, q) = 2$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos la curva $\alpha_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ definida por

$$\alpha_n(t) = \begin{cases} (t, \frac{1}{n}(t+1)) & -1 \leq t \leq 0 \\ (t, \frac{1}{n}(1-t)) & 0 \leq t \leq 1 \end{cases},$$

Notemos que $L(\alpha_n) = \frac{2}{n}\sqrt{n^2+1}$, debido a que es la unión dos segmentos que unen los puntos $(-1, 0)$ con $(0, 1/n)$ y $(0, 1/n)$ con $(1, 0)$, además $\lim_{n \rightarrow \infty} L(\alpha_n) = 2$. De esta forma se obtiene la contención de conjuntos

$$\{L(\alpha_n) : n \in \mathbb{N}\} \subset \{L(\gamma) : \gamma \in A, \gamma \text{ conecta a } p \text{ con } q\} \subset \{L(\hat{\gamma}) : \hat{\gamma} \in \Omega(\mathbb{R}^2), \hat{\gamma} \text{ conecta } p \text{ con } q\},$$

además notemos que si d denota a la distancia euclidiana usual en \mathbb{R}^2 entonces

$$d(p, q) = \inf\{L(\hat{\gamma}) : \hat{\gamma} \in \Omega(\mathbb{R}^2), \hat{\gamma} \text{ conecta } p \text{ con } q\} = 2,$$

por lo tanto

$$2 = \inf\{L(\alpha_n) : n \in \mathbb{N}\} \geq \inf\{L(\gamma) : \gamma \in A, \gamma \text{ conecta a } p \text{ con } q\} \geq 2,$$

de donde $d_L(p, q) = \inf\{L(\gamma) : \gamma \in A, \gamma \text{ conecta a } p \text{ con } q\} = 2$. De las ecuaciones de Euler-Lagrange se tiene que la única curva $\gamma \in \Omega(\mathbb{R}^2)$ que cumple $L(\gamma) = 2$ es el segmento euclidiano que une p con q , pero sin embargo, dicho segmento no está en A porque el punto $(0, 0)$ no está en U . Esto último implica que (U, d_L) es un espacio métrico de caminos cuya métrica no es estrictamente intrínseca y su estructura por caminos no es completa.

En este punto, vale la pena señalar que si (A, L) es una estructura por caminos en X , entonces ella induce una estructura por caminos $(A|_E, L|_E)$ en cada $E \subset X$ de manera natural: $A|_E$ está formado por todos los caminos en A cuya imagen está contenida en E , y $L|_E$ es simplemente la restricción de L en $A|_E$.

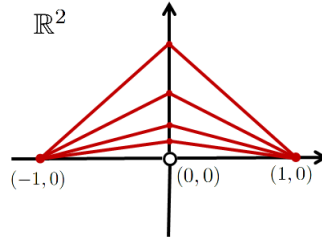


Figura 4: $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, d_L)$ no es un espacio estrictamente intrínseco.

Definición 3.10 (Estructura restringida). La estructura por caminos $(A|_E, L|_E)$ definida anteriormente se conoce como la *estructura por caminos restringida a E*

Finalizamos esta sección estableciendo la relación que existe entre $d_{L|_E}$ y d_L .

Proposición 3.11. Sea (A, L) una estructura por caminos en X y $E \subset X$, $E \neq \emptyset$. Entonces para cada $x, y \in E$ se cumple que $d_{L|_E}(x, y) \geq d_L(x, y)$.

Prueba. Debido a que $A|_E \subset A$, entonces se tiene la contención de conjuntos

$$\{L|_E(\gamma) : \gamma \text{ conecta a } x \text{ con } y, \gamma \in A|_E\} \subset \{L(\gamma) : \gamma \text{ conecta a } x \text{ con } y, \gamma \in A\}.$$

Por lo tanto

$$\inf\{L|_E(\gamma) : \gamma \text{ conecta a } x \text{ con } y, \gamma \in A|_E\} \geq \inf\{L(\gamma) : \gamma \text{ conecta a } x \text{ con } y, \gamma \in A\},$$

y así $d_{L|_E}(x, y) \geq d_L(x, y)$. □

Ejemplo 3.12. Consideremos el cubo $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| + |y| + |z| = 1\}$ y la estructura por caminos usual de \mathbb{R}^3 . En la Figura 5 podemos observar que $d_{L|_C}(p, q) = L(\gamma_0) = d_L(p, q)$ y $d_{L|_C}(a, b) = L(\gamma_1) > d_L(a, b)$. Por tanto en C existen regiones donde $d_{L|_C}$ y d_L coinciden y regiones donde la desigualdad es estricta.

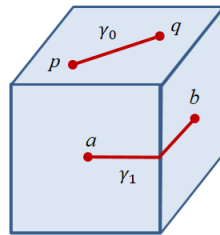


Figura 5: $d_{L|_C} \geq d_L$.

4. Estructuras por Caminos Inducidas por Métricas

En algunas ocasiones no es sencillo verificar que una métrica sea intrínseca, es decir, que una métrica provenga de una estructura por caminos. Sin embargo existe una manera natural de construir métricas intrínsecas usando la métrica del espacio métrico mismo. Así que en esta sección mostramos una manera de construir estructuras por caminos en espacios métricos utilizando la métrica del espacio.

4.1. Longitud de curvas en espacios métricos

En cálculo diferencial la longitud L de una curva diferenciable γ se puede aproximar mediante las longitudes de una curva poligonal γ_P formada por segmentos que se generan a partir de una partición P de γ . Al tomar el límite de $L(\gamma_P)$ cuando las particiones P son cada vez más pequeñas se obtiene $L(\gamma)$. Más aún, dicho resultado coincide con la longitud de arco usual que se obtiene al integrar la norma del vector tangente a la curva. Si bien la diferenciabilidad juega un papel importante en la geometría riemanniana, la idea primordial de tomar particiones y calcular sumas de longitudes de segmentos se puede implementar de forma general en un espacio métrico. La manera de hacer esto es como se menciona en la siguiente definición.

Definición 4.1. Sea (X, d) un espacio métrico y $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ un camino en X . Consideremos una *partición* P de $[a, b]$, esto es, una colección finita de puntos $P = \{p_0, p_1, \dots, p_N\}$ tal que $a = p_0 < p_1 < \dots < p_N = b$. El supremo de todas las sumas de la forma

$$S(P, \gamma, d) = \sum_{k=1}^N d(\gamma(p_{k-1}), \gamma(p_k)),$$

sobre todas las particiones P de $[a, b]$, es llamado *la longitud de γ , respecto de la métrica d* y la denotaremos por $L_d(\gamma)$. Una curva se dice *rectificable* si $L_d(\gamma)$ es finito. Escribiremos simplemente $S(P)$ cuando quede claro la curva γ y la métrica d que se esté utilizando, además usaremos la siguiente notación:

$$s(\gamma, d) = \{S(P, \gamma, d) : P \text{ es una partición del intervalo } [a, b]\},$$

por lo que $\sup_P \{s(\gamma, d)\} = L_d(\gamma)$ (Figura 6).

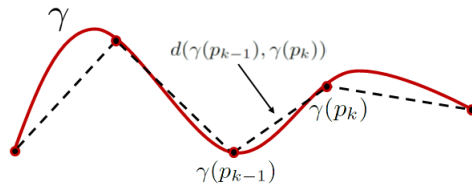


Figura 6: Poligonal.

Un ejemplo común e ilustrativo para entender la construcción previamente hecha es el siguiente.

Ejemplo 4.2. Consideremos \mathbb{R}^2 con la métrica euclidiana usual d , y sea L la longitud de arco estándar en \mathbb{R}^2 , entonces $L_d = L$. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva diferenciable en (a, b) y $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Tomemos $P_n = \{a = p_0, p_1, \dots, p_n = b\}$ una partición regular del intervalo $[a, b]$, es decir $p_k = a + k \frac{b-a}{n}$ para $0 \leq k \leq n$ y denotemos por $\Delta = \frac{b-a}{n}$. Por el teorema del valor intermedio existen $p_k^*, p_k^{**} \in [p_k, p_{k+1}]$ (para $0 \leq k \leq n-1$) de manera que

$$x(p_k) - x(p_{k+1}) = x'(p_k^*)\Delta \text{ y } y(p_k) - y(p_{k+1}) = y'(p_k^{**})\Delta,$$

así que

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} S(P_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} d(\gamma(p_k), \gamma(p_{k+1})) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x(p_k) - x(p_{k+1}))^2 + (y(p_k) - y(p_{k+1}))^2} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x'(p_k^*)\Delta)^2 + (y'(p_k^{**})\Delta)^2} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{x'(p_k^*)^2 + y'(p_k^{**})^2} \Delta,
\end{aligned}$$

y debido a que x' y y' son continuas se tendrá que

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{x'(p_k^*)^2 + y'(p_k^{**})^2} \Delta &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{x'(q_k)^2 + y'(q_k)^2} \Delta \\
&= \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \\
&= \int_a^b |\gamma'(t)| dt = L(\gamma).
\end{aligned}$$

Por el otro lado tenemos que

$$L_d(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(P_n),$$

y por lo tanto $L_d(\gamma) = L(\gamma)$.

Consideremos un camino $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ en un espacio métrico (X, d) . Es importante notar que debido a que $[a, b]$ es compacto de \mathbb{R} y γ es continua, en particular γ es uniformemente continua en $[a, b]$. Además, si γ es rectificable, entonces para cada ε existe una partición P del intervalo $[a, b]$ tal que $L_d(\gamma) - S(P) \leq \varepsilon$, esto porque si fijamos $k = L(\gamma) - \varepsilon$, entonces k no es cota superior del conjunto $s(\gamma, d)$ (debido a que $k < L(\gamma)$), así que debe existir una partición Q de $[a, b]$ de manera que $k \leq S(Q)$. Estas observaciones nos permitirán demostrar algunas propiedades importantes que la función L_d satisface, y que posteriormente le permitirán ser una longitud de camino.

Teorema 4.3 (Propiedades de la Longitud de Caminos Inducida). La longitud de caminos $L = L_d$ inducida por una métrica d posee las siguientes propiedades:

- (1) La desigualdad triangular: $L(\gamma) \geq d(\gamma(a), \gamma(b))$.
- (2) Aditividad: si $a < c < b$, entonces $L(\gamma, a, c) + L(\gamma, c, b) = L(\gamma)$. En particular, $L(\gamma, a, t)$ es una función no decreciente de t .
- (3) Continuidad sobre caminos: Si γ es rectificable, la función $L(\gamma|_{[c', c]}) = L(\gamma, c', c)$ es continua en c' y c .
- (4) Semicontinuidad: L es una funcional semi-continua por abajo en el espacio de funciones continuas de $[a, b]$ en X con respecto a la convergencia uniforme. Esto significa que para cada sucesión $\{\gamma_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de caminos rectificables con el mismo dominio de tal forma que $\gamma_k(t)$ converge uniformemente a $\gamma(t)$, cuando $k \rightarrow \infty$ y para cada t en el dominio, donde γ es rectificable, entonces $\liminf L(\gamma_k) \geq L(\gamma)$.

Prueba. (1) Dadas dos particiones P y P' tal que $P \subseteq P'$, entonces $S(P) \leq S(P')$, así que para cualquier partición $P = \{p_0, p_1, \dots, p_N\}$ se cumple que $S(P) \geq d(\gamma(p_0), \gamma(p_N)) = d(\gamma(a), \gamma(b))$, así que el supremo $L(\gamma)$ de todas las sumas $S(P)$ cumplirá $L(\gamma) \geq S(P) \geq d(\gamma(a), \gamma(b))$, es decir $L(\gamma) \geq d(\gamma(a), \gamma(b))$.

(2) Tomemos $c \in (a, b)$. Sean entonces $P = \{a, p_1, \dots, p_{n-1}, c\}$ y $Q = \{c, q_1, \dots, q_{m-1}, b\}$ particiones de $[a, c]$ y $[c, b]$, respectivamente. Notemos que $R = P \cup Q = \{a, p_1, \dots, c, q_1, \dots, b\}$ es una partición de $[a, b]$,

además $S(P) + S(Q) = S(R) \leq L(\gamma)$, así que $L(\gamma)$ es una cota superior del conjunto $s(\gamma|_{[a,c]}, d) + s(\gamma|_{[c,b]}, d)$ y entonces

$$\begin{aligned} L(\gamma, a, c) + L(\gamma, c, b) &= \sup s(\gamma|_{[a,c]}, d) + \sup s(\gamma|_{[c,b]}, d) \\ &= \sup(s(\gamma|_{[a,c]}, d) + s(\gamma|_{[c,b]}, d)) \\ &\leq \sup s(\gamma, d) = L(\gamma), \end{aligned}$$

es decir $L(\gamma, a, c) + L(\gamma, c, b) \leq L(\gamma)$. Por otro lado tomemos $R = \{a, p_1, \dots, p_{n-1}, b\}$ una partición de $[a, b]$, entonces existe j , con $1 \leq j \leq n-1$, de tal manera que $p_{j-1} < c \leq p_j$. Definamos $P = \{a, p_1, \dots, p_{j-1}, c\}$ y $Q = \{c, p_j, \dots, p_{n-1}, b\}$, y notemos que $L(\gamma, a, c) + L(\gamma, c, b) \geq S(P) + S(Q) \geq S(R)$, entonces $L(\gamma, a, c) + L(\gamma, c, b)$ es cota superior de $s(\gamma, d)$ y por lo tanto $L(\gamma, a, c) + L(\gamma, c, b) \geq L(\gamma)$. De lo anterior se concluye $L(\gamma, a, c) + L(\gamma, c, b) = L(\gamma)$. $L(\gamma, a, c)$ es una función no decreciente en c pues para cada $t \leq t'$ y para cada partición $P = \{a, p_1, \dots, p_{n-1}, t\}$ de $[a, t]$, se tendrá que si $P' = \{a, p_1, \dots, t, t'\}$ entonces $S(P) \leq S(P') + d(\gamma(t), \gamma(t')) = S(P')$, de esta forma $L(\gamma, a, t')$ es cota superior del conjunto $s(\gamma|_{[a,t]}, d)$ y por lo tanto $L(\gamma, a, t) \leq L(\gamma, a, t')$.

(3) Mostraremos que L es continua en c , $a < c \leq b$. Debemos mostrar que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de manera que si $|t - c| < \delta$ entonces $|L(\gamma, a, t) - L(\gamma, a, c)| < \varepsilon$. Notemos que por el inciso anterior se tiene que $|L(\gamma, a, t) - L(\gamma, a, c)| = |L(\gamma, t, c)|$ (dependiendo de si c es o no más grande que t), así que habrá que mostrar que $|L(\gamma, t, c)| < \varepsilon$.

Sea $\varepsilon > 0$, como $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ es uniformemente continua por las observaciones previas, entonces existe $\delta > 0$ de manera que

$$d(\gamma(t), \gamma(t')) < \frac{\varepsilon}{2},$$

para toda $t, t' \in [a, b]$ tal que $|t - t'| < \delta$. Además como γ es rectificable existe una partición $P = \{a = p_0, p_1, \dots, p_N = b\}$ tal que

$$S(P) + \frac{\varepsilon}{2} \geq L(\gamma).$$

Tomemos una partición $Q = \{a = q_0, \dots, q_M = b\}$ tal que $P \subset Q$ y de manera que $|q_j - q_{j+1}| < \delta$ para $j = 0, \dots, M-1$, y por lo tanto $d(\gamma(q_j), \gamma(q_{j+1})) < \varepsilon/2$, además es claro que $S(P) \leq S(Q)$. Usando la propiedad (1) se cumple que $L(\gamma|_{[q_j, q_{j+1}]}) \geq d(\gamma(q_j), \gamma(q_{j+1}))$ y usando (2) se satisface

$$L(\gamma) = \sum_{j=0}^{M-1} L(\gamma|_{[q_j, q_{j+1}]})$$

entonces

$$\sum_{j=0}^{M-1} d(\gamma(q_j), \gamma(q_{j+1})) + \frac{\varepsilon}{2} = S(Q) + \frac{\varepsilon}{2} \geq S(P) + \frac{\varepsilon}{2} \geq L(\gamma) = \sum_{j=0}^{M-1} L(\gamma|_{[q_j, q_{j+1}]})$$

es decir

$$\sum_{j=0}^{M-1} L(\gamma|_{[q_j, q_{j+1}]}) - \sum_{j=0}^{M-1} d(\gamma(q_j), \gamma(q_{j+1})) \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

lo que significa que para cada j se cumple que $L(\gamma|_{[q_j, q_{j+1}]}) - d(\gamma(q_j), \gamma(q_{j+1})) \leq \varepsilon/2$. En conclusión

$$L(\gamma|_{[q_j, q_{j+1}]}) \leq d(\gamma(q_j), \gamma(q_{j+1})) + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$L(\gamma|_{[q_j, q_{j+1}]}) < \varepsilon$. En particular si agregamos c a la partición Q y cada vez que tomemos $|t - c| < \delta$ se cumplirá $|L(\gamma|_{[c, t]})| < \varepsilon$ (depende de que $t > c$ ó $t < c$).

(4) Si γ es rectificable existe una partición $P = \{a = p_0, \dots, p_N = b\}$ tal que

$$L(\gamma) \leq S(P) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Escojamos N lo suficientemente grande de manera que $d(\gamma(t), \gamma_n(t)) < \frac{\varepsilon}{4N}$ para toda $n \geq N$ y $t \in [a, b]$ (existe de la convergencia $\gamma_n \rightarrow \gamma$). Usando la desigualdad triangular obtenemos

$$\begin{aligned} d(\gamma(p_j), \gamma(p_{j+1})) &\leq d(\gamma(p_j), \gamma_n(p_j)) + d(\gamma_n(p_{j+1}), \gamma_n(p_{j+1})) + d(\gamma_n(p_{j+1}), \gamma(p_{j+1})) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4N} + d(\gamma_n(p_{j+1}), \gamma_n(p_{j+1})) + \frac{\varepsilon}{4N} \\ &= d(\gamma_n(p_{j+1}), \gamma_n(p_{j+1})) + \frac{\varepsilon}{2N}, \end{aligned}$$

así que

$$d(\gamma(p_j), \gamma(p_{j+1})) \leq d(\gamma_n(p_{j+1}), \gamma_n(p_{j+1})) + \frac{\varepsilon}{2N}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} L(\gamma) &\leq S(P) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} d(\gamma(p_j), \gamma(p_{j+1})) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \sum_{j=0}^{N-1} \left(d(\gamma_n(p_{j+1}), \gamma_n(p_{j+1})) + \frac{\varepsilon}{2N} \right) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= N \frac{\varepsilon}{2N} + \sum_{j=0}^{N-1} d(\gamma_n(p_{j+1}), \gamma_n(p_{j+1})) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq L(\gamma_n) + \varepsilon, \end{aligned}$$

es decir $L(\gamma) \leq L(\gamma_n) + \varepsilon$, lo que muestra que

$$\liminf L(\gamma_n) \geq L(\gamma).$$

□

En general, la funcional L no es continua, como se observa en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.4. Consideremos el espacio euclidiano (\mathbb{R}^2, d_E) con la estructura por caminos usual. Dados dos puntos $p = (x_1, y_1), q = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ tomemos una sucesión de curvas lineales a trozos como se muestra en la Figura 7. La sucesión de caminos $\{\gamma_n\}$ converge uniformemente al segmento rectilíneo que une p con q , y cada camino tiene la misma longitud $L_1 = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$, pero el segmento rectilíneo al que convergen tienen longitud $L_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, y $L_1 > L_2$ para puntos p, q que no estén sobre la misma recta horizontal o vertical.

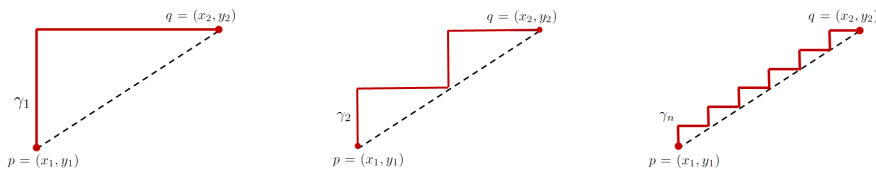


Figura 7: Funcional L no continua.

Con las propiedades del teorema 4.3 podemos verificar que la longitud inducida por la métrica es de hecho una función longitud de camino de una estructura por caminos, donde el conjunto de funciones admisibles son todas aquellas funciones continuas de intervalos cerrados a X .

Teorema 4.5. En un espacio métrico (X, d) , el conjunto A de todas las funciones continuas de intervalos cerrados a X y la función L_d , forman un estructura por caminos (A, L_d) en X , a ésta se le conoce como la estructura por caminos inducida por d .

Prueba. Las condiciones de la definición 2.1 las satisface el conjunto A , debido a que A es el conjunto de todos los mapeos continuos de intervalos cerrados en X . Verifiquemos entonces que L_d es una longitud de camino. De la proposición 4.3 se muestra que L_d es aditiva y que la función $L(\gamma|_{[a,t]})$ es continua para cada $t \in [a, b]$ para un camino $\gamma : [a, b] \rightarrow X$. Faltará mostrar que

- (1) Para $\gamma \in A$ y φ un homeomorfismo lineal tal que la composición $\gamma \circ \varphi$ existe, se tiene que $L_d(\gamma \circ \varphi) = L_d(\gamma)$.
- (2) Para cualquier vecindad U_x de $x \in X$ se debe cumplir que

$$\inf\{L(\gamma) : \gamma : [a, b] \rightarrow X, \gamma(a) = x, \gamma(b) \in X \setminus U_x\} > 0.$$

(1) Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ y $\varphi : [p, q] \rightarrow [a, b]$ un homeomorfismo lineal, bastará mostrar que $s(\gamma \circ \varphi, d) = s(\gamma, d)$. Sea $P = \{p_0, \dots, p_{N+1}\}$ una partición de $[a, b]$, definamos $Q = \{\varphi^{-1}(p_j)\}_{j=0}^N$, la cual es una partición de $[p, q]$ porque φ^{-1} es un homeomorfismo lineal. Además

$$S(Q, \gamma \circ \varphi, d) = \sum_{k=1}^N d((\gamma \circ \varphi)(\varphi^{-1}(p_{k-1})), (\gamma \circ \varphi)(\varphi^{-1}(p_k))) = \sum_{k=1}^N d(\gamma(p_{k-1}), \gamma(p_k)) = S(P, \gamma, d),$$

de donde $S(P, \gamma, d) \in s(\gamma \circ \varphi, d)$, es decir $s(\gamma, d) \subset s(\gamma \circ \varphi, d)$ para cada homeomorfismo lineal φ . Como lo anterior se cumple para cada camino γ y homeomorfismo lineal φ , entonces en particular

$$s(\gamma \circ \varphi, d) \subset s((\gamma \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}, d) = s(\gamma, d),$$

por lo tanto se tiene la otra contención $s(\gamma \circ \varphi, d) \subset s(\gamma, d)$. En conclusión $s(\gamma \circ \varphi, d) = s(\gamma, d)$ y así

$$L_d(\gamma \circ \varphi) = \sup s(\gamma \circ \varphi, d) = \sup s(\gamma, d) = L_d(\gamma),$$

esto es $L_d(\gamma \circ \varphi) = L_d(\gamma)$.

(2) Sea $x \in X$ y U_x una vecindad de x , entonces existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset U_x$. Notemos que para cada punto $y \in X \setminus U_x$ se tiene que $d(x, y) > r$, debido a que $B_r(x) \cap X \setminus U_x = \emptyset$. Lo anterior significa que las longitudes de curvas que conectan x con puntos de $X \setminus U_x$ satisfacen que $L(\gamma) \geq d(\gamma(a), \gamma(b)) > r$, donde $\gamma : [a, b] \rightarrow X$, $\gamma(a) = x$ y $\gamma(b) \in X \setminus U_x$. Es decir

$$\inf\{L(\gamma) : \gamma : [a, b] \rightarrow X, \gamma(a) = x, \gamma(b) \in X \setminus U_x\} \geq r > 0.$$

□

4.2. Métrica Intrínseca Inducida

Una vez construida la estructura por caminos (A, L_d) que depende de la métrica d de un espacio métrico, podemos contruir una nueva métrica d_{L_d} , que por definición debe ser intrínseca debido que provino de una estructura por caminos. Así, obtenemos un espacio métrico (X, \hat{d}) , donde $\hat{d} = d_{L_d}$, cuya métrica es intrínseca. Esta métrica se llama *métrica intrínseca inducida*. Como consecuencia de esto último podemos contruir espacios métricos de caminos mediante la métrica de un espacio métrico.

Ejemplo 4.6. La métrica intrínseca inducida por la restricción de la distancia euclidiana d_E , en el círculo $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$, es la métrica angular. Debido al ejemplo 4.2 la función L_{d_E} resulta ser la longitud de arco usual en \mathbb{R}^2 . Ahora bien, si $p, q \in \mathbb{S}^1$ entonces p y q delimitan dos porciones de arco en \mathbb{S}^1 , digamos γ_1 y γ_2 . En el caso de que p y q no son puntos diametralmente opuestos se debe cumplir que $L_d(\gamma_1) < \pi$ y $L_d(\gamma_2) > \pi$, esto quiere decir que cualquier curva γ que conecte p con q deberá de cumplir que $L_d(\gamma) \geq L_d(\gamma_1)$. En conclusión

$$\hat{d}(p, q) = \inf\{L(\gamma) : \gamma \text{ conecta a } p \text{ con } q\} = L_d(\gamma_1),$$

y esta última es la métrica angular.

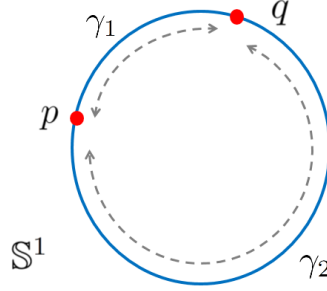


Figura 8: Métrica angular.

El ejemplo anterior nos muestra que de hecho la métrica inducida \hat{d} es estrictamente más grande que la original d , es decir $\hat{d}(p, q) > d(p, q)$ si $p \neq q$. Observemos además que \mathbb{S}^1 hereda la topología subespacio que se genera por la métrica euclidiana en \mathbb{R}^2 , y que denotaremos por τ . Por otro lado, la métrica inducida \hat{d} induce una topología en \mathbb{S}^1 , es decir la topología $\tau_{\hat{d}}$. Lo interesante de este ejemplo es que se tiene la igualdad $\tau = \tau_{\hat{d}}$, sin importar que la métrica \hat{d} sea más grande que d .

En general, la métrica intrínseca inducida \hat{d} no coincide con la métrica original d , pero siempre es posible compararlas.

Proposición 4.7. Sea (X, d) un espacio métrico, entonces $\hat{d} \geq d$.

Prueba. Notemos que si $L_d(\gamma) \geq d(x, y)$ para cualquier curva γ que conecte x con y , entonces en particular $\hat{d}(x, y) = d_{L_d}(x, y) \geq d(x, y)$, debido a que $\hat{d}(x, y)$ es el ínfimo de las longitudes de curva que conectan x con y . Esto significa que $\hat{d}(x, y) \geq d(x, y)$ para cada $x, y \in X$ y se concluye que $\hat{d} \geq d$. \square

Ejemplo 4.8. Consideremos en \mathbb{R}^2 la siguiente métrica. Para $x = (x_1, y_1)$ y $y = (x_2, y_2)$ definimos

$$d(x, y) = |x_1 - x_2| + \sqrt{|y_1 - y_2|}.$$

La positividad y simetría se tienen de la definición de d . Por otro lado sean $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$, $c = (c_1, c_2)$ puntos de \mathbb{R}^2 , entonces usando la desigualdad triangular del valor absoluto se tendrá

$$\begin{aligned} d(a, c) + d(c, b) &= |a_1 - c_1| + \sqrt{|a_2 - c_2|} + |c_1 - b_1| + \sqrt{|c_2 - b_2|} \\ &= (|a_1 - c_1| + |c_1 - b_1|) + (\sqrt{|a_2 - c_2|} + \sqrt{|c_2 - b_2|}) \\ &\geq |a_1 - b_1| + \sqrt{|a_2 - c_2| + |c_2 - b_2|} \\ &\geq |a_1 - b_1| + \sqrt{|a_2 - b_2|} \\ &= d(a, b), \end{aligned}$$

de donde d es una métrica para \mathbb{R}^2 . Calculemos ahora la métrica intrínseca inducida por d . Para ello consideremos los siguientes casos:

- (1) Tomemos dos puntos en la recta $y = c$, por ejemplo $A = (a, c)$ y $B = (b, c)$. Notemos que cualquier camino $\gamma : [p, q] \rightarrow \mathbb{R}^2$ que conecte A con B , es decir $\gamma(p) = A$ y $\gamma(q) = B$, se puede escribir en la forma $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ donde $\gamma_j : [p, q] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua para cada $t \in [p, q]$ y $j = 1, 2$, además para cualquier partición $P = \{p = p_0, p_1, \dots, p_{N-1}, p_N = q\}$ se cumple que

$$\begin{aligned} S(P) &= \sum_{k=0}^{N-1} d(\gamma(p_k), \gamma(p_{k+1})) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(|\gamma_1(p_k) - \gamma_1(p_{k+1})| + \sqrt{|\gamma_2(p_k) - \gamma_2(p_{k+1})|} \right) \\ &\geq \sum_{k=0}^{N-1} |\gamma_1(p_k) - \gamma_1(p_{k+1})| \\ &\geq |\gamma_1(p_0) - \gamma_1(p_N)| = |a - b|. \end{aligned}$$

En particular $L_p(\gamma) = \sup s(\gamma, d) \geq |a - b|$. Si $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es el camino definido por $\gamma(t) = (a(1-t) + bt, c)$ (notar que $\gamma_1(t) = a(1-t) + bt$ es una función estrictamente creciente ó estrictamente decreciente en $[0, 1]$, y dependerá de que si $a > b$ ó $b > a$, respectivamente), entonces

$$\begin{aligned} L_d(\gamma) &= \sup \sum_{k=0}^{N-1} \left(|(a(1-p_k) + bp_k) - (a(1-p_{k+1}) + bp_{k+1})| + \sqrt{|c-c|} \right) \\ &= \sup |a-b| = |a-b|, \end{aligned}$$

esto significa que $\inf\{L_d(\alpha) : \alpha \text{ conecta } A \text{ con } B\} = L_d(\gamma) = |a-b|$, es decir $d_{L_d}(A, B) = |a-b|$.

- (2) Sean $A = (p, c_1)$ y $B = (p, c_2)$ tal que $c_1 \neq c_2$, y consideremos la función $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\alpha(t) = (p, (1-t)c_1 + tc_2)$, es decir el segmento vertical que une A con B . Probemos que α es continua respecto a d en todo $[0, 1]$. Sea $t_0 \in [0, 1]$, $\varepsilon > 0$ y tomemos $\delta = \frac{\varepsilon^2}{|c_1 - c_2|}$. Sea $t \in [0, 1]$ tal que $|t - t_0| < \delta$, y veamos que

$$\begin{aligned} d(\alpha(t), \alpha(t_0)) &= |p - p| + \sqrt{|(1-t)c_1 + tc_2 - ((1-t_0)c_1 + t_0c_2)|} \\ &= \sqrt{|t_0 - t| |c_1 - c_2|} < \varepsilon, \end{aligned}$$

de donde $d(\alpha(t), \alpha(t_0)) < \varepsilon$ y así α es continua. Calculemos ahora $L_d(\alpha)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos la partición $P_n = \{t_k\}_{k=0}^n$ de $[0, 1]$, dada por

$$t_k = \frac{k}{n},$$

y observemos que

$$\begin{aligned} S(P_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} d(\alpha(t_k), \alpha(t_{k+1})) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} d((p, (1-t_k)c_1 + t_kc_2), (p, (1-t_{k+1})c_1 + t_{k+1}c_2)) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{|t_{k+1} - t_k| |c_1 - c_2|} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}} |c_1 - c_2| \\ &= \frac{n}{\sqrt{n}} |c_1 - c_2| = \sqrt{n} |c_1 - c_2|. \end{aligned}$$

Así $S(P_n) = \sqrt{n} |c_1 - c_2|$. Esto último significa que $L_d(\alpha) = \infty$.

Ahora, sea β un camino que conecta A con B y sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t))$. Como $\beta(t)$ es continua respecto a d entonces β_2 también es una función continua en $[0, 1]$, por lo que el teorema del valor intermedio garantiza que existen $r, s \in [0, 1]$ tales que $m = \beta_2(r) \leq \beta_2(t) \leq \beta_2(s) = M$ para cada $t \in [0, 1]$. Sea $\bar{\alpha} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ el segmento vertical que une el punto (p, m) con (p, M) , y por el argumento visto previamente se cumple que $\bar{\alpha}$ es continua respecto a d y además $L_d(\bar{\alpha}) = \infty$, además escribamos $\bar{\alpha}(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$. Sea $P = \{0 = p_0 < p_1 < \dots < p_n = 1\}$ una partición de $[0, 1]$, entonces usando la continuidad de β_2 y el teorema del valor intermedio, existen $t_1 < \dots < t_{n-1}$ tal que $\beta_2(t_k) = \bar{\alpha}_2(p_k)$, así que consideremos la

partición $P' = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1\}$. Observemos que

$$\begin{aligned}
 S(P', \beta) &= \sum_{k=0}^{n-1} d(\beta(t_k), \beta(t_{k+1})) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} |\beta_1(t_k) - \beta_1(t_{k+1})| + \sqrt{|\beta_2(t_k) - \beta_2(t_{k+1})|} \\
 &\geq \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{|\beta_2(t_k) - \beta_2(t_{k+1})|} \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{|\alpha_2(t_k) - \alpha_2(t_{k+1})|} \\
 &= S(P, \alpha),
 \end{aligned}$$

es decir, que para cada partición P existe otra partición P' tal que $S(P', \beta) \geq S(P, \alpha)$, pero como $L_d(\bar{\alpha}) = \infty$, entonces necesariamente $\sup S(P', \beta) = \infty$. Esto último significa que $L_d(\beta) = \infty$ y por tanto, como cualquier curva que conecta a A con B tiene longitud infinita, entonces $\hat{d}(A, B) = \infty$.

- (3) Por último sean $A = (a, b)$ y $B = (c, d)$ tal que $a \neq c$ y $b \neq d$ y consideremos el punto $C = (a, d)$. Usando (1) y (2) se tiene que $\hat{d}(A, C) = \infty$ y $\hat{d}(B, C) = |a - c|$, de forma que usando la desigualdad triangular de \hat{d} (por que \hat{d} es métrica) se tendrá que

$$\hat{d}(A, B) + \hat{d}(B, C) \geq \hat{d}(A, C) = \infty,$$

y debido a que $\hat{d}(B, C) = |a - c| < \infty$ se tiene que necesariamente $\hat{d}(A, B) = \infty$.

Lo anterior quiere decir que el espacio métrico de caminos que se induce debido a la métrica $\hat{d} = d_{L_d}$ coincide con la métrica estándar en \mathbb{R} para cada línea $y = c$ y para dos puntos en rectas horizontales diferentes, la distancia entre ellos es ∞ . El espacio métrico resultante se conoce como *continuo de rectas reales disjuntas*.

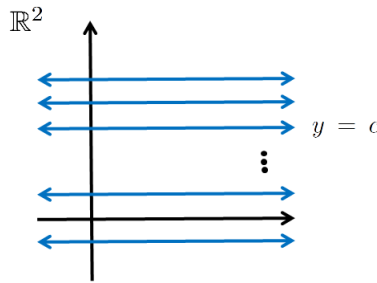


Figura 9: Continuo de rectas reales disjuntas.

Como comentario adicional, la métrica d induce la misma topología que la topología usual de \mathbb{R}^2 . No obstante, la topología que induce la métrica \hat{d} es completamente diferente. De hecho, este ejemplo muestra que el paso de d a \hat{d} no es dimensionalmente invariante, ya que los abiertos respecto a d son de dimensión 2 (por ser abiertos euclidianos usuales de \mathbb{R}^2), en tanto que los abiertos respecto a \hat{d} son de dimensión 1, ya que son intervalos abiertos contenidos en una recta horizontal. Otra situación que puede ocurrir con la métrica intrínseca inducida está relacionada con la convergencia de sucesiones, y para ello mostramos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.9. Consideremos el bouquet de rayos U definido en el ejemplo 3.7. La sucesión de puntos $P_j = \{(\cos \pi/2j, \sin \pi/2j)\}$, para $j \in \mathbb{N}$, converge al punto $(1, 0)$ con la topología subespacio que hereda de \mathbb{R}^2 , topología inducida por la métrica estándar d_E en \mathbb{R}^2 . Notemos que cualquier camino α que conecte

dos puntos cualesquiera de la sucesión P_j , digamos P_n y P_m contiene al punto $(0, 0)$. Esto quiere decir que $L_{d|_U}(\alpha) \geq 2$, en particular $d|_U(P_n, P_m) = \inf\{L(\alpha) : \alpha \text{ conecta a } P_n \text{ con } P_m\} = L_{d|_U}(\gamma) = 2$, donde γ es la curva que se forma mediante la unión de los segmentos $[P_n, (0, 0)]$ y $[P_m, (0, 0)]$. Entonces la sucesión $\{P_j\}$ diverge con la métrica $d|_U$.

Ejemplo 4.10 (Métrica del Centro). Consideremos en \mathbb{R}^2 la métrica definida por

$$d(u, v) = ||u| - |v|| + \min\{|u|, |v|\} \cdot \sqrt{\angle(u, v)},$$

para cada $u, v \in \mathbb{R}^2$ y donde $\angle(u, v)$ denota el ángulo euclidiano (no dirigido) entre los vectores v y w . Sea $w = (w_1, w_2) \neq (0, 0)$, entonces probemos que la función $\gamma_w : [0, |w|] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\gamma_w(t) = (tw_1, tw_2)$ es continua respecto de d en cada punto $a \in [0, |w|]$. Antes de probar esto notemos que para cualesquiera $t, t' \in [0, |w|]$ se cumple que $\angle(\gamma_w(t), \gamma_w(t')) = 0$. Tomemos entonces $\varepsilon > 0$ y sea $\delta = \frac{\varepsilon}{|w|}$, así que para cada $t \in [0, |w|]$ tal que $|t - a| < \delta$ se tiene que

$$\begin{aligned} d(\gamma_w(t), \gamma_w(a)) &= \left| |\gamma_w(t)| - |\gamma_w(a)| \right| + \min\{|\gamma_w(t)|, |\gamma_w(a)|\} \cdot 0 \\ &= \left| \sqrt{t^2 w_1^2 + t^2 w_2^2} - \sqrt{a^2 w_1^2 + a^2 w_2^2} \right| \\ &= |t - a| |w| \\ &< \frac{\varepsilon}{|w|} \cdot |w| = \varepsilon, \end{aligned}$$

lo que muestra que γ_w es continua respecto de la métrica d . Si $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ entonces los caminos admisibles γ_{w_1} y γ_{w_2} producen el camino admisible $\gamma_{w_1} \cdot \gamma_{w_2} : [-|w_1|, |w_2|] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Cabe decir que los únicos caminos admisibles entre w_1 y w_2 son precisamente concatenaciones de la forma $\gamma_{w_1} \cdot \gamma_{w_2}$. Además como d restringida a γ_w coincide con la métrica euclidiana, se tiene que L_d es la longitud de arco usual en \mathbb{R}^2 y por lo tanto $L_d(\gamma_w) = |w|$. Esto significa que para dos vectores u, v tales que $\angle(u, v) = 0$ se tendrá $L_d(\gamma_w) \geq d(u, v) = ||u| - |v||$ para cualquier camino γ_w que conecte u con v , además hay que notar que el segmento euclidiano $[u, v]$ que une u con v cumple $L_d([u, v]) = ||u| - |v||$. De lo anterior se tiene que

$$\begin{aligned} d_{L_d}(u, v) &= \inf\{L_d(\gamma) : \gamma \text{ conecta } u \text{ con } v\} \\ &= L_d([u, v]) \\ &= ||u| - |v||. \end{aligned}$$

En el caso de que $\angle(u, v) \neq 0$ se tiene

$$d_{L_d}(u, v) = L_d(\gamma_u) + L_d(\gamma_v) = |u| + |v|.$$

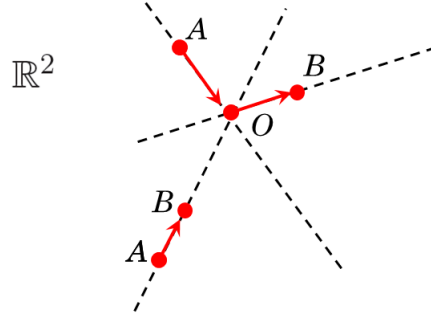
En ambos casos el ínfimo se alcanza. Lo anterior se resume en la expresión

$$d_{L_d}(u, v) = \begin{cases} ||u| - |v|| & \angle(u, v) = 0 \\ |u| + |v| & \angle(u, v) \neq 0 \end{cases}$$

Notemos que d_{L_d} coincide con la métrica del centro d_C descrita en [9]. Esta métrica modela muchas situaciones relacionada con el transporte de carga o pasajeros, en la que todas las rutas necesariamente llegan a un punto fijo, sea este una terminal de autobuses o un centro de distribución. Un claro ejemplo es la ciudad de Mérida, en la que la mayoría de los transportes urbanos tienen sus bases en el centro de la ciudad. Por ejemplo para ir en transporte urbano del punto A al punto B se tendría que seguir un camino como el que se muestra en la Figura 10.

Lo que hemos hecho hasta el momento es que dada una métrica d , inducimos L_d para luego obtener una nueva métrica $\hat{d} = d_{L_d}$, sin embargo no perdamos de vista que \hat{d} es una métrica, y por lo tanto debería poderse calcular $\hat{\hat{d}}$, siguiendo así con el proceso sucesivamente. Un hecho importante para nosotros es que el proceso anterior tiene un límite, en el sentido de que seguir calculando la métrica inducida no nos lleva a ningún otro sitio.

Proposición 4.11. Sean (X, d) un espacio métrico y $\hat{d} = d_{L_d}$, es decir la métrica intrínseca inducida por d .

Figura 10: La métrica del centro d_C .

- (1) Si γ es una curva rectificable en (X, d) , entonces $L_{\hat{d}}(\gamma) = L_d(\gamma)$.
- (2) La métrica inducida por \hat{d} coincide con \hat{d} . En otras palabras, inducir una métrica intrínseca es una operación idempotente.

Prueba. (1) Sea (X, d) un espacio métrico y $x, y \in X$. Debido a la proposición 4.7 se tiene que $L_{\hat{d}} \geq L_d$, así que falta por probar la desigualdad contraria $L_d \geq L_{\hat{d}}$. Sea entonces $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ y $P = \{a = p_0, p_1, \dots, p_N = b\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. Notemos que $\hat{d}(\gamma(p_j), \gamma(p_{j+1})) \leq L_d(\gamma|_{[p_j, p_{j+1}]})$, porque del lado izquierdo de la desigualdad se tiene el ínfimo de todas las longitudes de curva que conectan $\gamma(p_j)$ con $\gamma(p_{j+1})$. Entonces

$$\begin{aligned}
 S(P, \gamma, \hat{d}) &= \sum_{j=1}^N \hat{d}(\gamma(p_j), \gamma(p_{j+1})) \\
 &\leq \sum_{j=1}^N L_d(\gamma|_{[p_j, p_{j+1}]}) \\
 &= L_d(\gamma|_{[a, p_2]} \cdot \gamma|_{[p_2, p_3]} \cdots \gamma|_{[p_{N-1}, b]}) \\
 &= L_d(\gamma).
 \end{aligned}$$

Como la partición P es arbitraria, entonces el supremo de $S(P, \gamma, \hat{d})$ es menor o igual que $L_d(\gamma)$, es decir $L_{\hat{d}}(\gamma) \leq L_d(\gamma)$.

(2) Como $L_{\hat{d}}(\gamma) = L_d(\gamma)$, para cada γ , entonces $\hat{\hat{d}} = \hat{d}$, esto significa que la métrica intrínseca inducida por \hat{d} coincide con d . \square

4.3. Caracterización de Métricas Intrínsecas

Recordemos que la métrica intrínseca inducida \hat{d} se construye únicamente a partir de una métrica d . Además, un hecho importante es que $\hat{\hat{d}} = \hat{d}$. En este sentido, la pregunta inmediata que debemos hacernos es la siguiente: ¿qué sucede si d es intrínseca desde el inicio?.

Proposición 4.12. Sea (X, d) un espacio métrico de caminos y \hat{d} la métrica intrínseca inducida por d . Entonces $\hat{d} = d$.

Prueba. Tomemos $x, y \in X$ y sea L la longitud de camino que define a d , así que la longitud de camino inducido por d es L_d . Nótese que $L_d(\gamma) \leq L(\gamma)$ para cualquier curva admisible rectificable que conecte a x con y (el argumento es similar al de la prueba anterior), así que $\hat{d}(x, y) \leq d(x, y)$. Por la proposición 4.7 se tendrá que $\hat{d}(x, y) \geq d(x, y)$, esto implica la igualdad $\hat{d} = d$. \square

Recapitulando, debido a que \hat{d} es intrínseca entonces la igualdad $d = \hat{d}$ implica que d también lo es. Por el contrario, si d es intrínseca entonces $\hat{d} = d$. Con esto último podemos reformular la definición de métrica intrínseca, es decir, una métrica d es intrínseca si y solo si $\hat{d} = d$.

4.3.1. Existencia de puntos medios

El concepto de punto medio es muy común y utilizado en la geometría clásica, de forma que muchas otras construcciones dependen de este, al igual que algunas demostraciones y teoremas de la geometría euclidiana. De hecho, dicho concepto resulta ser tan importante en la caracterización de métricas intrínsecas que su estudio será de gran importancia para nosotros. En este sentido, la existencia de puntos medios junto con otras hipótesis son un elemento necesario y suficiente para que una métrica sea estrictamente intrínseca. La idea de punto medio sólo depende de la distancia entre puntos, así que podemos dar de manera general la definición en un espacio métrico.

Definición 4.13. Sea (X, d) un espacio métrico y sean $x, y \in X$. Decimos que $z \in X$ es un *punto medio* de x, y si $d(x, z) = d(y, z) = \frac{1}{2}d(x, y)$

Debido a la gran diversidad de espacios métricos que existen, podrían no existir puntos medios, como ocurre en un espacio métrico con la métrica discreta. Asimismo, en \mathbb{R}^2 con la métrica euclidiana existe un único punto medio para dos puntos elegidos. El siguiente ejemplo muestra que de hecho pueden existir una infinidad de puntos medios.

Ejemplo 4.14. Una esfera, vista como superficie regular encajada en \mathbb{R}^3 , es un espacio métrico. Para dos puntos diametralmente opuestos existen una infinidad de geodésicas, que en este caso son círculos máximos que conectan dichos puntos [4, 6]. Más aún, los puntos medios entre dos puntos diametralmente opuestos forman un círculo máximo como lo muestra la Figura 11.

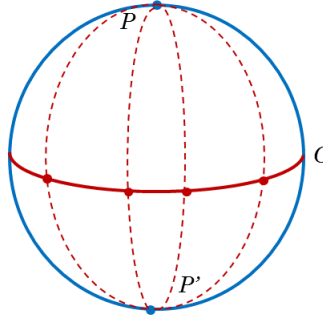


Figura 11: Puntos diametralmente opuestos en la esfera con infinidad de puntos medios

Una característica importante que tienen los espacios métricos de caminos es que para cualesquiera dos puntos siempre existe un punto medio de ellos.

Proposición 4.15. Sea (X, d) un espacio métrico cuya métrica es estrictamente intrínseca, entonces para cualesquiera dos puntos $x, y \in X$ existe un punto medio z de dichos puntos.

Prueba. Sea L la longitud de camino que induce a d , es decir $d_L = d$. La longitud de algún camino más corto $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ entre x y y es $L(\gamma) = d(x, y)$, esto debido a la métrica estrictamente intrínseca. Fijemos $L(t) = L(\gamma|_{[a, t]})$, como $L(t)$ es continua en t y $L(a) = 0$, por el teorema del valor intermedio existe $c \in [a, b]$ de manera que $L(c) = \frac{1}{2}L(b) = \frac{1}{2}d(x, y)$. Tomemos $z = \gamma(c)$, sabemos que $L(\gamma') = d(x, z) \leq L(\gamma|_{[a, c]})$, para alguna γ' conectando x con z , y sin pérdida de generalidad podemos suponer que existe la concatenación $\gamma' \cdot \gamma|_{[c, b]}$, pues basta con reparametrizar γ' mediante algún homeomorfismo lineal. Si $L(\gamma') < L(\gamma|_{[a, c]})$, entonces

$$L(\gamma' \cdot \gamma|_{[c, b]}) = L(\gamma') + L(\gamma|_{[c, b]}) < L(\gamma|_{[a, c]}) + L(\gamma|_{[c, b]}) = L(\gamma|_{[a, c]} \cdot \gamma|_{[c, b]}) = L(\gamma),$$

esto significa que $\gamma' \cdot \gamma|_{[c, b]}$ tiene una longitud más pequeña que γ , lo que es una contradicción, luego $d(x, z) = L(\gamma|_{[a, c]}) = \frac{1}{2}d(x, y)$. Análogamente $d(z, y) = \frac{1}{2}d(x, y)$, por lo que se concluye que z es punto medio de x, y . \square

En otras palabras, el resultado anterior muestra que si d es estrictamente intrínseca, entonces las bolas cerradas $\bar{B}_{d(x,y)/2}(x)$ y $\bar{B}_{d(x,y)/2}(y)$ tienen intersección no vacía, pues al menos un punto medio de x y y está en su intersección. De forma más general, si d es una métrica estrictamente intrínseca y $d(x, y) = r_1 + r_2$, entonces las bolas $\bar{B}_{r_1}(x)$ y $\bar{B}_{r_2}(y)$ tienen intersección no vacía, y la prueba de este resultado es similar a la de la proposición anterior, debido a que basta mostrar que existe $c \in [a, b]$ de manera que $L(c) = r_1$.

Si bien las métricas estrictamente intrínsecas nos proveen de puntos medios, no todas las métricas tienen que tener esta propiedad, particularmente para las métricas que son solamente intrínseca. En este caso se tendrán puntos que tienen la propiedad de ser ε -puntos medios. Antes de dejar en claro lo anterior mostraremos una proposición auxiliar.

Proposición 4.16. Sea (X, d) un espacio métrico de caminos y $x, y \in X$, tal que $d(x, y) < \infty \forall x, y \in X$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe una curva γ que conecta x con y de forma que $L(\gamma) - d(x, y) \leq \varepsilon$.

Prueba. Sea L una longitud de camino de forma que $d_L = d$. Debido a que $d_L(x, y) = d(x, y) < d(x, y) + \varepsilon$, es decir, $d(x, y) + \varepsilon$ no es cota inferior del conjunto de todas las longitudes de curva que conectan x con y , deberá existir una curva γ que una x y y de forma que $L(\gamma) \leq d(x, y) + \varepsilon$, es decir $L(\gamma) - d(x, y) \leq \varepsilon$. \square

Proposición 4.17. Sea d una métrica intrínseca tal que $d(x, y) < \infty \forall x, y \in X$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un ε -punto medio z , es decir, un punto z tal que $|2d(x, z) - d(x, y)| \leq \varepsilon$ y $|2d(y, z) - d(x, y)| \leq \varepsilon$.

Prueba. Tomemos $x, y \in X$ y sea $\varepsilon > 0$. Usando la proposición 4.16, existe $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ que conecta x con y y de forma que $L(\gamma) - d(x, y) < \varepsilon$, además por la continuidad de L existe $c \in [a, b]$ de forma que $L(\gamma|_{[a,c]}) = \frac{1}{2}L(\gamma)$. Sea entonces $z = \gamma(c)$, mostraremos que z es un ε -punto medio de x, y . Notemos que

$$d(x, z) \leq L(\gamma|_{[a,c]}) = \frac{1}{2}L(\gamma) \leq \frac{d(x, y) + \varepsilon}{2},$$

de donde $d(x, z) \leq \frac{1}{2}(d(x, z) + \varepsilon)$ y $2d(x, z) - d(x, y) \leq \varepsilon$. Debido a que $L(\gamma|_{[c,b]}) = \frac{1}{2}L(\gamma)$, se sigue que $2d(z, y) - d(x, y) \leq \varepsilon$, usando un procedimiento similar al anterior. Por otro lado, usando la desigualdad triangular se tiene que $2d(x, y) \leq 2d(x, z) + 2d(z, y)$, entonces

$$-\varepsilon \leq -2d(z, y) + d(x, y) \leq 2d(x, z) - d(x, y),$$

así $-\varepsilon \leq 2d(x, z) - d(x, y)$. Usando esta última desigualdad y $2d(x, z) - d(x, y) \leq \varepsilon$, se concluye $|2d(x, z) - d(x, y)| \leq \varepsilon$. Análogamente $|2d(z, y) - d(x, y)| \leq \varepsilon$, por tanto z es ε -punto medio de x y y . \square

Como comentario adicional, notemos que cada punto medio z de dos puntos x, y en un espacio métrico es de hecho un ε -punto medio de x, y para cada $\varepsilon > 0$.

4.3.2. Métricas intrínsecas completas

En casos especiales, el resultado inverso a la proposición 4.15 es verdadero, es decir, la existencia de puntos medios (respectivamente ε -puntos medios) garantiza que la métrica es estrictamente intrínseca (intrínseca). Algunos de estos casos son cuando el espacio métrico es completo.

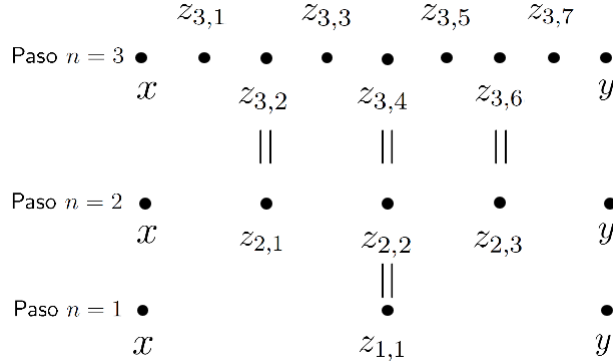
Teorema 4.18. Sea (X, d) un espacio métrico completo.

- (1) Si para cada $x, y \in X$ existe un punto medio, entonces d es estrictamente intrínseca
- (2) Si para cada $x, y \in X$ y cada $\varepsilon > 0$ existe un ε -punto medio, entonces d intrínseca.

Prueba. Sean $x, y \in X$. Debido a que para cada dos puntos siempre existe un punto medio de ellos, entonces definimos la siguiente recursión como sigue:

- Paso $n = 0$. Se define $x = z_{0,2^0}$ y $y = z_{2^0,2^0}$, para toda $n \in \mathbb{N}$

- Paso $n = 1$. $z_{1,1}$ es punto medio de x y y .
- Paso $n = 2$. $z_{2,1}$ es punto medio de x y $z_{1,1}$, $z_{2,2} = z_{1,1}$, $z_{2,3}$ es punto medio de $z_{1,1}$ y y .
- Paso $n = 3$. $z_{3,1}$ es punto medio de x y $z_{2,1}$, $z_{3,2} = z_{2,1}$, $z_{3,3}$ es punto medio de $z_{2,1}$ y $z_{1,1}$, $z_{3,4} = z_{2,2}$, $z_{3,5}$ es punto medio de $z_{2,2}$ y $z_{2,3}$, $z_{3,6} = z_{2,3}$, $z_{3,7}$ es punto medio de $z_{2,3}$ y y .

Figura 12: La sucesión $z_{n,k}$.

Es decir, en el $(n+1)$ -ésimo paso se construyen los puntos medios de los puntos $z_{n,k}$ y $z_{n,k+1}$ consecutivos que resultaron en el n -ésimo paso, así que para el n -ésimo paso se tendrán $2^n - 1$ puntos. Notemos además que la distancia entre dos puntos consecutivos de la sucesión hasta el n -ésimo paso es $d(z_{n,j}, z_{n,j+1}) = \frac{d(x, y)}{2^n}$. Definimos $\hat{\gamma}(0) = x$, $\hat{\gamma}(1) = y$. Luego consideremos la asignación $\hat{\gamma}(1/2) = z_{2,2}$. Ahora, sean $\hat{\gamma}(1/4) = z_{2,1}$, $\hat{\gamma}(3/4) = z_{2,3}$. En general, si $a, n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{a}{2^n} < 1$, entonces al número diádico $\frac{a}{2^n}$ se le asigna el punto $z_{n,a}$, es decir

$$\hat{\gamma}\left(\frac{a}{2^n}\right) = z_{n,a},$$

De esta manera, definimos $\hat{\gamma}$ para los números racionales diádicos entre 0 y 1, es decir, todos los números racionales de la forma $\frac{a}{2^n}$ que son menores que 1. De acuerdo con la construcción anterior se tiene que para dos números diádicos $t = \frac{a}{2^n}$ y $t' = \frac{b}{2^m}$, que sin pérdida de generalidad podemos suponer que $(a, 2) = 1$, $(b, 2) = 1$ y $m = n + k$, donde $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se tendrá que $t = \frac{a2^k}{2^m}$. Sea

$$Q = \{q \in \mathbb{N} : \min\{a2^k, b\} \leq q \leq \max\{a2^k, b\}\}.$$

Observemos que $\frac{(\#Q - 1)}{2^m} \leq |t - t'|$, esto quiere decir que usando la desigualdad triangular obtenemos

$$d(\hat{\gamma}(t), \hat{\gamma}(t')) \leq \sum_{q \in Q} d(z_{m,q}, z_{m,q+1}) = (\#Q - 1) \cdot \frac{d(x, y)}{2^m} \leq |t - t'|d(x, y),$$

de donde $d(\hat{\gamma}(t), \hat{\gamma}(t')) \leq |t - t'|d(x, y) \leq d(x, y)$, es decir que la función $\hat{\gamma}$ definida en los racionales diádicos en $[0, 1]$ es Lipschitz. Debido a que X es completo y el conjunto de los racionales diádicos es denso en $[0, 1]$, $\hat{\gamma}$ se puede extender continuamente al intervalo $[0, 1]$, es decir, existe $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ Lipschitz (con constante de Lipschitz 1) tal que la restricción de γ en los números diádicos menores que 1 coincide con $\hat{\gamma}$. Además si

$P = \{0 = p_0, p_1, \dots, p_n = 1\}$ es una partición del intervalo $[0, 1]$ se tendrá que

$$\begin{aligned} d(x, y) \leq S(P) &= \sum_{k=0}^{n-1} d(\gamma(p_k), \gamma(p_{k+1})) \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} |p_k - p_{k+1}| d(x, y) \\ &= d(x, y) (|0 - p_1| + |p_1 - p_2| + \dots + |p_{n-1} - 1|) \\ &= d(x, y), \end{aligned}$$

así que cualquier partición P satisface $S(P) = d(x, y)$ y por tanto $L_d(\gamma) = d(x, y)$. En el caso de existir ε -puntos medios la prueba es completamente análoga. \square

Ejemplo 4.19 (Métrica del Ascensor). Definamos en $\mathbb{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ la métrica $d_A : \mathbb{S} \times \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$d_A((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} y_1 + y_2 + |x_1 - x_2| & \text{si } x_1 \neq x_2 \\ |y_1 - y_2| & \text{si } y_1 = y_2 \end{cases}$$

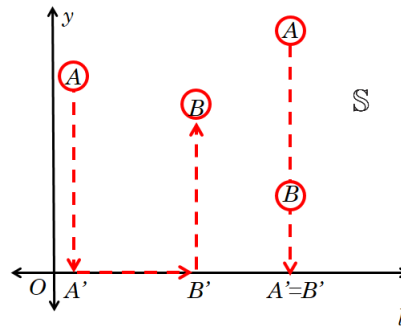


Figura 13: Métrica del ascensor d_A .

Esta métrica toma su nombre debido al hecho que modela la situación que se vive en un complejo de apartamentos, donde para ir del apartamento A al apartamento B el camino está formado por trayectos en el ascensor –y posiblemente también en la “acera” $y = 0$.

Resulta que el espacio métrico (\mathbb{S}, d_A) es completo y a continuación mostramos la prueba de ello. Sea d la métrica euclidiana en \mathbb{R} usual y $\{x_j = (a_j, b_j)\}_{j=1}^{\infty}$ un sucesión de Cauchy en \mathbb{S} .

(1) Si existe una subsucesión $\{x_{j_k}\}$ de $\{x_j\}$ tal que $a_{j_k} = a$ para cada $k \in \mathbb{N}$ (esto significa que a_{j_k} es constante) entonces $d_A(x_{j_n}, x_{j_m}) = |b_{j_n} - b_{j_m}| = d(b_{j_n}, b_{j_m})$, además como la sucesión $\{b_{j_k}\}$ es de Cauchy debido a que $\{x_j\}$ lo es, entonces $\{b_{j_k}\}$ converge a un número b dado que \mathbb{R} es completo con la métrica d . Lo anterior significa que la subsucesión $\{x_{j_k}\}$ converge al punto (a, b) , así que la sucesión $\{x_k\}$ debe converger (porque es de Cauchy y tiene una subsucesión convergente).

(2) Por el otro lado, si $\{x_n\}$ no contiene alguna subsucesión constante, consideremos lo siguiente. Definimos

$$k_1 = \max\{j \in \mathbb{N} : a_j = a_1\},$$

el cuál existe por nuestra suposición, además $a_m \neq a_1$ siempre que $m > k_1$. Ahora sea

$$k_2 = \max\{j \in \mathbb{N} : a_j = a_{k_1+1}\}.$$

De forma recursiva se define

$$k_{n+1} = \max\{j \in \mathbb{N} : a_j = a_{k_n+1}\},$$

para $n \geq 2$. Esto muestra que la subsucesión $\{x_{k_j}\}$ satisface que $a_{k_i} \neq a_{k_{i'}}$ siempre que $i \neq i'$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe $L \in \mathbb{N}$ tal que

$$b_{k_n} + b_{k_m} + |a_{k_n} - a_{k_m}| = d_A(x_{k_n}, x_{k_m}) < \varepsilon \quad \text{para } n, m \geq L,$$

de esta forma $d(a_{k_n}, a_{k_m}) = |a_{k_n} - a_{k_m}| < \varepsilon$ y $b_{k_n} < \varepsilon$ para $n, m \geq L$, así que la sucesión $\{a_{k_j}\}$ es de Cauchy y por tanto convergente a un número a (de nuevo porque (\mathbb{R}, d) es completo), y además la sucesión $\{b_{k_n}\}$ converge a 0. Sea $\varepsilon > 0$ entonces existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$b_{k_n} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad |a - a_{k_m}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para $n, m \geq M$. Como $(a, 0) \in \mathbb{S}$ se tendrá

$$d_A((a, 0), x_{k_j}) = b_{k_j} + |a - a_{k_j}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

siempre que $n, j \geq M$, es decir $d_A((a, 0), x_{k_j}) < \varepsilon$, lo que quiere decir que la subsucesión $\{x_{k_j}\}$ es convergente y por lo tanto $\{x_j\}$ también es convergente. Todo lo anterior muestra que (\mathbb{S}, d_A) es un espacio métrico completo. Por otro lado, dados dos puntos $A = (a, b)$ y $P = (p, q)$ en \mathbb{S} notemos lo siguiente.

1. Si $a = p$, sea $m = \frac{|b - q|}{2} + \min\{b, p\}$, entonces el punto $M = (a, m)$ cumple que

$$d_A(A, M) = \frac{d_A(A, P)}{2} = d_A(P, M),$$

de donde M es punto medio de A y P .

2. Si $a \neq p$, denotemos por $A' = (a, 0)$ y $P' = (p, 0)$. Sea M el punto sobre alguno de los segmentos AA' , $A'P'$ ó $P'P$ tal que

$$d_A(A, M) = \frac{AA' + A'P' + P'P}{2},$$

es fácil ver que $d_A(P, M) = d_A(A, M) = \frac{1}{2}d_A(A, P)$, entonces M es punto medio de A y P .

Debido a que para cada dos puntos $A, P \in \mathbb{S}$ existe un punto medio M de A y P , entonces d es una métrica estrictamente intrínseca y por lo tanto (X, d_A) es un espacio métrico de caminos.

Ejemplo 4.20. Recordemos que la métrica del taxi d_T es equivalente a la métrica euclidiana d_E en \mathbb{R}^2 , y por lo tanto (\mathbb{R}^2, d_T) es un espacio métrico completo. Por otro lado, si $p = (x, y)$ y $q = (a, b)$ son dos puntos de \mathbb{R}^2 entonces $m = \left(\frac{x+a}{2}, \frac{y+b}{2}\right)$ satisface que

$$d(p, m) = \left|x - \frac{x+a}{2}\right| + \left|y - \frac{y+b}{2}\right| = \frac{|x-a| + |y-b|}{2} = \frac{1}{2}d(p, q),$$

y de manera análoga $d(m, q) = \frac{1}{2}d(p, q)$. Esto quiere decir que para cualesquiera dos puntos siempre existe un punto medio de estos, por lo tanto (\mathbb{R}^2, d_T) es un espacio métrico de caminos.

Finalizamos este trabajo demostrando que todo espacio métrico de caminos (X, d) puede encajarse denso en un espacio métrico de caminos $(\overline{X}, \overline{d})$, a saber, la completación usual de (X, d) como espacio métrico.

Proposición 4.21. La completación de un espacio métrico de caminos es un espacio métrico de caminos.

Prueba. Sea (\overline{X}, d) la completación de un espacio métrico de caminos (X, d) y tomemos $x, y \in \overline{X}$. Sea $\varepsilon > 0$, como X es denso en \overline{X} entonces existen sucesiones $\{x_j\}$ y $\{y_j\}$ que convergen a x y y , respectivamente, de manera que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{5}$ y $d(y_n, y) < \frac{\varepsilon}{5}$ para toda $n \geq N$. Además existe z que es $\varepsilon/4$ -punto medio de x_N y y_N , es decir que

$$|2d(x_N, z) - d(x_N, y_N)| \leq \frac{\varepsilon}{5} \quad \text{y} \quad |2d(y_N, z) - d(x_N, y_N)| \leq \frac{\varepsilon}{5},$$

ó equivalentemente a

$$d(x, y) - \varepsilon \leq 2d(x, z) \leq d(x, y) + \varepsilon$$

$$d(x, y) - \varepsilon \leq 2d(y, z) \leq d(x, y) + \varepsilon.$$

Usando la desigualdad triangular y las desigualdades previas se tendrá que

$$\begin{aligned} 2d(x, z) &\leq 2d(x, x_N) + 2d(x_N, z) \\ &\leq 2\frac{\varepsilon}{5} + d(x_N, y_N) + \frac{\varepsilon}{5} \\ &\leq 3\frac{\varepsilon}{5} + d(x_N, x) + d(x, y) + d(y, y_N) \\ &\leq d(x, y) + \varepsilon, \end{aligned}$$

y de la misma forma se concluye que $d(x, y) - \varepsilon \leq 2d(x, z)$, de donde $|2d(x, z) - d(x, y)| \leq \varepsilon$. Análogamente $|2d(y, z) - d(x, y)| \leq \varepsilon$ y por lo tanto z es un ε -punto medio de x, y . Como \bar{X} es completo y para cada dos puntos existe un ε -punto medio de ellos, entonces \bar{X} es un espacio métrico de caminos. \square

Agradecimientos

Los autores desean agradecer al árbitro por los comentarios y sugerencias que enriquecieron el contenido de este trabajo.

Referencias

- [1] D. Bao, S.-S. Chern y Z. Shen. *An introduction to Riemann-Finsler geometry*, Springer-Verlag, GTM Vol. 200, New York, (2000).
- [2] D. Burago, Y. Burago y S. Ivanov. *A Course in Metric Geometry*. American Mathematical Society, GSM Vol. 33, Providence, (2001).
- [3] M. R. Bridson y A. Haefliger. *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*, 2a edición. Springer-Verlag, GMW Vol. 319, Berlin, (2011).
- [4] M. P. do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall, New Jersey, (1976).
- [5] M. P. do Carmo. *Riemannian Geometry*, 2a. edición. Birkhauser, Boston, (1992).
- [6] M. J. Greenberg. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History*, 3a. edición. W. H. Freeman and Co., New York, (1994).
- [7] E. Krauze. *Taxicab Geometry*. Dover, New York, (1987).
- [8] J. M. Lee. *Riemannian Manifolds, an Introduction to Curvature*. Springer-Verlag, GTM Vol. 176, New York, (1997).
- [9] L. Montes de Oca y D. Solís. *Los Postulados de Euclides en Espacios Métricos*. Abstraction & Application. Vol. 9, pp 27-49, Universidad Autónoma de Yucatán, México, (2013).
- [10] J. Munkres. *Topology*, 2a. edición. Prentice Hall, Upper Saddle River, (2000).
- [11] B. O'Neill. *Semi-riemannian Geometry with Applications to Relativity*. Academic Press, San Diego, (1983).
- [12] A. I. Ramírez y J. Seade *Introducción a la geometría avanzada*. UNAM, México, (2002)
- [13] M. Searcoid. *Metric Spaces*. Springer-Verlag, SUMS Vol. 19, Londres, (2007).