



---

---

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE YUCATÁN**

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**UNIDAD DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN**

**“EXAMINACIÓN DE MODELOS DE  
MICROMECAÁNICA PARA LA PREDICCIÓN DE LAS  
CONSTANTES ELÁSTICAS DE MATERIALES  
COMPUESTOS REFORZADOS CON FIBRAS  
UNIDIRECCIONALES”**

**TESIS**

**PRESENTADA POR:**

**I. C. HUGO FUENTES GUTIÉRREZ**

**EN OPCIÓN AL GRADO DE**

**MAESTRO EN INGENIERÍA**

**OPCIÓN ESTRUCTURAS**

**MÉRIDA, YUCATÁN, MÉXICO**

**2018**



Aunque este trabajo hubiere servido para el Examen de Grado y hubiere sido aprobado por el sínodo, sólo el autor es responsable de las doctrinas emitidas en él.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) y a la Universidad Autónoma de Yucatán por su apoyo y patrocinio para la realización de este proyecto de tesis.

## Resumen

Numerosos modelos de micromecánica (MM) y modelos de elemento finito (MEF) se han reportado en la literatura como una alternativa eficaz y versátil a los ensayos para la determinación de las propiedades elásticas de materiales compuestos fibroreforzados unidireccionalmente. Sin embargo, la precisión de estos modelos simplificados es en ocasiones cuestionable y no existe un consenso internacional sobre el modelo más adecuado para cada propiedad material. Es por ello que en este trabajo se examinaron MM existentes con los cuales se pueden obtener las cinco constantes elásticas independientes (CEI) de materiales compuestos reforzados con fibras unidireccionales (MCU), comparando sus resultados contra MEF propios. La finalidad es presentar un conjunto de expresiones analíticas de los MM más pertinentes para predecir dichas CEI. Primeramente, los resultados de los MEF propios se compararon contra una gran variedad de resultados experimentales reportados, resultando en una comparación satisfactoria. Tomando como referencia los resultados de los MEF desarrollados, la examinación detallada de los MM demostró que para el módulo elástico longitudinal ( $E_1$ ) y la razón de Poisson longitudinal ( $\nu_{12}$ ), el MM auto-consistente (Hill R., 1965, J. Mech. Phy. Sol., 13, 189-198) tuvo el mejor ajuste, con diferencias despreciables. Con relación al módulo elástico transversal ( $E_2$ ), el MM propuesto por Tsai y Hahn (Tsai S. W. y Hahn H. T., 1980, Introduction to composite materials) presentó un ajuste adecuado, con diferencias menores al 5% respecto al MEF propio. Concerniente a la razón de Poisson transversal ( $\nu_{23}$ ), la propuesta realizada por Balacó de Morais (Balacó de Morais A., 2000, Comp. Sci. Tech., 60, 997-1002) manifestó el ajuste con la mínima diferencia, siendo esta menor al 5% para fracciones de volumen de fibra menores al 60% y para mayores fracciones de volumen de fibra la diferencia aumentó hasta un 10%. En cuanto al módulo cortante en el plano ( $G_{12}$ ) la propuesta de Hermans (Hermans J. J., 1967, Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. B, 70, 1-9) resultó con el mejor ajuste, con diferencias despreciables. Se espera que el uso de estos modelos para predecir la respuesta de modelos estructurales más elaborados proporcione certidumbre, versatilidad y rapidez a los cálculos de la academia e industria.

## Abstract

Numerous micromechanical models (MMs) and finite element models (FEMs) have been reported in the literature as an efficient and versatile alternative against testing to predict the elastic properties of unidirectional fiber reinforced composite materials (UFRCM). Nevertheless, there is no international standard or agreement about the most suitable model to use for each of the elastic properties, and in some occasions the precision of these models can be compromised. Therefore, this work assesses existent MMs for predicting the five independent elastic constants (IEC) of UFRCMs, comparing them with our dedicated FEMs. The main objective is to present the most pertinent set of closed-form-equations to predict the IEC of UFRCM. To this aim, FEM results were first compared to experimental data reported in literature, yielding good agreements. Using our FEM results as a reference, MM examination showed that the self-consistent model (Hill R. 1965, J. Mech. Phy. Sol., 13, 189-198) exhibited the best fit (with negligible differences) for the longitudinal elastic modulus ( $E_1$ ) and longitudinal Poisson's ratio ( $\nu_{12}$ ). Concerning the transverse elastic modulus ( $E_2$ ), Tsai y Hahn's model (Tsai S. W. and Hahn H.T. 1980, Introduction to composite materials) yielded differences less than 5%. Regarding the transverse Poisson's ratio ( $\nu_{23}$ ), the model by Balacó de Morais (Balacó de Morais A. 2000, Comp. Sci. Tech., 60, 997-1002) evidenced differences less than 5% for fiber volume fractions less than 60%, and for higher fiber volume fractions this difference increased up to 10%. The model by Hermans (Hermans J.J. 1967, Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. B, 70, 1-9) produced the best agreement for the in-plane shear modulus ( $G_{12}$ ), yielding negligible differences. It is expected that the use of this set of MM assist larger scale structural models providing versatile and rather precise inputs for the academy and industry.

# Índice de contenido

TÍTULO	PÁGINA
Resumen -----	iv
Abstract-----	v
Índice de contenido-----	vi
Lista de figuras-----	x
Lista de tablas -----	xv
Lista de símbolos -----	xvi
<b>CAPÍTULO 1. Introducción -----</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes -----	1
1.2. Planteamiento del problema -----	2
1.3. Objetivos -----	3
1.3.1. General-----	3
1.3.2. Específicos-----	3
<b>CAPÍTULO 2. Marco teórico -----</b>	<b>5</b>
2.1. Materiales compuestos reforzados con fibras-----	5
2.1.1. Arquitectura y simetrías materiales-----	5
2.1.2. Relaciones elástico-lineales-----	6
2.1.3. Determinación de las propiedades elásticas a partir de ensayos estandarizados-----	8
2.2. Modelos de micromecánica para la predicción de propiedades elásticas en materiales compuestos reforzados con fibras unidireccionales -----	10
2.2.1. Generalidades-----	10
2.2.2. Regla de mezclas en paralelo -----	11
2.2.3. Regla de mezclas en serie-----	11
2.2.4. Ecuación general de Chamis-----	12
2.2.5. Ecuación general de Hopkins y Chamis -----	12
2.2.6. Ecuación general de Spencer-----	13

2.2.7. Ecuaciones semi-empíricas de contigüidad-----	14
2.2.8. Modelo auto-consistente -----	15
2.2.9. Ecuaciones semi-empíricas de Halpin-Tsai-----	16
2.2.10. Modelo de regiones de Balacó de Morais-----	17
2.2.11. Ecuación de correlación de esfuerzos Huang para el módulo elástico transversal-----	18
2.2.12. Modelo de microestructura periódica de Luciano y Barbero para el módulo cortante en el plano-----	19
2.2.13. Modelo de partición de esfuerzos de Tsai y Hahn-----	19
2.2.14. Modelo de esfuerzos triaxiales de Ekvall-----	20
2.2.15. Modelo de capas horizontales de Fu para el módulo elástico transversal-----	21
2.2.16. Regla de mezclas en serie modificada -----	21
2.2.17. Ecuación de Foye para la razón de Poisson transversal -----	22
2.2.18. Ecuación de compresibilidad Clyne para la razón de Poisson transversal-----	22
2.3. Modelos de elemento finito para la predicción de propiedades elásticas en materiales compuestos unidireccionales reforzados con fibras-----	23

<b>CAPÍTULO 3. Metodología para la elaboración de los modelos de elemento finito-----</b>	<b>26</b>
3.1. Materiales -----	26
3.2. Selección del volumen representativo-----	27
3.3. Definición de elementos y malla -----	29
3.4. Propiedades elásticas longitudinales -----	30
3.4.1. Condiciones de frontera -----	30
3.4.2. Cálculo de propiedades elásticas longitudinales -----	31
3.5. Propiedades elásticas transversales -----	33
3.5.1. Condiciones de frontera -----	33
3.5.2. Cálculo de propiedades elásticas transversales -----	34
3.6. Módulo cortante en el plano-----	35



3.6.1. Condiciones de frontera -----	35
3.6.2. Cálculo del módulo cortante en el plano -----	36
3.7. Análisis y criterio de convergencia -----	37
3.8. Cálculo estadístico del error en los modelos de micromecánica -----	38
<b>CAPÍTULO 4. Resultados de los modelos de elemento finito y su comparación contra ensayos -----</b>	<b>40</b>
4.1. Examinación de la convergencia numérica -----	40
4.2. Propiedades elásticas longitudinales -----	42
4.2.1. Análisis de la distribución de esfuerzos -----	42
4.2.2. Comparación contra resultados experimentales -----	44
4.3. Propiedades elásticas transversales -----	46
4.3.1. Análisis de la distribución de esfuerzos -----	46
4.3.2. Comparación contra resultados experimentales -----	49
4.4. Módulo cortante en el plano -----	52
4.4.1. Análisis de la distribución de esfuerzos -----	52
4.4.2. Comparación contra resultados experimentales -----	54
<b>CAPÍTULO 5. Comparación de los resultados de los modelos de elemento finito contra los modelos de micromecánica -----</b>	<b>56</b>
5.1. Propiedades elásticas longitudinales -----	56
5.1.1. Módulo elástico longitudinal -----	56
5.1.2. Razón de Poisson longitudinal -----	59
5.2. Propiedades elásticas transversales -----	62
5.2.1. Módulo elástico transversal -----	62
5.2.2. Razón de Poisson transversal -----	66
5.3. Módulo cortante en el plano -----	69
<b>Conclusiones y recomendaciones -----</b>	<b>74</b>
<b>Apéndice A. Dimensiones del volumen representativo en un patrón de distribución hexagonal de fibras -----</b>	<b>77</b>

<b>Apéndice B. Formulación de elementos finitos</b> .....	79
B.1. Elementos de interpolación lineal .....	79
B.2. Elementos de interpolación cuadrática .....	81
B.3. Elementos de transición .....	82
<b>Apéndice C. Validación de los modelos de elemento finito para el caso     homogéneo e isotrópico</b> .....	83
<b>Apéndice D. Ejemplo de uso: Predicción de esfuerzos y deformaciones     en una viga en voladizo de material compuesto reforzado     con fibras unidireccionales</b> .....	85
D.1. Modelo de elemento finito .....	85
D.2. Resultados y discusión .....	87
<b>Apéndice E. Resumen de los modelos de micromecánica     seleccionados</b> .....	90
<b>Referencias</b> .....	91

## Lista de figuras

TÍTULO	PÁGINA
Fig. 1.1. Jerarquización dimensional de materiales compuestos laminados. -----	2
Fig. 2.1. Configuración del eje coordenado global y material en un MCU.-----	5
Fig. 2.2. Geometría del espécimen y carga aplicada a un laminado a 0° de acuerdo al estándar ASTM D3039 (cotas en mm).-----	8
Fig. 2.3. Geometría del espécimen y carga aplicada en un laminado a 0° en la prueba de cortante con muesca en V (ASTM D5379, 2012) (cotas en mm).-----	9
Fig. 3.1. Idealización de un MCU como unidad repetitiva. a) Patrón hexagonal de distribución geométrica de la fase de refuerzo, b) VR. -----	28
Fig. 3.2. Sección del VR mostrando la zona utilizada para los elementos de interpolación cuadrática.-----	28
Fig. 3.3. Apariencia del VR con tres fracciones de volumen de fibra ( $r_f$ es constante). a) $\phi_f=1\%$ , b) $\phi_f=40\%$ , c) $\phi_f=80\%$ .-----	29
Fig. 3.4. Localización de los elementos de interpolación lineal e interpolación cuadrática utilizados en los MEF. -----	30
Fig. 3.5. Condiciones de carga y frontera en el MEF para la determinación de las propiedades elásticas longitudinales ( $E_1$ y $\nu_{12}$ ).-----	31
Fig. 3.6. Esquema de la configuración sin deformar (línea punteada) y deformada del MEF ante deformación longitudinal. a) Vista en el plano xz, b) vista en el plano yz.-----	32
Fig. 3.7. Condiciones de carga y frontera en el MEF para la determinación de las propiedades elásticas transversales ( $E_2$ y $\nu_{23}$ ). -----	33
Fig. 3.8. Esquema de la configuración sin deformar (línea punteada) y deformada del MEF ante deformación transversal. a) Vista en el plano yz, b) vista en el plano xz.-----	34

Fig. 3.9.	Condiciones de carga y frontera en el MEF para la determinación del módulo cortante en el plano ( $G_{12}$ ).	36
Fig. 3.10.	Esquema de la configuración sin deformar (línea punteada) y deformada del MEF ante desplazamiento cortante en el plano $xy$ .	36
Fig. 3.11.	Proceso de refinamiento en la malla correspondiente a FC/E y $\phi_f=50\%$ . a) Malla gruesa, b) malla intermedia, c) malla fina.	37
Fig. 3.12.	Representación gráfica del error absoluto libre de escalas $q_k$ .	39
Fig. 4.1.	Análisis de convergencia numérica para FC/E y $\phi_f=50\%$ a) $E_1$ y $\nu_{12}$ , b) $E_2$ y $\nu_{23}$ , c) $G_{12}$ .	40
Fig. 4.2.	Distribución de esfuerzos ante un desplazamiento uniforme y unitario en la dirección $x$ en el plano $yz$ con $x=D$ , para FC/E con $\phi_f=50\%$ . a) $\sigma_x$ , b) $\sigma_y$ , c) $\sigma_z$ , d) $\tau_{yz}$ .	43
Fig. 4.3.	Predicción de MEF para $E_1$ y $\nu_{12}$ y su comparación con resultados experimentales. a) $E_1$ para FC/E, b) $E_1$ para FV/E, c) $\nu_{12}$ para FC/E, d) $\nu_{12}$ para FV/E.	45
Fig. 4.4.	Distribución de esfuerzos ante un desplazamiento uniforme y unitario en la dirección $y$ en el plano $xz$ con $y=W/2$ , para FC/E con $\phi_f=50\%$ . a) $\sigma_x$ , b) $\sigma_y$ , c) $\sigma_z$ , d) $\tau_{yz}$ .	47
Fig. 4.5.	Predicción de $E_2$ y $\nu_{23}$ (MEF) y su comparación con resultados experimentales. a) $E_2$ para FC/E, b) $E_2$ para FV/E, c) $\nu_{23}$ para FC/E, d) $\nu_{23}$ para FV/E.	49
Fig. 4.6.	Distribución de esfuerzos ante un desplazamiento uniforme y unitario en la dirección $x$ en el plano $yz$ con $y=W/2$ , para FC/E y $\phi_f=50\%$ . a) $\sigma_z$ , b) $\tau_{xy}$ , c) $\tau_{xz}$ , d) $\tau_{yz}$ .	53
Fig. 4.7.	Predicción de $G_{12}$ (MEF) y su comparación con resultados experimentales. a) FC/E, b) FV/E.	55
Fig. 5.1.	Comparación de los MM contra MEF para FC/E. a) Predicción de $E_1$ , b) cuantificación del error global promedio, c) distribución del error puntual como función de $\phi_f$ .	56

- Fig. 5.2. Comparación de los MM contra MEF para FV/E. a) Predicción de  $E_1$ , b) cuantificación del error global promedio, c) distribución del error puntual como función de  $\phi_f$ . ----- 58
- Fig. 5.3. Comparación de los MM contra MEF para FC/E. a) Predicción de  $v_{12}$ , b) cuantificación del error global promedio, c) distribución del error puntual como función de  $\phi_f$ . ----- 60
- Fig. 5.4. Comparación de los MM contra MEF para FV/E. a) Predicción de  $v_{12}$ , b) cuantificación del error global promedio, c) distribución del error puntual como función de  $\phi_f$ . ----- 61
- Fig. 5.5. Comparación de los MM contra MEF para FC/E. a) Predicción de  $E_2$  con los MM con  $q_{prom} \leq 2.5$ , b) predicción de  $E_2$  con los MM con  $q_{prom} > 2.5$ , c) cuantificación del error global promedio, d) distribución del error puntual como función de  $\phi_f$  de los MM seleccionados.----- 63
- Fig. 5.6. Comparación de los MM contra MEF para FV/E. a) Predicción de  $E_2$  con los MM con  $q_{prom} \leq 4$ , b) predicción de  $E_2$  con los MM con  $q_{prom} > 4$ , c) cuantificación del error global promedio, d) distribución del error puntual como función de  $\phi_f$  de los MM seleccionados.----- 65
- Fig. 5.7. Comparación de los MM contra MEF para FC/E. a) Predicción de  $v_{23}$ , b) cuantificación del error global promedio, c) distribución del error puntual como función de  $\phi_f$ . ----- 67
- Fig. 5.8. Comparación de los MM contra MEF para FV/E. a) Predicción de  $v_{23}$ , b) cuantificación del error global promedio, c) distribución del error puntual como función de  $\phi_f$ . ----- 68

Fig. 5.9.	Comparación de los MM contra MEF para FC/E. a) Predicción de $G_{12}$ con los MM con $q_{prom} \leq 3$ , b) predicción de $G_{12}$ con los MM con $q_{prom} > 3$ , c) cuantificación del error global promedio, d) distribución del error puntual como función de $\phi_f$ de los MM seleccionados.-----	70
Fig. 5.10.	Comparación de los MM contra MEF para FV/E. a) Predicción de $G_{12}$ con los MM con $q_{prom} \leq 3$ , b) predicción de $G_{12}$ con los MM con $q_{prom} > 3$ , c) cuantificación del error global promedio, d) distribución del error puntual como función de $\phi_f$ de los MM seleccionados.-----	72
Fig. A1.	Volumen representativo inscrito en el hexágono regular formado por el patrón hexagonal de distribución de las fibras. -----	77
Fig. B1.	Elemento tetraédrico de interpolación lineal. a) Numeración de nodos, b) pirámide de Pascal.-----	79
Fig. B2.	Subdivisión del elemento tetraédrico en cuatro volúmenes. a) Punto interno Q, b) $V_{Q123}$ , c) $V_{Q124}$ , d) $V_{Q134}$ , e) $V_{Q234}$ .-----	70
Fig. B3.	Elemento tetraédrico de interpolación cuadrática. a) Numeración de nodos, b) pirámide de Pascal.-----	80
Fig. B4.	Elementos tetraédricos de transición utilizados para la compatibilidad entre mallas de diferente orden de interpolación (vista en dos dimensiones).-----	82
Fig. C1.	Propiedades elásticas del VR determinadas a partir del caso homogéneo e isotrópico (solo matriz). a) $E_1$ y $\nu_{12}$ , b) $E_2$ y $\nu_{23}$ , c) $G_{12}$ -----	84
Fig. D1.	Condiciones de carga y frontera en el MEF de la viga en voladizo. a) Vista en el plano xz, b) Vista en el plano yz-----	86
Fig. D2.	Perfil de deflexión de las vigas en voladizo. a) FC/E con $L_v/T_v=32$ , b) FV/E con $L_v/T_v=32$ , c) FC/E con $L_v/T_v=5$ , d) FV/E con $L_v/T_v=5$ -----	87

Fig. D3. Distribución del esfuerzo normal  $\sigma_x$  para FC/E.

a)  $L_v/T_v=32$  y  $x=0$ , b)  $L_v/T_v=32$  y  $x=L_v/2$ , c)  $L_v/T_v=5$  y  $x=0$ ,

d)  $L_v/T_v=5$  y  $x=L_v/2$  ----- 89

## Lista de tablas

<b>TÍTULO</b>	<b>PÁGINA</b>
Tabla 3.1. Constantes elásticas independientes de la fase de refuerzo. -----	26
Tabla 3.2. Número de elementos utilizados en el análisis de convergencia. -----	38
Tabla 4.1. Diferencia entre los resultados de la malla gruesa y la fina. -----	41
Tabla D1. CEI utilizadas en la modelación de la viga en voladizo.-----	85
Tabla E1. Modelos de micromecánica propuestos para la determinación de las CEI de MCU. -----	90



# Lista de símbolos

## Simbología griega

$\alpha$	Parámetro de partición de esfuerzos en la matriz.
$\alpha_i$	Términos constantes del campo de desplazamientos nodales.
$\alpha_s$	Coefficiente de cortante en la teoría de vigas de Timoshenko.
$\Gamma$	Parámetro semi-empírico de separación entre fibras.
$\gamma_{ij}$	Deformación cortante en el plano $ij$ .
$\delta$	Deflexión en la dirección $z$ de una viga en voladizo.
$\Delta_i$	Elongación o contracción del volumen representativo.
$\delta_{\max}$	Deflexión máxima en el extremo libre de la viga en voladizo.
$\{\varepsilon\}$	Vector (6x1) de deformaciones unitarias.
$\varepsilon_i$	Deformación extensional de la dirección $i$ .
$\lambda$	Constante de normalización para el error absoluto libre de escalas.
$\nu$	Razón de Poisson de un material homogéneo e isotrópico.
$\nu_f, \nu_m$	Razón de Poisson isotrópica de la fibra (f) y la matriz (m).
$\nu_{12}, \nu_{12f}, \nu_{12m}$	Razón de Poisson longitudinal del compuesto, la fibra (f) y la matriz (m).
$\nu_{21}$	Razón de Poisson longitudinal menor del compuesto.
$\nu_{23}, \nu_{23f}, \nu_{23m}$	Razón de Poisson transversal del compuesto, la fibra (f) y la matriz (m).
$\xi$	Parámetro semi-empírico de refuerzo de las ecuaciones de Halpin-Tsai.
$\xi_{E2}, \xi_{G12}$	Parámetro semi-empírico de refuerzo para $E_2$ y $G_{12}$ .
$\{\sigma\}$	Vector (6x1) de estado de esfuerzos.
$\sigma_f, \sigma_m$	Esfuerzo promedio en la fibra (f) y la matriz (m).
$\sigma_i$	Esfuerzo normal en la dirección $i$ .
$\tau_{ij}$	Esfuerzo cortante en el plano $ij$ .
$\phi_f, \phi_m$	Fracción de volumen de la fibra (f) y la matriz (m).
$\omega$	Factor de disminución de esfuerzos en la matriz.

## Simbología Romana

[A]	Matriz (6x6) de correlación de esfuerzos entre los materiales constitutivos.
$A_{ij}$	Componente $ij$ de la matriz (6x6) de correlación de esfuerzos.
$A_v$	Área de la sección transversal de la viga en voladizo.
$A_{ij}$	Área del volumen representativo en el plano $ij$ .
[C]	Matriz de rigidez del compuesto (6x6).
$C_{ij}$	Componente $ij$ de la matriz de rigidez del compuesto.
$C_T$	Parámetro de contigüidad de fibras.
$c_0$	Término constante en la pirámide de Pascal.
$CE_k^{MEF}$	Constante elástica determinada por modelos de elemento finito.
$CE_k^{MM}$	Constante elástica determinada por modelos de micromecánica
D	Espesor del volumen representativo.
e	Diferencia entre los casos de refinamiento.
E	Módulo elástico de un material homogéneo e isotrópico.
$E_f, E_m$	Módulo elástico de la fibra (f) y la matriz (m).
$E_v$	Módulo elástico de la viga en voladizo.
$E_1, E_{1f}, E_{1m}$	Módulo elástico longitudinal del compuesto ( $E_1$ ), la fibra (f) y la matriz (m).
$E_2, E_{2f}, E_{2m}$	Módulo elástico transversal en el plano del compuesto ( $E_2$ ), la fibra (f) y la matriz (m).
$E'_m$	Módulo elástico equivalente de la matriz en el modelo de esfuerzos triaxiales de Huang.
G	Módulo cortante de un material homogéneo e isotrópico.
$G_f, G_m$	Módulo cortante de la fibra (f) y la matriz (m).
$G_v$	Módulo cortante de la viga en voladizo.
$G_{12}, G_{12f}, G_{12m}$	Módulo cortante en el plano del compuesto ( $G_{12}$ ), la fibra (f) y la matriz (m).
$G_{23}, G_{23f}, G_{23m}$	Módulo cortante transversal del compuesto ( $G_{23}$ ), la fibra (f) y la matriz (m).

$H$	Altura del volumen representativo.
$[I]$	Matriz identidad (6x6).
$I_y$	Inercia centroidal con respecto al eje $y$ .
$K_{af}, K_{am}$	Módulo de área de la fibra (f) y la matriz (m).
$K_v, K_{vf}, K_{vm}$	Módulo volumétrico del compuesto ( $K_v$ ), la fibra (f) y la matriz (m).
$k_{23}, k_{23f}, k_{23m}$	Módulo volumétrico de deformación plana del compuesto ( $k_{23}$ ), la fibra (f) y la matriz (m).
$L_v$	Longitud de la viga en voladizo.
$L_i$	Coordenadas de volumen de los elementos tetraédricos.
$N_i$	Funciones de forma de los elementos tetraédricos.
$P_{m0}, P_{mr}$	Constante elástica independiente calculada en los casos de refinamiento ( $P_{m0}$ ) y en el de referencia ( $P_{mr}$ ).
$P_P$	Par de carga en ensayo de cortante con muesca en $V$ .
$P_T$	Carga de tensión en ensayo a tensión simple.
$P_z$	Carga puntual aplicada en la viga en voladizo.
$Q$	Punto interno dentro de los elementos tetraédricos.
$q_k$	Error absoluto libre de escalas.
$q_{prom}$	Promedio del error absoluto libre de escalas ( $q_k$ ).
$r_f$	Radio de fibra.
$R_i$	Fuerzas nodales de reacción en la dirección $i$ .
$[S], [S_f], [S_m]$	Matriz de conformidad (6x6) del compuesto ( $[S]$ ), la fibra (f) y la matriz (m).
$S_{ij}, S_{ijf}, S_{ijm}$	Componente $ij$ de la matriz de conformidad del compuesto ( $S_{ij}$ ), la fibra (f) y la matriz (m).
$S_3$	Serie de Fourier desarrollada por Nasser y Taya.
$T_v$	Espesor de la viga en voladizo.
$V_j$	Fuerza cortante nodal de reacción en la dirección $j$ .
$V_{Qjkl}$	Volúmenes parciales dentro de los elementos tetraédricos.
$V_T, V_f, V_m$	Volumen total del volumen representativo ( $V_T$ ), la fibra (f) y la matriz (m).

$u, v, w$	Desplazamientos nodales en las direcciones $x, y, z$ , respectivamente.
$W$	Ancho del volumen representativo.
$W_{\min}$	Ancho teórico mínimo del volumen representativo.
$W_v$	Ancho de la viga en voladizo.
$x, y, z$	Eje coordenado global.
$1, 2, 3$	Eje coordenado material.

## Acrónimos

AH	Aproximación homogénea e isotrópica.
ASE	Error absoluto libre de escalas (siglas en inglés).
ASTM	Sociedad Americana para ensayos y materiales (siglas en inglés).
CEI	Constante elástica independiente.
E	Matriz epóxica.
FC	Fibra de carbono.
FV	Fibra de vidrio.
FC/E	Fibra de carbono con matriz epóxica
FV/E	Fibra de vidrio con matriz epóxica.
MCU	Material compuesto unidireccional.
MEF	Modelos de elemento finito.
MM	Modelos de micromecánica.
VR	Volumen representativo.

## Modelos de micromecánica

AC	Modelo auto-consistente.
BR	Modelo de correlación de esfuerzos de Huang.
CH	Modelo de la ecuación general de Chamis.
CM	Modelo de Compresibilidad de Clyne
CN	Modelo semi-empírico de contigüidad de fibras.
FU	Modelo de capas de Fu.
FY	Modelo de Foye.

HCH	Modelo de la ecuación general de Hopkins y Chamis.
HT	Ecuaciones semi-empíricas de Halpin-Tsai.
MR	Modelo de regiones de Balacó de Morais.
PMM	Modelo de microestructura periódica.
RMM	Regla de mezclas en serie modificada
RMP	Regla de mezclas en paralelo.
RMS	Regla de mezclas en serie.
SP	Modelo de la ecuación general de Spencer.
STP	Modelo de partición de esfuerzos.
TR	Modelo de esfuerzos triaxiales.

# CAPÍTULO 1

## Introducción

### 1.1. Antecedentes

Un material compuesto es definido como aquella combinación macroscópica de dos o más materiales para formar un nuevo material con características mejoradas (Jones, 1999). Generalmente, los materiales compuestos exhiben las mejores cualidades de sus materiales constitutivos y, en algunas ocasiones, cualidades que ninguno de ellos posee. La rigidez específica, resistencia específica, resistencia a la corrosión, al desgaste y a la fatiga, conductividad eléctrica, conductividad térmica, entre otras, son algunas de las propiedades que pueden ser mejoradas al formar un material compuesto. No obstante, no todas estas características son mejoradas al mismo tiempo y/o en la misma proporción; en ingeniería, el objetivo principal de este tipo de materiales frecuentemente reside en la formación de un material con las características necesarias para desempeñar adecuadamente las exigencias de un diseño.

Debido a la mayor rigidez y resistencia específica de los materiales compuestos sobre los materiales metálicos, estos inicialmente (aproximadamente 1950) fueron implementados en la industria aeroespacial con el objetivo de disminuir el peso de los elementos, pero sin reducir su rigidez y resistencia (Soutis, 2005). Desde entonces, el campo de implementación de estos materiales ha ido en aumento, abarcando la industria naval, automotriz y civil, entre otras. En los últimos 35 años, la industria de la construcción ha implementado este tipo de materiales no solo por su alta resistencia o rigidez, sino también por la resistencia a los ambientes agresivos a los que una estructura puede enfrentarse y el menor costo que éstos pueden llegar presentar contra otra alternativa estructural (Hollaway, 2010). Asimismo, debido a que los proyectos de infraestructura son cada vez más desafiantes, en algunos casos los materiales compuestos presentan una alternativa constructiva más atractiva que la madera, el concreto y el acero. Esto ha motivado que la industria invierta en investigaciones para cubrir las expectativas de estos materiales en términos de una infraestructura funcional (Bakis, et al., 2002).

## 1.2. Planteamiento del problema

Aunque la implementación de los materiales compuestos en estructuras civiles es cada vez más amplia, aún resulta laborioso determinar las constantes elásticas independientes (CEI) que describen el comportamiento mecánico (elástico) del material ante diversas cargas. Esto resulta en un problema fundamental cuando se desea simular el comportamiento de una pieza o una estructura civil, ya que las CEI constituyen valores de entrada en modelos estructurales más complejos. En la Fig. 1.1 se ejemplifica una jerarquización dimensional de los materiales compuestos laminados, los cuales inician con una lámina unidireccional como estructura básica.

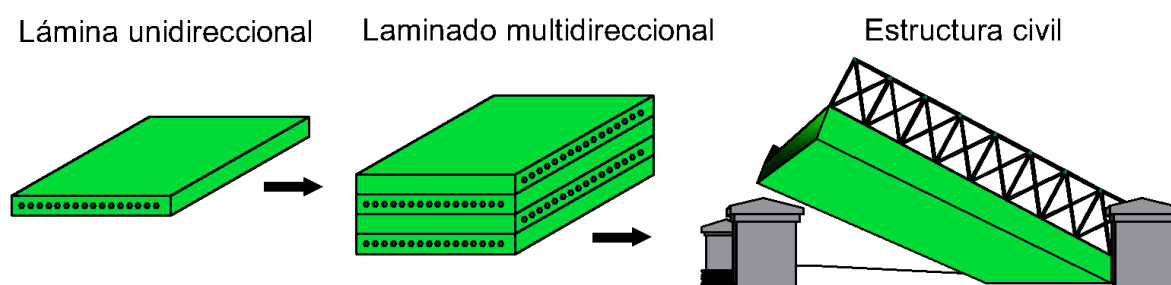


Fig. 1.1. Jerarquización dimensional de materiales compuestos laminados.

Para resolver este problema se han tomado diversos enfoques, principalmente la medición directa de las CEI, el uso de modelos de micromecánica (MM) y modelos de elemento finito (MEF). Sin embargo, los ensayos presentan dificultades para determinar las CEI fuera del plano, típicamente debido al pequeño espesor del que se dispone en un material laminado; además, las diversas combinaciones materiales, la arquitectura de la fase de refuerzo y las proporciones, originan un proceso muy costoso y prolongado, lo cual no resulta práctico para la industria. Por otro lado, los MM predicen las CEI de una manera mucho más rápida y versátil; no obstante, éstos asumen ciertas condiciones para reducir la dificultad matemática y, por esta razón, las CEI determinadas pueden ser imprecisas. Finalmente, los MEF presentan una gran ventaja, pues al ser un método numérico pueden considerar características más reales como es la zona interfacial, distribución de fibras aleatorias, fibras en distintas direcciones y agrietamiento, entre otros. No obstante, los MEF requieren de un cabal entendimiento del método, conocimiento en el manejo de un software especializado,

tiempo y recursos suficientes para el desarrollo de los modelos específicos, además de ser dedicados para alguna arquitectura material y fracción de fibra en particular.

Por estas razones, los MM (después de ser validados) constituyen una opción práctica y viable para la determinación de las CEI de arquitecturas básicas que puedan servir como valores de entrada en la elaboración de modelos estructurales más complejos (Fig. 1.1).

Dada esta motivación, este trabajo pretende desarrollar MEF con los que se puedan obtener las cinco CEI de un material compuesto unidireccional (MCU) y utilizarlos para la validación de MM existentes para la predicción de las mismas, pero de un modo más versátil. Con ello, se pretende recomendar un conjunto de expresiones analíticas cerradas para determinar las cinco CEI con resultados muy similares a los de un MEF considerando interfaz perfecta, cualquier combinación material y fracción de volumen de fibra. Esto reduciría el tiempo y recursos destinados a la determinación de las propiedades materiales a utilizar en modelos estructurales más complejos, tanto en la industria como en la academia, lo cual se considera la principal contribución de este trabajo.

### **1.3. Objetivos**

#### **1.3.1. Objetivo general**

Examinar los modelos analíticos de micromecánica existentes para la predicción de las constantes elásticas de un material compuesto reforzado con fibras unidireccionales, comparándolos contra modelos numéricos propios de elemento finito con interfaz perfecta, con la finalidad de proponer el conjunto de modelos analíticos más pertinentes.

#### **1.3.2. Objetivos específicos**

- Reunir, evaluar y comparar los modelos de micromecánica existentes para cada una de las constantes elásticas independientes de un material compuesto reforzado con fibras unidireccionales.
- Desarrollar modelos de elemento finito para la predicción de las cinco constantes elásticas independientes de un material compuesto reforzado con fibras unidireccionales, validándolos contra resultados publicados.



- Determinar el modelo de micromecánica más adecuado para la predicción de cada constante elástica independiente, de acuerdo con su comparación con el modelo de elemento finito correspondiente.
- Proponer un conjunto de expresiones analíticas de micromecánica que sean programables, suficientemente generales y versátiles para servir de base para alimentar las propiedades materiales de modelos estructurales más complejos.

## CAPÍTULO 2

### Marco teórico

#### 2.1. Materiales compuestos reforzados con fibras

##### 2.1.1. Arquitectura y simetrías materiales

Dentro de la vasta variedad de los materiales compuestos, los que presentan un mejor desempeño mecánico y estructural son los materiales fibroreforzados, en los que la fase de refuerzo se presenta en forma de fibras continuas, ya sean unidireccionales, trenzadas, en petatillo y tejidos (Hashin et al. 1997). Las estructuras desarrolladas con materiales fibroreforzados son conformadas por láminas apiladas, formando materiales compuestos laminados (ver Fig. 1.1). De esta manera, la arquitectura más simple de un laminado es una lámina unidireccional (Fig. 2.1); debido a su heterogeneidad y su inherente anisotropía material, el comportamiento mecánico de un MCU es muy distinto al de los materiales metálicos homogéneos e isótropos que usualmente son utilizados en la ingeniería civil.

En la literatura es común la convención de que el sistema coordenado material  $\{1, 2, 3\}$  esté orientado de tal forma que el eje 1 es paralelo a la dirección de las fibras, el eje 2 se encuentra en el plano y es transversal a las fibras, y el eje 3 se encuentre a través del espesor de la lámina (Fig. 2.1). Para el caso específico de una lámina de un MCU, los ejes globales  $\{x, y, z\}$  coinciden con los ejes materiales  $\{1, 2, 3\}$  (Fig. 2.1), aunque esto no es necesariamente cierto para un multilaminado con distintas orientaciones.

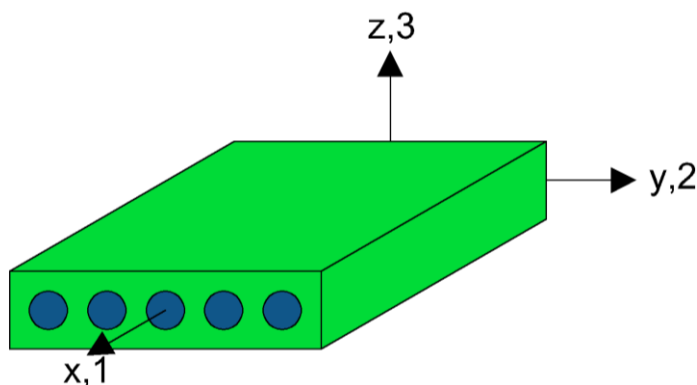


Fig. 2.1. Configuración del eje coordenado global y material en un MCU.

El acero y el concreto exhiben propiedades elásticas idénticas en sus direcciones ortogonales por lo cual son considerados materiales isotrópicos. Esto último no sucede en los MCU debido a la presencia de las fibras, esto es, la rigidez del MCU en la dirección longitudinal a las fibras (eje 1) es mayor que su rigidez en las direcciones transversales a éstas (ejes 2 y 3). Igualmente, en un MCU se considera que las propiedades elásticas en el plano transversal a las fibras son idénticas, es decir, el plano {2,3} es un plano de isotropía material; a este tipo de comportamiento se le conoce como transversalmente isotrópico (Chou, 1992). Para describir el comportamiento elástico-lineal de un MCU se requieren de cinco CEI, las cuales generalmente se escogen como los módulos elásticos longitudinal ( $E_1$ ) y transversal en el plano ( $E_2$ ), la razón de Poisson longitudinal ( $\nu_{12}$ ), el módulo cortante en el plano ( $G_{12}$ ) e, indistintamente, el módulo cortante transversal ( $G_{23}$ ) o la razón de Poisson transversal ( $\nu_{23}$ ) (Berthelot, 1999); estos dos últimos parámetros materiales se encuentran relacionadas mediante la expresión isotrópica,

$$G_{23} = \frac{E_2}{2(1+\nu_{23})} \quad (2.1)$$

Debido al plano de isotropía material {2,3}, las tres constantes elásticas restantes son,

$$E_3 = E_2 \quad (2.2a)$$

$$\nu_{13} = \nu_{12} \quad (2.2b)$$

$$G_{13} = G_{12} \quad (2.2c)$$

### 2.1.2. Relaciones elástico-lineales

Aplicando la teoría de la elasticidad (ley de Hooke) a un MCU se puede determinar el comportamiento elástico idealizado del material homogéneo, superponiendo las respuestas individuales ante un estado combinado de esfuerzos normales y cortantes (Hyer, 1998). Esto produce la ecuación,

$$\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\} \quad (2.3)$$

donde  $\{\varepsilon\}$  representa el vector de deformaciones unitarias,  $[S]$  es conocida como la matriz de conformidad<sup>1</sup> y  $\{\sigma\}$  es el vector de esfuerzos aplicados al MCU. Mientras que

---

<sup>1</sup> Conocida en textos académicos de habla inglesa como "compliance".

$\{\varepsilon\}$  y  $\{\sigma\}$  son vectores de dimensiones  $6 \times 1$ ,  $[S]$  es una matriz  $6 \times 6$ . La relación entre ellos (Ec. (2.3)) puede ser escrita explícitamente en su forma matricial como,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

donde  $\varepsilon_i$  representa la deformación extensional debido al esfuerzo axial  $\sigma_i$  en las direcciones materiales ( $i=1,2,3$ ),  $\gamma_{ij}$  la deformación por cortante debido al esfuerzo cortante  $\tau_{ij}$  en los planos materiales ( $i \neq j=1,2,3$ ) y las componentes  $S_{ij}$  ( $i,j=1,2,3$ ) se definen con las ecuaciones,

$$S_{11} = \frac{1}{E_1} \quad (2.5a)$$

$$S_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} \quad (2.5b)$$

$$S_{22} = \frac{1}{E_2} \quad (2.5c)$$

$$S_{23} = -\frac{\nu_{23}}{E_2} \quad (2.5d)$$

$$S_{44} = \frac{1}{G_{23}} \quad (2.5e)$$

$$S_{55} = \frac{1}{G_{12}} \quad (2.5d)$$

Debido a que el plano  $\{2,3\}$  es de simetría material,  $S_{13}=S_{12}$ ,  $S_{33}=S_{22}$  y  $S_{66}=S_{55}$ . Además  $S_{21}=S_{12}$ ,  $S_{31}=S_{13}$  y  $S_{32}=S_{23}$ , debido a que estas últimas se encuentran relacionadas mediante al teorema recíproco de Maxwell-Betti (Hyer, 1998) a través de la expresión,

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \quad (i \neq j=1,2,3) \quad (2.6)$$

### 2.1.3. Determinación de las propiedades elásticas a partir de ensayos estandarizados

Determinar la respuesta elástica de un MCU equivale a determinar las componentes de su matriz de conformidad (Ecs. 2.5). Experimentalmente esto se logra mediante ensayos mecánicos a tensión y cortante de laminados unidireccionales (Carlsson et al. 2014). La Sociedad Americana para Ensayos y Materiales, ASTM por sus siglas en inglés, ha realizado estándares en los que se describen las principales características materiales, geométricas y consideraciones generales para los especímenes de estos ensayos. No obstante, solo cuatro de las cinco CEI son determinadas a partir de estos estándares, ya que la medición de las propiedades a través del espesor constituye aún un reto.

En el estándar ASTM D3039 (2014) se encuentra descrito el ensayo a tensión simple para las propiedades en el plano  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\nu_{12}$  y  $\nu_{21}$ , esta última conocida como la razón de Poisson longitudinal menor. Las propiedades  $E_1$  y  $\nu_{12}$  son determinadas a partir de laminados en los que las fibras se encuentran orientadas a  $0^\circ$ , esto es, las fibras de las láminas son paralelas a la dirección de la carga a tensión ( $P_T$ ). Para laminados a  $0^\circ$ , dicho estándar recomienda que las dimensiones del espécimen sean de 15 mm de ancho, 250 mm de largo y 1 mm de espesor, donde este último deberá estar conformado de 6 a 8 láminas (Fig. 2.2).

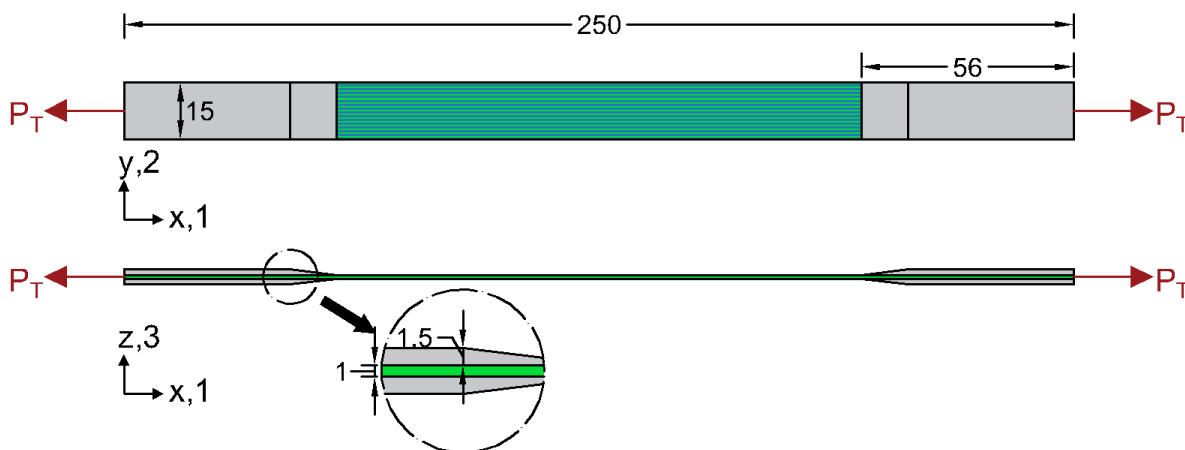


Fig. 2.2. Geometría del espécimen y carga aplicada a un laminado a  $0^\circ$  de acuerdo al estándar ASTM D3039 (cotas en mm).

Análogamente, para la determinación de  $E_2$  y  $\nu_{21}$  se utilizan especímenes a  $90^\circ$ , esto es, las fibras se encuentran orientadas perpendicularmente a la dirección de  $P_T$  en el

plano  $\{1,2\}$ . Sin embargo,  $\nu_{21}$  es redundante (no es una CEI) ya que ésta puede ser determinada a partir de la Ec. (2.6). Para laminados a  $90^\circ$ , el largo de 175 mm, el ancho sugerido es de 25 mm, y su espesor es de 2 mm, este último conformado de 16 a 24 láminas.

Para el módulo cortante en el plano ( $G_{12}$ ), la ASTM establece diversos estándares que dependen del tipo de carga preferido y las dimensiones del material disponible. Entre estos se encuentra la viga con muesca en V (ASTM D5379, 2012), cortante por rieles (ASTM D4255, 2015) y tensión de un laminado a  $\pm 45^\circ$  (ASTM D3518, 2013). En el estándar ASTM D5379 (2012) se idealiza el espécimen como una viga simplemente apoyada en sus extremos y sometida a un par de cargas ( $P_p$ ) de igual magnitud y sentido contrario con una separación simétrica al centro del claro (Fig. 2.3).

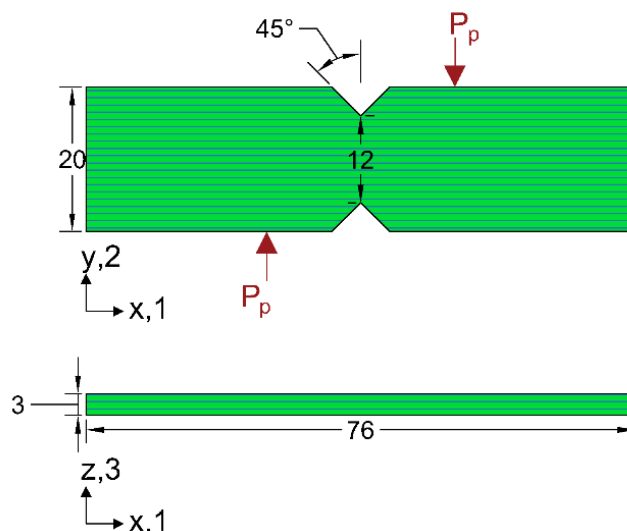


Fig. 2.3. Geometría del espécimen y carga aplicada en un laminado a  $0^\circ$  en la prueba de cortante con muesca en V (ASTM D5379, 2012) (cotas en mm).

Debido a la naturaleza intrínseca del material y a que existen problemas de manufactura, los laminados son de espesores pequeños y esto provoca dificultades en las mediciones de modo experimental fuera del plano para obtener  $G_{23}$ ,  $\nu_{23}$  y  $\nu_{13}$ , siendo esta última la razón de Poisson longitudinal a través del espesor.

Además, es de notar que los ensayos requieren de al menos cinco réplicas reproducibles por cada configuración material, fracción de volumen de fibra y demandan mucha preparación previa, por lo que la medición directa de las CEI requiere de mucha inversión de personal, tiempo y recursos.

## 2.2. Modelos de micromecánica para la predicción de propiedades elásticas en materiales compuestos reforzados con fibras unidireccionales

### 2.2.1. Generalidades

Una manera teórica de determinar las CEI en un MCU es considerando al material de manera microscópica en la que se puede incluir la interacción que existe entre los materiales constitutivos y el efecto que éstos tienen sobre el comportamiento elástico del material compuesto, es decir, desde el punto de vista de la micromecánica (Barbero, 2011). La micromecánica se basa en el análisis de modelos representativos del problema, comúnmente conocidos como volumen representativo (VR), elementos que deben ser lo suficientemente pequeños para capturar los detalles microscópicos de la fibra y la matriz y, a su vez, lo suficientemente grandes para representar el comportamiento macroscópico del material si éste fuese repetido infinitamente dentro y fuera del plano (Herakovich, 1998).

En el desarrollo de los diversos MM para la predicción de propiedades elásticas de los MCU, éstos coinciden con asunciones generales, siendo las más comunes: la lámina es macroscópicamente homogénea, ortotrópica y linealmente elástica; los materiales constitutivos tienen un comportamiento linealmente elástico, son homogéneos y se encuentran libres de vacíos; existe una adherencia perfecta entre los materiales constitutivos y no existe una zona de transición entre ellos (interfaz perfecta); las fibras se encuentran separadas entre sí y perfectamente alineadas; la matriz es isotrópica mientras que las fibras pueden, o no, exhibir ortotropía material (Chamis y Sendekyj, 1968). Además, la mayoría de los MM consideran que la respuesta elástica del VR es un promedio general de esfuerzos y deformaciones entre los materiales constitutivos (Whitney y McCullough, 1990).

Las expresiones analíticas son función de las propiedades elásticas de los materiales constitutivos y su fracción de volumen ( $\phi_i$ ), esta última definida como,

$$\phi_i = \frac{V_i}{V_T} \quad (2.7)$$

donde  $V_T$  es el volumen total del VR,  $V_i$  es el volumen del material constitutivo, el subíndice  $i$  denota que puede pertenecer a la fibra ( $f$ ) o a la matriz ( $m$ ) y debido a la asunción de la ausencia de vacíos en el VR, se cumple que  $\phi_f + \phi_m = 1$ .

### 2.2.2. Regla de mezclas en paralelo

El modelo conocido como regla de mezclas en paralelo (RMP) debido a que se asume que las rigideces de los materiales constitutivos comportan como un sistema resortes en paralelo. Considerando que existe un esfuerzo de tensión uniaxial en la dirección 1 (ver Fig. 2.1), se asume que la distribución del esfuerzo es uniforme entre los materiales constitutivos, que la deformación entre ellos es idéntica, que la carga aplicada es la suma de la carga en la fibra y en la matriz y que la respuesta del sistema es proporcional al volumen y la rigidez de cada material (Hull y Clyne, 1996). De este modo la predicción de  $E_1$  y  $\nu_{12}$  se realiza través de la expresión,

$$RMP = \phi_f RMP_f + \phi_m RMP_m \quad (2.8)$$

donde  $RMP$  adquiere los valores de  $E_1$  o  $\nu_{12}$ , dependiendo de la CEI que se pretenda predecir.  $E_{1f}$  y  $\nu_{12f}$  son el módulo elástico y la razón de Poisson longitudinal de la fibra, respectivamente, y  $E_{1m}$  y  $\nu_{12m}$  los correspondientes a la matriz.

### 2.2.3. Regla de mezclas en serie

En el MM conocido como regla de mezclas en serie (RMS) se asume que las rigideces de los materiales constitutivos se comportan como un sistema de resortes en serie. Para la determinación de  $E_2$  se considera un esfuerzo de tensión uniaxial en la dirección 2 (ver Fig. 2.1), se asume que la distribución del esfuerzo es uniforme entre los materiales constitutivos, que la carga aplicada es la misma para la fibra y la matriz y que la deformación del sistema es la suma de la de cada uno de los materiales (Hull y Clyne, 1996). Análogamente, para la predicción de  $G_{12}$  se considera un esfuerzo cortante en el plano  $\{1,2\}$  (en lugar del esfuerzo de tensión uniaxial en la dirección 2) y se mantienen las mismas asunciones que para  $E_2$ . De este modo, ambas expresiones se pueden generalizar como,

$$RMS = \frac{RMS_m}{\phi_f \left( \frac{RMS_m}{RMS_f} - 1 \right) + 1} \quad (2.9)$$



donde  $RMS$  adquiere los valores de  $E_2$  o  $G_{12}$ .  $E_{2f}$  y  $G_{12f}$  son el módulo elástico transversal y el módulo cortante en el plano  $\{1,2\}$ , respectivamente, y  $E_{2m}$  y  $G_{12m}$  son los parámetros correspondientes a la matriz.

Es de notarse que tanto en RMP como en RMS no existe interacción entre propiedades; esto es, por ejemplo,  $E_1$  solo depende de  $E_{1f}$  y  $E_m$  y no de otras propiedades elásticas de los materiales constitutivos.

#### 2.2.4. Ecuación general de Chamis

En el MM propuesto por Chamis (CH, 1984) se considera que el VR tiene una geometría cuadrada con una fibra circular al centro del mismo, que dicho VR soporta distintos estados de esfuerzos axiales y cortantes y que el comportamiento mecánico de los materiales constitutivos es elástico-lineal hasta su fractura. De este modo, el autor propone un conjunto de cuatro ecuaciones basadas en un análisis geométrico y de mecánica de materiales, siendo estas idénticas a las Ecs. (2.8) para las propiedades longitudinales ( $E_1$  y  $\nu_{12}$ ); para la determinación de  $E_2$  y  $G_{12}$  el autor propone la expresión general,

$$CH = \frac{CH_m}{1 - \sqrt{\phi_f} \left( 1 - \frac{CH_m}{CH_f} \right)} \quad (2.10)$$

donde  $CH$  adquiere los valores de  $E_2$  o  $G_{12}$ .

#### 2.2.5. Ecuación general de Hopkins y Chamis

El MM propuesto por Hopkins y Chamis (HCH, 1985) asume un VR de geometría cúbica con una fibra cilíndrica al centro y a su vez embebida en un cilindro concéntrico de diámetro mayor denominada como una zona de interfaz. En este MM la matriz, la fibra y la interfaz pueden exhibir un comportamiento transversalmente isotrópico. Para las propiedades elásticas de la interfaz los autores recomiendan utilizar un valor constante e igual al promedio de las propiedades elásticas de la fibra y la matriz. Hopkins y Chamis definen el espesor de esta zona de interfaz como la diferencia entre el diámetro original y final de la fibra debido a su deformación por consecuencia de un estado de esfuerzo impuesto en el VR. Derivado de un análisis geométrico y de mecánica de materiales, los autores proponen un conjunto de ecuaciones para la predicción de  $E_1$ ,  $\nu_{12}$ ,  $E_2$  y  $G_{12}$  que son función, entre otras, de la razón entre el

diámetro final y el inicial de la fibra. Sin embargo, los autores no recomiendan un valor fijo para el diámetro final de la fibra. Si se considera una interfaz perfecta, la razón entre diámetros es igual a 1 y las expresiones para  $E_1$  y  $\nu_{12}$  de este MM se reducen a la Ec. (2.8). Para la determinación de  $E_2$  y  $G_{12}$  con interfaz perfecta los autores proponen la expresión general,

$$HCH = HCH_m \left[ \frac{\sqrt{\phi_f}}{\sqrt{\phi_f} \left( \frac{HCH_m}{HCH_f} \right) + (1 - \sqrt{\phi_f})} + \left( 1 - \sqrt{\phi_f} \right) \right] \quad (2.11)$$

donde  $HCH$  adquiere los valores de  $E_2$  o  $G_{12}$ .

### 2.2.6. Ecuación general de Spencer

El modelo propuesto por Spencer (SP, 1986) se basa en la introducción de un parámetro de separación entre fibras ( $\Gamma$ ) que es función del contenido de las mismas en un MCU. Este modelo considera una distribución de fibras en un arreglo cuadrado y que ante un esfuerzo de tensión uniaxial en la dirección 2 (ver Fig. 2.1), la distribución de esfuerzos de tensión en dicha dirección varía de una forma parabólica en la dirección 3. Esta distribución de esfuerzos es máxima en el centro de las fibras y mínima entre éstas, y a su vez es constante en la dirección de la carga. A partir de esta distribución, el autor plantea una franja de espesor diferencial e integra la distribución de esfuerzos en toda el área del VR, para obtener el esfuerzo efectivo en el VR. La solución de la integral se expresa de forma general para la determinación de  $E_2$  y  $G_{12}$  como,

$$SP = SP_m \left\{ \frac{\Gamma - 1}{\Gamma} + \frac{1}{\psi} \left[ \frac{2\Gamma}{\sqrt{\Gamma^2 - \psi^2}} \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{\Gamma + \psi}}{\sqrt{\Gamma - \psi}} \right) - \frac{\pi}{2} \right] \right\} \quad (2.12a)$$

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{\phi_f (1.1\phi_f^2 - 2.1\phi_f + 2.2)}} \quad (2.12b)$$

$$\psi = 1 - \frac{SP_m}{SP_f} \quad (2.12c)$$

donde  $SP$  adquiere los valores de  $E_2$  o  $G_{12}$ .

### 2.2.7. Ecuaciones semi-empíricas de contigüidad

En el MM semi-empírico de contigüidad de fibras (CN), Tsai (1964) considera que los materiales constitutivos son isotrópicos y asegura que en un MCU con  $\phi_f > 20\%$  muchas de las fibras se encuentran en contacto entre sí, lo cual resulta contradictorio con la idealización de que la fibra siempre se encuentra rodeada por matriz. El autor incluye este fenómeno por medio de un parámetro de contigüidad ( $C_T$ ) que puede adquirir valores entre 0 y 1, siendo 0 cuando las fibras se encuentran completamente rodadas por matriz y 1 cuando las fibras se encuentran en contacto entre sí. Así pues, el autor recomienda que  $C_T$  debe ser más próximo a 0 que a 1 ( $0 \leq C_T \leq 0.4$ ) de acuerdo con la comparación de su MM contra resultados experimentales. Así, después de un ajuste a datos experimentales el autor propone un valor de  $C_T = 0.2$ . Finalmente, Tsai (1964) asegura que el fenómeno de contigüidad en los MCU es significativo para las propiedades elásticas que involucran la dirección transversal a las fibras ( $\nu_{12}$ ,  $E_2$  y  $G_{12}$ ), de modo que para  $\nu_{12}$  el autor propone la expresión,

$$\nu_{12} = (1 - C_T)CN_A + C_T CN_B \quad (2.13a)$$

$$CN_A = \frac{K_{af}\nu_f\phi_f(2K_{am} + G_m) + K_{am}\nu_m\phi_m(2K_{af} + G_m)}{K_{af}(2K_{am} + G_m) - G_m\phi_f(K_{af} - K_{am})} \quad (2.13b)$$

$$CN_B = \frac{K_{am}\nu_m\phi_f(2K_{af} + G_f) + K_{af}\nu_f\phi_f(2K_{am} + G_f)}{K_{af}(2K_{am} + G_f) + G_f\phi_m(K_{am} - K_{af})} \quad (2.13c)$$

donde  $\nu_i$ ,  $G_i$  y  $K_{ai}$  son la razón de Poisson, el módulo cortante y el “módulo de área” (definido por el autor), respectivamente, y el subíndice  $i$  señala la pertenencia a la fibra ( $f$ ) y la matriz ( $m$ ). De acuerdo al autor, el módulo de área de un material isotrópico se determina mediante la expresión,

$$K_{ai} = \frac{E_i}{2(1 - \nu_i)} \quad (i = f, m) \quad (2.14)$$

donde  $E_f$  y  $E_m$  son el módulo elástico de la fibra y la matriz, respectivamente. Para  $E_2$  el autor propone la expresión,

$$E_2 = 2[1 - \nu_f + \phi_m(\nu_f - \nu_m)][(1 - C_T)CN_C + C_T CN_D] \quad (2.15a)$$

$$CN_C = \frac{K_{af}(2K_{am} + G_m) - G_m\phi_m(K_{af} - K_{am})}{(2K_{am} + G_m) + 2\phi_m(K_{af} - K_{am})} \quad (2.15b)$$

$$CN_D = \frac{K_{af}(2K_{am}+G_f)-G_f\phi_m(K_{am}-K_{af})}{(2K_{am}+G_f)+2\phi_m(K_{am}-K_{af})} \quad (2.15c)$$

Para  $G_{12}$  el autor propone la expresión,

$$G_{12}=G_m(1-C_T)\frac{2G_f-\phi_m(G_f-G_m)}{2G_f+\phi_m(G_f-G_m)}+C_T G_f\frac{(G_f+G_m)-\phi_m(G_f-G_m)}{(G_f+G_m)+\phi_m(G_f-G_m)} \quad (2.16)$$

Note que a diferencia de los modelos anteriormente presentados (RMP, RMS, CH, HCH y SP), el modelo CN si considera la contribución de otras propiedades elásticas en el comportamiento mecánico de un MCU, esto es, la Ec. (2.13a) no solo es función de  $\nu_f$  y  $\nu_m$ , o la Ec. (2.14a) no solo es función de  $E_f$  y  $E_m$ , sino que en ambas ecuaciones se considera la contribución de  $G_f$ ,  $G_m$ ,  $K_{af}$  y  $K_{am}$ .

### 2.2.8. Modelo auto-consistente

El MM conocido como auto-consistente (AC) fue propuesto por Hill (1964) y establece que las CEI en un MCU son independientes de la geometría de la fibra, siempre y cuando se conserve el comportamiento transversalmente isotrópico. Posteriormente, Hill (1965), estimó las CEI de un MCU utilizando un método aplicado con anterioridad en materiales policristalinos con inclusiones dispersas, denominado por él mismo como "auto-consistente". De este modo, el modelo de Hill (1965) considera un VR constituido por una fibra de sección circular inmersa en un cilindro con las propiedades de la matriz y a su vez ambos pertenecen a un medio homogéneo con las propiedades elásticas del MCU. Derivado de un análisis energético, el autor propone para la determinación de  $E_1$  y  $\nu_{12}$  las expresiones,

$$E_1=E_{1f}\phi_f+E_m\phi_m+\frac{4\phi_f\phi_m(\nu_{12f}-\nu_m)^2}{\frac{\phi_f}{k_{23m}}+\frac{1}{G_m}+\frac{\phi_m}{k_{23f}}} \quad (2.17)$$

$$\nu_{12}=\nu_{12f}\phi_f+\nu_m\phi_m+\frac{\phi_f\phi_m(\nu_{12f}-\nu_m)\left(\frac{1}{k_{23m}}-\frac{1}{k_f}\right)}{\frac{\phi_f}{k_{23m}}+\frac{1}{G_m}+\frac{\phi_m}{k_{23f}}} \quad (2.18)$$

donde  $E_m$  es el módulo elástico de la matriz,  $k_{23m}$  y  $k_{23f}$  son conocidas como el módulo volumétrico de deformación plana de la matriz y de la fibra, respectivamente.  $k_{23m}$  y  $k_{23f}$  son constantes elásticas redundantes (no son independientes) y cuando el

material es homogéneo y de comportamiento transversalmente isotrópico, éstos quedan definidos por,

$$k_{23i} = -\frac{E_{1i}E_{2i}}{2(2E_{2i}v_{12i}^2 - E_{1i} + E_{1i}v_{23i})} \quad (i=f,m) \quad (2.19a)$$

donde  $v_{23f}$  y  $v_{23m}$  son la razón de Poisson transversal de la fibra y la matriz, respectivamente. Cuando el material es homogéneo e isotrópico, la Ec. (2.19a) se puede reescribir como,

$$k_{23i} = -\frac{E_i}{2(v_i+1)(2v_i-1)} \quad (i=f,m) \quad (2.19b)$$

Finalmente, Hill (1965) expresa  $G_{12}$  como una ecuación cuadrática en función de  $G_m$  y  $G_{12f}$ , comentando que dicha CEI puede ser determinada como la raíz positiva de dicha ecuación; sin embargo, el autor no ofrece una expresión cerrada para  $G_{12}$ .

Posteriormente, Hermans (1967) partiendo de este método (AC), inicialmente aplicado por Hill (1965), considerando el mismo VR bajo un estado de esfuerzos radial y desarrolló una expresión para  $G_{12}$  como,

$$G_{12} = G_m \frac{G_m \phi_m + G_{12f}(1 + \phi_f)}{G_m(1 + \phi_f) + G_{12f}\phi_m} \quad (2.20)$$

### 2.2.9. Ecuaciones semi-empíricas de Halpin-Tsai

En el MM conocido popularmente como las ecuaciones de Halpin-Tsai (HT), Halpin (1969) utiliza como base las expresiones del modelo de Hill (1965) e introduce un parámetro semi-empírico de refuerzo ( $\xi$ ). Dicho parámetro de refuerzo depende de la geometría del material de refuerzo y su de distribución. Dicho parámetro fue calibrado utilizando resultados experimentales y de elemento finito. De esta manera, el autor propone una expresión semi-empírica generalizada para la predicción de  $E_1$ ,  $\nu_{12}$ ,  $E_2$  y  $G_{12}$  como,

$$HT = HT_m \left( \frac{1 + \xi \eta \phi_f}{1 - \eta \phi_f} \right) \quad (2.21a)$$

$$\eta = \frac{\frac{HT_f}{HT_m} - 1}{\frac{HT_f}{HT_m} + \xi} \quad (2.21b)$$

donde  $HT$  adquiere los valores de  $E_1$ ,  $\nu_{12}$ ,  $E_2$  o  $G_{12}$ . Considerando que la fase de refuerzo son fibras en una dirección, el autor propone que para  $E_1$  y  $\nu_{12}$ ,  $\xi$  se aproxime al infinito, lo cual hace que las Ecs. (2.21) se reduzcan a la Ec. (2.8). Para la predicción de  $E_2$  y  $G_{12}$  el autor propone que se utilicen valores de  $\xi=2$  y  $\xi=1$ , respectivamente. En un trabajo posterior, Hewitt y Malherbe (1970) compararon los resultados de las Ecs. (2.21) para  $E_2$  y  $G_{12}$  contra ensayos y análisis numéricos, comprobando que existe una pérdida de precisión con  $\phi_f > 70\%$ . Por lo tanto, ellos recomiendan compensar dicha pérdida introduciendo una modificación a los valores  $\xi$  para  $E_2$  ( $\xi_{E2}$ ) y  $G_{12}$  ( $\xi_{G12}$ ) mediante las expresiones,

$$\xi_{E2} = 2 + 40\phi_f^{10} \quad (2.22a)$$

$$\xi_{G12} = 1 + 40\phi_f^{10} \quad (2.22b)$$

### 2.2.10. Modelo de regiones de Balacó de Morais

El MM propuesto por Balacó de Morais (MR, 2000) se considera que el MCU tiene una distribución hexagonal de fibras y que éstas tienen una forma cuadrada. El VR idealizado por el autor adquiere la forma de un cuadrado con un cuarto de una fibra en una de las esquinas. Asimismo, el autor subdivide el VR en 4 regiones y establece un sistema de 12 ecuaciones de equilibrio a partir de la acción de un esfuerzo uniforme sobre el VR en la dirección 2 y un estado de esfuerzo plano en la dirección 3. La solución de dicho sistema deriva en la expresión para la predicción de  $E_2$  como,

$$E_2 = \frac{\sqrt{\phi_f}}{\frac{\sqrt{\phi_f}}{E_{2f}} + (1 - \sqrt{\phi_f}) \frac{1 - \nu_m^2}{E_m}} + \left(1 - \sqrt{\phi_f}\right) \frac{E_m}{1 - \nu_m^2} \quad (2.23)$$

Asimismo, el autor indica que al ser determinado  $E_2$ ,  $\nu_{23}$  puede determinarse mediante la expresión,

$$\nu_{23} = 1 - E_2 \left( \frac{2\nu_{12}^2}{E_1} + \frac{1}{2k_{23}} \right) \quad (2.24)$$

donde  $E_1$  y  $\nu_{12}$  pueden determinarse a partir de la Ec. (2.8) y  $k_{23}$  se define como el módulo volumétrico de deformación plana del MCU; el autor considera que una buena predicción de esta propiedad está dada por el modelo AC con la expresión,

$$k_{23} = \frac{k_{23m}\phi_m(k_{23f}+G_{23m})+k_{23f}\phi_f(k_{23m}+G_{23m})}{\phi_m(k_{23f}+G_{23m})+\phi_f(k_{23m}+G_{23m})} \quad (2.25)$$

donde  $G_{23m}$  es el módulo cortante transversal de la matriz.

### 2.2.11. Ecuación de correlación de esfuerzos de Huang para el módulo elástico transversal

El MM propuesto por Huang (2000) es también conocido como de “puenteo” (BR) debido a que existe una matriz (6x6) de correlación de esfuerzos entre los materiales constitutivos ( $[A]$ ) que impacta las propiedades elásticas del MCU. Este autor propone modificar la matriz de conformidad del material compuesto ( $[S]$ , Ec. (2.3)) mediante un acoplamiento entre la matriz de conformidad de la fibra ( $[S_f]$ ), la matriz ( $[S_m]$ ) y  $[A]$  como,

$$[S] = (\phi_f[S_f] + \phi_m[S_m][A])(\phi_f[I] + \phi_m[A])^{-1} \quad (2.26)$$

donde  $[I]$  es la matriz identidad. Los componentes de  $[S_f]$  y  $[S_m]$  se expresan matricialmente de acuerdo a las Ecs. (2.5) usando las propiedades de la fibra o la matriz, respectivamente. A partir de un manejo algebraico el autor llega a la misma expresión que la RMP (Ec. (2.8)) para  $E_1$  y  $\nu_{12}$ , mientras que para  $E_2$  propone,

$$E_2 = \frac{(\phi_f + \phi_m A_{11})(\phi_f + \phi_m A_{22})}{(\phi_f + \phi_m A_{11})(\phi_f S_{22f} + \phi_m A_{22} S_{22m}) + \phi_f \phi_m A_{12}(S_{12m} - S_{12f})} \quad (2.27a)$$

$$A_{11} = \frac{E_m}{E_{1f}} \quad (2.27b)$$

$$A_{22} = \frac{E_f + E_m}{2E_f} \quad (2.27c)$$

$$A_{12} = \frac{S_{12f} - S_{12m}}{S_{11f} - S_{11m}} (A_{11} - A_{22}) \quad (2.27d)$$

donde  $A_{ij}$  son las componentes de  $[A]$  (Ec. (2.26)) y  $S_{ijf}$  y  $S_{ijm}$  son los componentes  $ij$  de la matriz de conformidad de la fibra y la matriz, respectivamente (ver Ecs. (2.5)).

### 2.2.12. Modelo de microestructura periódica de Luciano y Barbero para el módulo cortante en el plano

En el MM conocido como microestructura periódica (PMM), Luciano y Barbero (1994) analizan el comportamiento mecánico de los MCU considerando que éstos están formados por microestructuras que se repiten. Los autores consideran que la deformación unitaria del MCU ( $\{e\}$ , Ec. (2.3)) puede ser vista como la sumatoria de las respuestas efectivas de un número infinito de microestructuras que se repiten periódicamente dentro del MCU. Los autores parten del trabajo de Nasser y Taya (1981), quienes consideran que la respuesta efectiva de un compuesto con vacíos puede ser expresada en términos de series infinitas que únicamente dependen de la geometría de los vacíos y lo aplican al MCU. Finalmente, proponen expresiones para determinar los componentes de la matriz de rigidez ( $[C]=[S]^{-1}$ ) en función de series de Fourier. Debido al acoplamiento de deformaciones por extensión que existe entre  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\nu_{12}$  y  $\nu_{23}$  (ver términos  $S_{ij}$  con  $i,j= 1,2,3$  en Ec. (2.4)) los autores presentan expresiones cerradas para dichas CEI en función de las componentes  $ij$  de la matriz de rigidez ( $C_{ij}$ ,  $i,j=1,2,3$ ); no obstante, debido al desacoplamiento de las deformaciones por cortante, los autores presentan una expresión cerrada para  $G_{12}$  como,

$$G_{12}=G_m \left[ 1 + \frac{\phi_f \left( 1 - \frac{G_m}{G_{12f}} \right)}{\frac{G_m}{G_f} + S_3 \left( 1 - \frac{G_m}{G_{12f}} \right)} \right] \quad (2.28a)$$

donde  $S_3$  es una serie de Fourier desarrollada por Nasser y Taya (1981) en función del contenido de vacíos en un compuesto, y, de acuerdo con Luciano y Barbero (1994), esta serie puede aproximarse como una expresión cuadrática en función de  $\phi_f$  como,

$$S_3=0.492-0.476\phi_f-0.027\phi_f^2 \quad (2.28b)$$

### 2.2.13. Modelo de partición de esfuerzos de Tsai y Hahn

El MM de partición de esfuerzos (STP) desarrollado por Tsai y Hahn (1980) considera que cuando un MCU está sometido a un esfuerzo de tensión (o cortante) en la dirección 2 (o plano  $\{1,2\}$ ), el esfuerzo promedio en la matriz es una fracción del esfuerzo promedio en la fibra. Debido a esto, se introduce un parámetro de partición de esfuerzos ( $\alpha$ ) de manera que  $\alpha=\sigma_m/\sigma_f$ , donde  $\sigma_m$  y  $\sigma_f$  son los esfuerzos promedio en



la matriz y en la fibra, respectivamente. Los autores consideran que el esfuerzo promedio en la matriz decrece conforme la razón entre la rigidez de la fibra y la matriz aumenta y que, a su vez esto dependerá de  $\phi_m$ . Finalmente, los autores proponen una expresión general para la predicción de  $G_{12}$ ,  $G_{23}$  y  $k_{23}$  como,

$$STP = \left[ \frac{1}{\phi_f + \alpha\phi_m} \left( \frac{\phi_f}{STP_f} + \frac{\alpha\phi_m}{STP_m} \right) \right]^{-1} \quad (2.29)$$

donde STP adquiere los valores de  $G_{12}$ ,  $G_{23}$  o  $k_{23}$ . Así bien,  $\alpha_i$  ( $i = G_{12}, G_{23}$  o  $k_{23}$ ) se determina mediante las expresiones

$$\alpha_{G_{12}} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{G_m}{G_{12f}} \right) \quad (2.30a)$$

$$\alpha_{G_{23}} = \frac{1}{4(1-\nu_m)} \left( 3 - 4\nu_m + \frac{G_m}{G_{23f}} \right) \quad (2.30b)$$

$$\alpha_{k_{23}} = \frac{1}{2(1-\nu_m)} \left( 1 + \frac{G_m}{k_{23f}} \right) \quad (2.30c)$$

Finalmente, con la obtención de  $G_{23}$  y  $k_{23}$  los autores proponen la predicción de  $E_2$  mediante la expresión,

$$E_2 = \frac{4k_{23}G_{23}}{k_{23} + \beta G_{23}} \quad (2.31a)$$

$$\beta = 1 + \frac{4k_{23}\nu_{12}^2}{E_1} \quad (2.31b)$$

En la Ec. (2.31b) los autores recomiendan la utilización de la RMP (Ec. (2.8)) para la predicción de  $E_1$  y  $\nu_{12}$ .

#### 2.2.14. Modelo de esfuerzos triaxiales de Ekvall

En el MM de esfuerzos triaxiales (TR) propuesto por Ekvall (1965) se asume que cuando un MCU se encuentra bajo un esfuerzo de tensión en cualquier dirección, la matriz desarrolla esfuerzos normales en las tres direcciones. Debido a que las fibras generalmente son más rígidas que la matriz, éstas generan una restricción en la deformación de la misma matriz. Por esta razón, se generan esfuerzos perpendiculares a la dirección de la tensión en el VR y la matriz está sujeta a un estado triaxial de esfuerzos normales. Derivado de esta asunción, el autor propone para la predicción de  $E_1$  y  $E_2$  las ecuaciones similares a la RMP y RMS, pero modificadas,

$$E_1 = \phi_f E_f + \phi_m E'_m \quad (2.32)$$

$$E_2 = \frac{E_f E'_m}{\phi_f E'_m + \phi_m E_{1f} (1 - \nu_m^2)} \quad (2.33)$$

donde  $E'_m$  es el módulo elástico equivalente de la matriz y el autor considera que se encuentra definido por,

$$E'_m = \frac{E_m}{1 - 2\nu_m^2} \quad (2.34)$$

### 2.2.15. Modelo de capas horizontales de Fu para el módulo elástico transversal

El MM desarrollado por Fu et al. (FU, 1998) considera que el VR es de forma cuadrada con una fibra al centro y que el VR puede ser dividido en tres regiones en forma de capas. La primera y tercera capa están compuestas por únicamente matriz, mientras que la región central (o segunda capa) representa una combinación de fibra y matriz. Consecuentemente, se considera que el VR se encuentra tensionado uniformemente por una fuerza en la dirección 2 y los autores establecen un patrón de distribución de esfuerzos basado en la rigidez promedio de cada una de las capas. Desarrollando el análisis matemático, los autores proponen la determinación de  $E_2$  como,

$$E_2 = \left[ \frac{1}{E_m} \left[ \frac{\sqrt{\frac{4\phi_f}{\pi}}}{\sqrt{\frac{\pi\phi_f}{4} \left( \frac{E_{2f}}{E_m} \right) + 1} - \sqrt{\frac{\pi\phi_f}{4}}} + 1 - \sqrt{\frac{4\phi_f}{\pi}} \right] \right]^{-1} \quad (2.35)$$

### 2.2.16. Regla de mezclas en serie modificada

El MM propuesto por Hyer (1998) es un modelo semi-empírico que es también conocido como la regla de mezclas modificada (RMM), debido a que se modifica una de las asunciones principales de la RMS (Ec. (2.9)). En lugar de asumir que el esfuerzo en la fibra y en la matriz son idénticos, se introduce un factor de disminución de esfuerzos en la matriz ( $\omega$ ), de tal manera que el esfuerzo promedio en la matriz es menor al esfuerzo en la fibra. De este modo, para la determinación de  $E_2$  y  $G_{12}$  el autor propone la expresión general,

$$RMM = \frac{\phi_f + \omega \phi_m}{\frac{\phi_f}{RMM_f} + \frac{\omega \phi_m}{RMM_m}} \quad (2.36)$$

donde RMM adquiere los valores de  $E_2$  o  $G_{12}$ . En su comparación contra MEF el autor propone  $\omega=0.5$  y  $\omega=0.6$  para  $E_2$  y  $G_{12}$ , respectivamente.

### 2.2.17. Ecuación de Foye para la razón de Poisson transversal

En el MM propuesto por Foye (FY, 1972) se considera que la deformación en la dirección 3 de un MCU sometido a una fuerza de tensión en la dirección 2 (ver Fig. 2.1) se encuentra influenciada por la rigidez en la dirección 1 del MCU. Esto es, se considera que las fibras, al ser mucho más rígidas que la matriz en la dirección 1, restringen la deformación que tendría la matriz ante la fuerza de tensión en la dirección 2. De este modo, el autor propone para la predicción de  $\nu_{23}$  la ecuación,

$$\nu_{23} = \phi_f \nu_{23f} + \phi_m \nu_m \left[ \frac{1 + \nu_m - \nu_{12} \left( \frac{E_m}{E_1} \right)}{1 - \nu_m^2 + \nu_m \nu_{12} \left( \frac{E_m}{E_1} \right)} \right] \quad (2.37)$$

El autor recomienda que para la determinación de  $E_1$  y  $\nu_{12}$  en la Ec. (2.37) se utilicen las ecuaciones de la RMP (Ec. (2.8)).

### 2.2.18. Modelo de compresibilidad de Clyne para la razón de Poisson transversal

El MM propuesto por Clyne (1990) se conoce también como modelo de compresibilidad (CM), debido a que el autor considera que un MCU al ser tensionado en la dirección 2 se encuentra en un estado de compresibilidad radial, similar a un efecto de presión hidrostática. Para la predicción de  $\nu_{23}$  el autor propone la ecuación,

$$\nu_{23} = 1 - \nu_{21} - \frac{E_2}{3K_v} \quad (2.38)$$

donde  $K_v$  es el módulo volumétrico del MCU, el cual es una constante elástica redundante y su determinación por,

$$K_v = \left( \frac{\phi_f}{K_{vf}} + \frac{\phi_m}{K_{vm}} \right)^{-1} \quad (2.39)$$

donde  $K_{vf}$  y  $K_{vm}$  son el módulo volumétrico de la fibra y la matriz, respectivamente y de igual manera son constantes elásticas no independientes de los materiales homogéneos e isotrópicos, definidas por,

$$K_{v_i} = \frac{E_i}{3(1-2\nu_i)} \quad (i=f,m) \quad (2.40)$$

Note que la Ec. (2.40) es distinta a la Ec. (2.19b), esto debido a que en la formulación de  $K_{v_i}$  no se considera un estado de esfuerzos plano ni deformación plana, esto es, existe un estado de esfuerzos y deformaciones en tres dimensiones.

### **2.3. Modelos de elemento finito para la predicción de propiedades elásticas en materiales compuestos unidireccionales reforzados con fibras**

La teoría del elemento finito es un método numérico que puede aproximarse en muy buena medida a la solución exacta de un problema físico real descrito mediante ecuaciones diferenciales (Bathe, 1996). Asimismo, al ser un método numérico esta teoría ofrece la posibilidad de evitar ciertas asunciones (muy común en el desarrollo de soluciones exactas) que representen el problema físico sin incrementar la complejidad matemática. En el ámbito de la micromecánica, se han desarrollado MEF para conocer el comportamiento mecánico de las láminas de un MCU mediante la modelación de VR con diversas condiciones de carga y frontera.

Por ejemplo Balacó de Morais (2000) utilizó MEF para sustentar la precisión del MM que presentaba en su trabajo, comentando que se ha observado que la utilización de MEF conduce a resultados con un alto grado de precisión en la predicción de las CEI en un MCU. Asimismo, Jacquet et al. (2000) aseguran que  $E_2$  puede ser determinado con un alto grado de precisión a partir del modelo RMS, siempre y cuando se utilicen condiciones de frontera más realistas. Finalmente, los autores comentan que la implementación de MEF como un marco de referencia para la comparación de los resultados de su MM es una herramienta bastante adecuada y con buena aceptación en el medio. De igual manera, Theocaris et al. (1997) asegura que los MEF son una herramienta adecuada para la predicción de las CEI cuando se tienen secciones transversales de fibra que no son circulares o cuando las separaciones entre fibras no son sistemáticas. Por esta razón, el estudio de dichas condiciones a partir de modelos analíticos resulta muy complicado; es así como Theocaris et al. (1997) utilizan MEF

para sustentar la versatilidad que existe en el cálculo de las CEI transversales ( $E_2$ ,  $\nu_{23}$  y  $G_{23}$ ) a partir de un método numérico llamado “homogeneización numérica”.

Por otro lado, debido a que con ayuda de los MEF se pueden representar condiciones de frontera mucho más reales, se han utilizado los mismos para llevar a cabo análisis paramétricos para conocer la dependencia de las CEI con respecto a diversas variables, por ejemplo, el arreglo geométrico de las fibras, la sección transversal de las fibras, la razón entre las rigideces de los materiales constitutivos e incluso la existencia de una interfaz imperfecta. Beischa et al. (2016) realizaron un estudio en el que observaron la dependencia de  $G_{23}$  y  $k_{23}$  con respecto al arreglo geométrico de la fibra, cuando en el compuesto la fibra es más rígida que la matriz y un compuesto en el que la matriz es más rígida que la fibra. Dentro de sus conclusiones comentan que llevar a cabo este análisis paramétrico a través de un método numérico resulta matemáticamente más sencillo, más rápido y más preciso que si se utilizaran medios analíticos. Asimismo, Brockenbrough et al. (1991) estudiaron los efectos que el patrón de distribución de fibras y la geometría de la sección transversal de fibras continuas tienen sobre el comportamiento elástico-lineal del MCU. Ellos concluyeron que la distribución de fibras hexagonal obedece a un comportamiento transversalmente isotrópico; mientras que, el patrón cuadrado o rectangular no lo hace. Asimismo, los autores concluyen que el impacto que tiene la sección transversal de las fibras es despreciable comparado contra el patrón de distribución de las mismas. Nedele y Wisnom (1994) determinaron  $G_{12}$  para un sistema material de referencia. A partir de dicho sistema material modificaron la  $\phi_f$ , el espaciamiento entre las fibras,  $G_{12f}$  y  $G_m$ , de tal forma, analizaron la dependencia de  $G_{12}$  con respecto a los cambios en las condiciones iniciales utilizando MEF como una herramienta para el estudio.

Por otro lado, se han utilizado los MEF para estudiar la distribución de los esfuerzos normales ( $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\sigma_z$ ) y cortantes ( $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  y  $\tau_{yz}$ ) producto de diversas condiciones de carga y frontera, esto con el fin de entender mejor el comportamiento mecánico de los MCU. Por ejemplo, (Hyer, 1998) realiza diversos MEF para la obtención de las CEI  $E_1$ ,  $\nu_{12}$ ,  $E_2$  y  $G_{23}$  y analiza la dependencia de dichas CEI a partir de las distribuciones de esfuerzos obtenidas bajo las condiciones de frontera utilizadas. Asimismo, Adams y Doner (1967a) analizaron los esfuerzos que se generan en un MCU cuando se

encuentra bajo un esfuerzo cortante en el plano, concluyendo que el máximo esfuerzo cortante ( $\tau_{xy}$ ) se presenta en la zona interfacial paralelo al eje 2 (ver Fig. 2.1) donde las fibras se encuentran más próximas entre sí. De este modo entrega un gráfico en el que se presenta factores de concentración de esfuerzos en función de  $G_{12}/G_m$  para distintas  $\phi_f$ . Asimismo, Adams y Doner (1967b) analizaron las distribuciones de esfuerzo que tiene un MCU cuando se encuentra tensionado en la dirección 2, concluyendo que los máximos esfuerzos normales ( $\sigma_y$ ) se presentan justo en la interfaz entre la fibra y la matriz con el eje 2 (ver Fig. 2.1). De este modo entrega un gráfico en el que se presenta factores de concentración de esfuerzos en función de  $E_{2f}/E_m$  para distintas  $\phi_f$ .

También se han desarrollado otros MEF fuera del enfoque de este trabajo en los que se ha hecho un esfuerzo por incluir condiciones de frontera que representen de una manera más realista el problema físico, esto es, MEF que intentan reproducir la interfaz perfecta como en los trabajos de Teng (2007), Wang et al. (2006), Caporale et al. (2006), entre otros. Condiciones de fluencia y análisis plásticos de los materiales constitutivos como en los trabajos de Huang (2000), Lin et al. (1972), Behzadi et al. (2009), entre otros. Incluso la modelación de materiales compuestos con dos tipos de fibras como el trabajo de Bnarjee y Sankar (2014).

Al mismo tiempo se han desarrollado MEF para comprender mejor el comportamiento de las ensayos estandarizados como los trabajos de Barnes et al. (1987), Ho et al. (1993) y Broughton et al. (1990), entre otros, donde se analizan las distribuciones de esfuerzo que se dan en la prueba de la viga con muesca en V (ASTM D5379, 2012).

## CAPÍTULO 3

### Metodología para la elaboración de los modelos de elemento finito

#### 3.1. Materiales

Debido a que las fibras de carbono (FC) y las fibras de vidrio (FV) son las fibras de ingeniería que se reportan como más utilizadas en la industria de la construcción (Hollaway, 2010), ambas se utilizaron en este trabajo con resina epóxica (E) como matriz. De este modo, los MCU considerados corresponden a dos sistemas materiales, fibra de carbono y resina epóxica (FC/E) y fibra de vidrio y resina epóxica (FV/E). La resina epóxica se consideró de comportamiento isotrópico considerando como CEI nominales  $E_m=3.00$  GPa y  $\nu_m=0.30$  (Bai, 2013). Por lo que se refiere a las FC, en la literatura se acepta que poseen un comportamiento transversalmente isotrópico (Krucinska y Stypka, 1991; Edie, 1998; Miyagawa et al., 2005; Miyagawa et al., 2006), mientras que las FV poseen un comportamiento isotrópico (Manera, 1977; Gusev et al., 2000). De este modo, se utilizaron como CEI nominales para la FC y FV las listadas en la tabla 3.1. Estas propiedades nominales fueron utilizadas para los resultados del capítulo 5.

Tabla 3.1. Constantes elásticas independientes de la fase de refuerzo.

Tipo de fibra	CEI	Magnitud	Referencia
Carbono	$E_{1f}$ (GPa)	230	(Edie, 1998).
	$E_{2f}$ (GPa)	10.4	(Miyagawa et al. 2005).
	$\nu_{12f}$	0.26	(Krucinska y Stypka, 1991).
	$\nu_{23f}$	0.30	(Miyagawa et al. 2006).
	$G_{12f}$ (GPa)	27.3	(Miyagawa et al. 2006).
Vidrio	$E_f$ (GPa)	73.0	(Manera, 1977).
	$\nu_f$	0.20	(Gusev et al. 2000).

De acuerdo con las referencias en la tabla 3.1, para el radio de fibra ( $r_f$ ) se utilizaron valores nominales para de  $r_f=7$   $\mu\text{m}$  para la FC y  $r_f=15$   $\mu\text{m}$  para la FV.

Es importante enfatizar que los valores de entrada utilizados en el análisis paramétrico de los MEF son considerados “nominales” debido a que las CEI de la matriz y de las

fibras varían con respecto al fabricante, tipo, proceso de manufactura, composición química y microestructura, entre otras propiedades (Edie, 1998; Wallenberger et al., 2001; Bai, 2013). Además las propiedades finales del material compuesto dependen de factores como el método de procesamiento, calidad de la interfaz y fracción de volumen de defectos, entre muchos otros. Esto dificulta una comparación precisa con resultados experimentales, en especial cuando las CEI de la fibra y matriz usadas en los ensayos no son proporcionadas. Por esta razón, para la comparación con ensayos del capítulo 4 en ocasiones se variaron ligeramente las propiedades nominales de la tabla 3.1, haciéndolas más congruentes con los resultados experimentales reportados en la literatura (en los casos donde la propiedad de la fibra o matriz se reportan).

### 3.2. Selección del volumen representativo

En la Fig. 3.1 se esquematiza con línea punteada el patrón repetitivo hexagonal asumido para la distribución de la fase de refuerzo (Fig. 3.1a). Como puede observarse, el patrón hexagonal de la línea punteada no corresponde a la unidad básica repetitiva mínima, sino que el VR corresponde al rectángulo que se encuentra inscrito dentro del hexágono (Fig. 3.1b). Dicho VR está formado por una fibra al centro y cuatro cuartos de fibras vecinas distribuidas en cada una de las esquinas del VR. El patrón de distribución hexagonal se seleccionó debido a que esta configuración es recurrentemente reportada como la apropiada para representar el comportamiento transversalmente isotrópico del VR de un MCU (Xu et al. 2012; Brockenbrough et al., 1991). Por lo tanto, las dimensiones del VR en dirección paralela a los ejes locales (ver Fig. 2.1) no son arbitrarias, sino que derivado de un análisis geométrico (ver apéndice A), se deducen las expresiones para el ancho ( $W$ ) y el alto ( $H$ ) del VR como,

$$W = \sqrt{\frac{2\pi r_f^2}{\phi_f \sqrt{3}}} \quad (3.1a)$$

$$H = \sqrt{3}W \quad (3.1b)$$

La profundidad del VR ( $D$ ) (ver Fig. 3.1b) se consideró arbitrariamente con una magnitud igual a  $W$  debido a que se considera que las fibras son infinitamente largas y se ha observado que los gradientes de esfuerzos y deformaciones son invariantes respecto al espesor del mismo (Bayat y Aghdam, 2012).



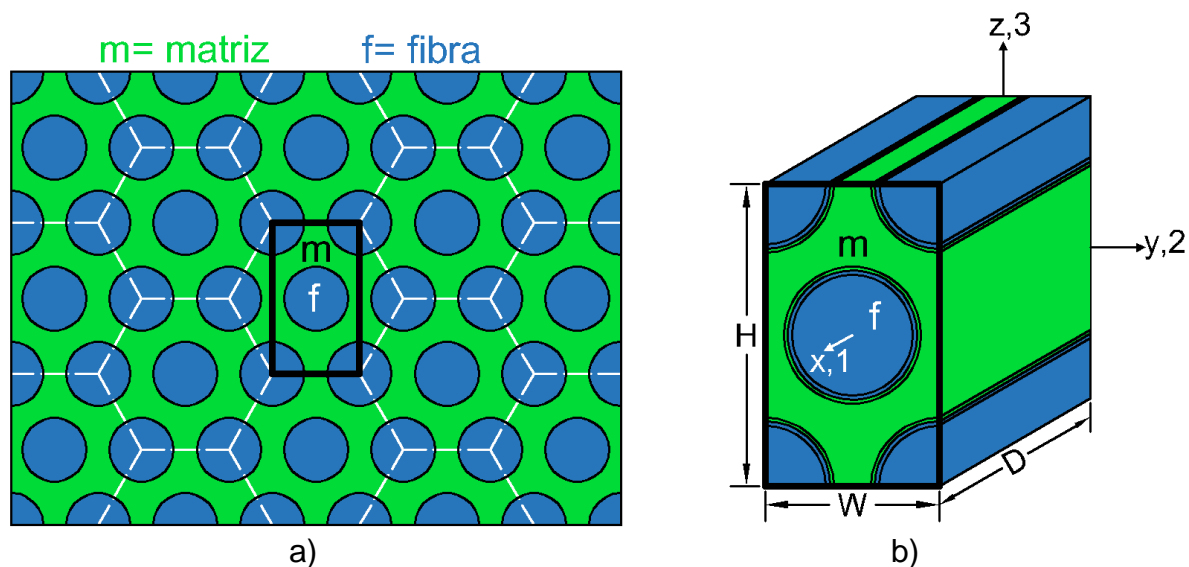


Fig. 3.1. Idealización de un MCU como unidad repetitiva. a) Patrón hexagonal de distribución geométrica de la fase de refuerzo, b) VR.

Igualmente, en el MEF se consideró una interfaz perfecta, esto es, nodos comunes para la fibra y la matriz. Es sabido que los gradientes de esfuerzo más importantes ocurren en las zonas transición entre materiales con propiedades diferentes. Por ello, con el fin de obtener eficiencia en la malla del VR, se consideró una malla híbrida con una pequeña zona de espesor equivalente al 6% de  $r_f$  (Sottos et al. 1992) en la que se capturen mejor estos gradientes de esfuerzo con elementos de interpolación cuadrática.

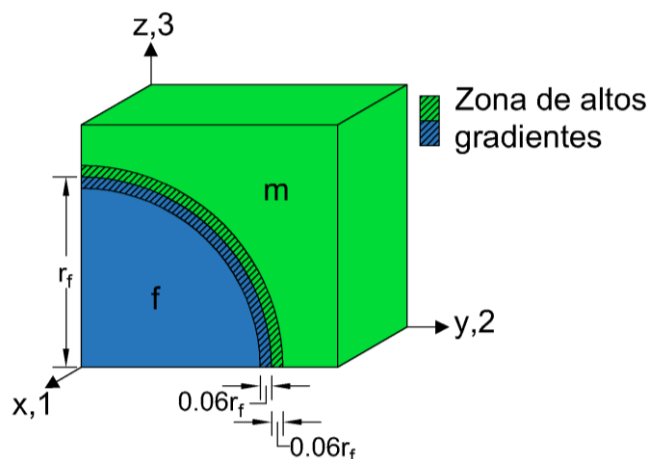


Fig. 3.2. Sección del VR mostrando la zona utilizada para los elementos de interpolación cuadrática.

Para el desarrollo del análisis numérico se utilizó un intervalo de  $\phi_f$  que abarcó del 0% al 80%, con variaciones de 1%. Se utilizó un valor límite de 80% debido a que en esta

concentración de fibras la interfaz de cada una de las fibras se encuentra casi en contacto entre sí, además de ser un valor muy elevado en la práctica y probablemente solo de utilidad teórica. En la práctica para lograr una buena consolidación y calidad (con bajo contenido de vacíos), en la fabricación de un MCU, la máxima concentración de fibras utilizada es de ~60% (Carlsson et al. 2014).

Para la variación de  $\phi_f$  en el VR se mantuvo constante la magnitud de  $r_f$  y se varió el volumen de la matriz. De las Ecs. (3.1) se puede observar que para  $r_f$  constante, las dimensiones  $W$  y  $H$  del VR son inversamente proporcionales a  $\phi_f^{1/2}$ , esto es,  $W$  y  $H$  adquieren un valor grande cuando  $\phi_f=1\%$  y un valor pequeño cuando  $\phi_f=80\%$  (Fig. 3.3).

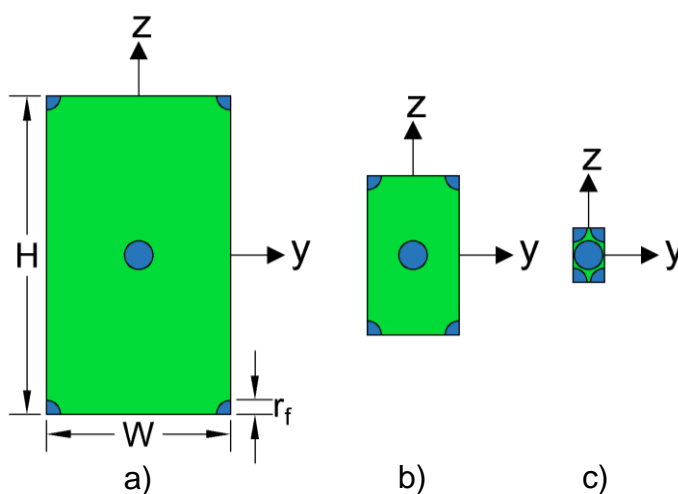


Fig. 3.3. Apariencia del VR con tres fracciones de volumen de fibra ( $r_f$  es constante).  
a)  $\phi_f=1\%$ , b)  $\phi_f=40\%$ , c)  $\phi_f=80\%$ .

### 3.3. Definición de elementos y malla

Para el MEF se utilizó el software comercial ANSYS (2014) construyendo la malla híbrida estuvo conformada por elementos tetraédricos de interpolación cuadrática “SOLID 187” en los volúmenes donde se esperan los mayores gradientes de esfuerzos y elementos de interpolación lineal “SOLID 185” en el resto de los volúmenes que componen el VR (Fig. 3.4).

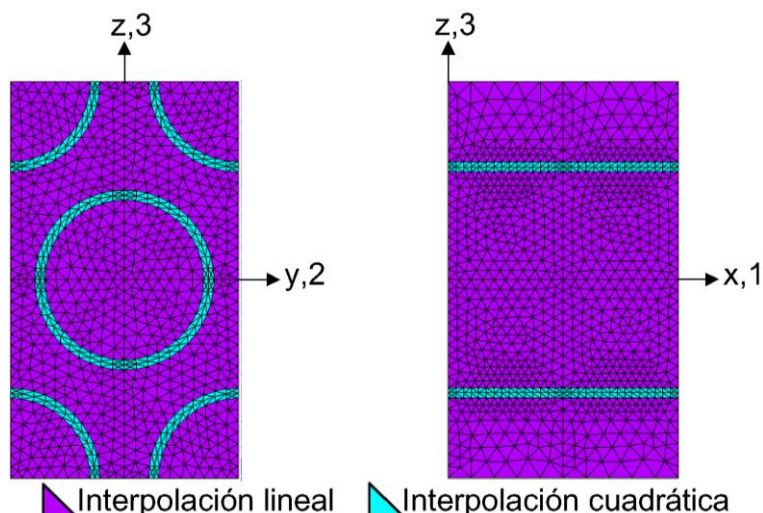


Fig. 3.4. Localización de los elementos de interpolación lineal e interpolación cuadrática utilizados en los MEF.

Asimismo, se utilizaron elementos de transición (generados automáticamente utilizando un mallado por orden de interpolación) para asegurar un adecuado desempeño de la malla y que el campo de desplazamientos nodales sea continuo en todo el dominio. La formulación matemática de los tipos de elementos utilizados se encuentra detallada en el apéndice B.

Finalmente, debido a la asunción de interfaz perfecta, no existe una transición en las propiedades materiales de los elementos de interpolación cuadrática; esto es, que los elementos que se encuentran por fuera de  $r_f$  poseen las propiedades materiales correspondientes a la matriz, mientras que los que se encuentran por dentro de  $r_f$  poseen las propiedades materiales correspondientes a la fibra.

### 3.4. Propiedades elásticas longitudinales

#### 3.4.1. Condiciones de frontera

Para la determinación de  $E_1$  y  $\nu_{12}$  se aplicó un desplazamiento positivo, uniforme y unitario en la dirección  $x$  únicamente a los nodos que se encuentran en  $x=D$  (Fig. 3.5), es decir,

$$u|_{x=D}=1 \quad (3.2)$$

Conjuntamente, las condiciones de frontera utilizadas para restringir el movimiento de cuerpo rígido, pero a su vez permitir las deformaciones transversales a la dirección del

desplazamiento impuesto en el VR, se aplicaron únicamente a los nodos que se encuentran en  $x=0$  (Fig. 3.5), expresándose como,

$$u]_{x=0}=0 \quad (3.3a)$$

$$v]_{x=0, y=0}=0 \quad (3.3b)$$

$$w]_{x=0, z=0}=0 \quad (3.3c)$$

donde,  $u$ ,  $v$  y  $w$  representan los desplazamientos nodales en las direcciones  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente.

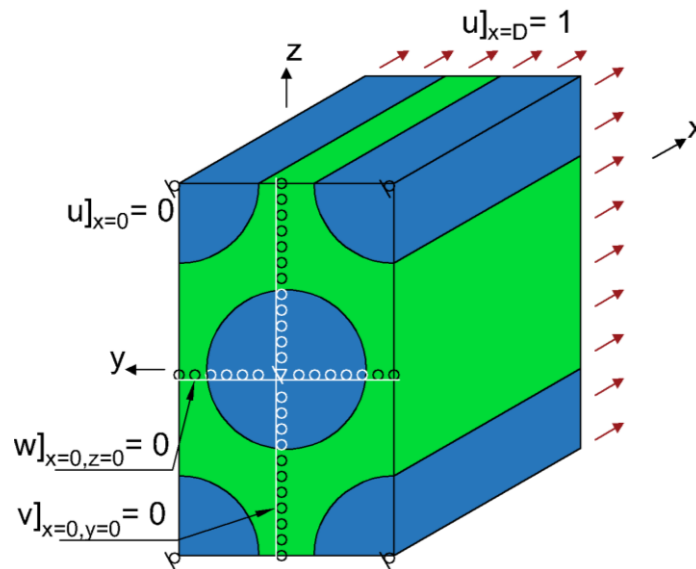


Fig. 3.5. Condiciones de carga y frontera en el MEF para la determinación de las propiedades elásticas longitudinales ( $E_1$  y  $\nu_{12}$ ).

### 3.4.2. Cálculo de propiedades elásticas longitudinales

Debido a las condiciones de carga y frontera impuestas en el modelo longitudinal (Fig. 3.5), en los nodos que se encuentran restringidos en  $x=0$  se generan fuerzas de reacción. El esfuerzo normal en la dirección  $x$  ( $\sigma_x$ ) generado por las fuerzas nodales de reacción en la dirección  $x$  ( $R_{xi}$ ) puede calcularse como,

$$\sigma_x = \frac{\sum_{i=0}^n R_{xi}}{A_{yz}} \quad (3.4)$$

donde,  $A_{yz}$  es el área en el plano  $yz$  y  $n$  indica el número de los nodos restringidos por las Ecs. (3.3).

Por consecuencia de las condiciones de carga y frontera, Ecs. (3.2) y (3.3), el VR se elonga en la dirección  $x$  mientras que se contrae libremente en las direcciones  $y$  e  $z$ . En la Fig. 3.6 se esquematiza la configuración sin deformar (línea punteada) y

deformada, la elongación longitudinal aplicada ( $u|_{x=D}=\Delta_x=1$ ) y las contracciones transversales ( $\Delta_y$  y  $\Delta_z$ ).

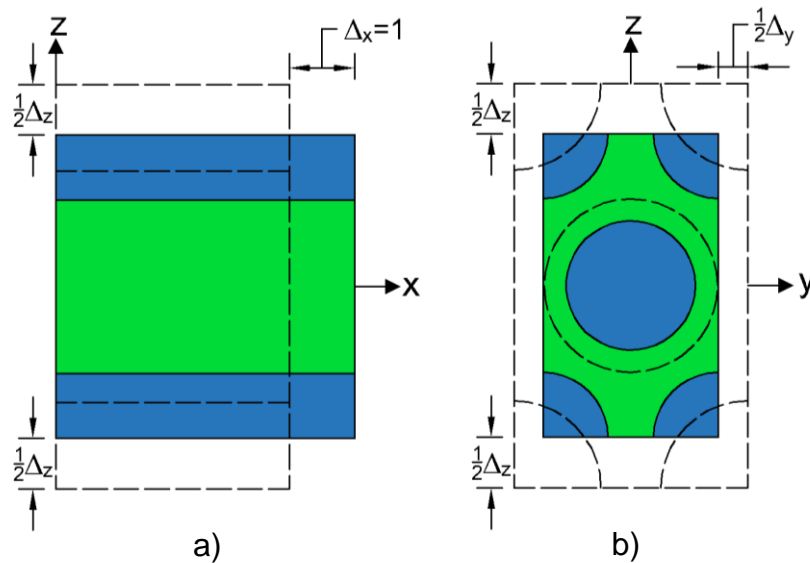


Fig. 3.6. Esquema de la configuración sin deformar (línea punteada) y deformada del MEF ante deformación longitudinal. a) Vista en el plano xz, b) vista en el plano yz.

La deformación unitaria para cada una de las direcciones ( $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$ ) puede ser obtenida a partir de las expresiones,

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta_x}{D} \quad (3.5a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta_y}{W} \quad (3.5b)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta_z}{H} \quad (3.5c)$$

Consecuentemente,  $E_1$  se determinó a partir de la sustitución de las Ecs. (3.4) y (3.5a) en la ley de Hooke unidimensional, es decir,

$$E_1 = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} \quad (3.6)$$

Del mismo modo,  $\nu_{12}$  se determinó a partir de la sustitución de las Ecs. (3.5a) y (3.5b) en la definición ingenieril de dicho parámetro,

$$\nu_{12} = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \quad (3.7)$$

Por motivos de comprobación, alternativamente a la relación isotrópica (Ec. (2.2b)),  $\nu_{13}$  se determinó también con su definición ingenieril,

$$v_{13} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} \quad (3.8)$$

### 3.5. Propiedades elásticas transversales

#### 3.5.1. Condiciones de frontera

Para determinar  $E_2$  y  $\nu_{23}$  se aplicó un desplazamiento positivo, uniforme y unitario en la dirección  $y$ . Dichos desplazamientos se aplicaron únicamente a los nodos que se encuentran en  $y=W/2$  (Fig. 3.6), de acuerdo con la expresión,

$$v]_{y=W/2} = 1 \quad (3.9)$$

Conjuntamente, las condiciones de frontera utilizadas para restringir el movimiento de cuerpo rígido, pero a su vez permitir las deformaciones transversales en la dirección del desplazamiento impuesto en el VR, se aplicaron únicamente en los nodos que se encuentran en  $y=-W/2$  (Fig. 3.7), y se expresan como,

$$u]_{x=D/2, y=-W/2} = 0 \quad (3.10a)$$

$$v]_{y=-W/2} = 0 \quad (3.10b)$$

$$w]_{y=-W/2, z=0} = 0 \quad (3.10c)$$

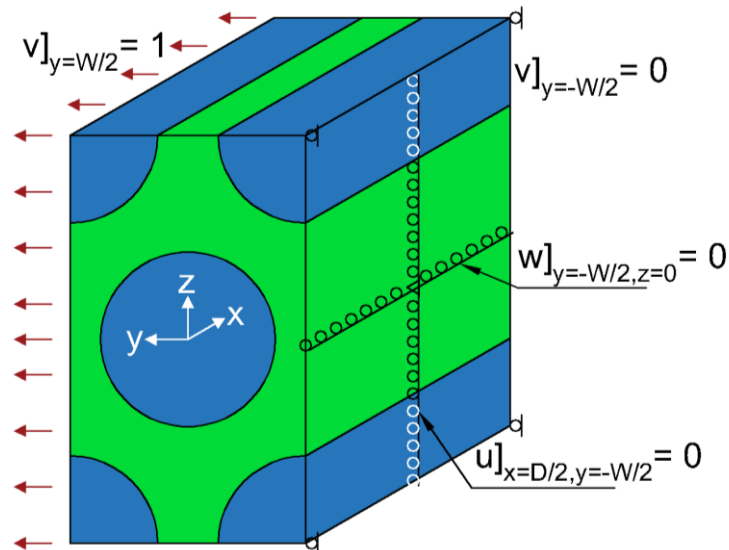


Fig. 3.7. Condiciones de carga y frontera en el MEF para la determinación de las propiedades elásticas transversales ( $E_2$  y  $\nu_{23}$ ).

### 3.5.2. Cálculo de propiedades elásticas transversales

Debido a las condiciones de carga y frontera impuestas en el modelo transversal (Fig. 3.7), en los nodos que se encuentran restringidos en  $y=W/2$  se generan fuerzas de reacción. El esfuerzo normal en la dirección  $y$  ( $\sigma_y$ ) generado por las fuerzas nodales de reacción en la dirección  $y$  ( $R_{yi}$ ) puede calcularse como,

$$\sigma_y = \frac{\sum_{i=0}^n R_{yi}}{A_{xz}} \quad (3.11)$$

donde  $A_{xz}$  es el área en el plano  $xz$ .

Por consecuencia de las condiciones de carga y frontera, Ecs. (3.9) y (3.10), el VR se elonga en la dirección  $y$ , mientras que se contrae en las direcciones  $x$  y  $z$ . En la Fig. 3.8 se esquematiza la configuración sin deformar (línea punteada) y deformada, la elongación transversal aplicada ( $v|_{y=W/2} = \Delta_y = 1$ ) y las contracciones longitudinal y transversal ( $\Delta_x$  y  $\Delta_z$ ).

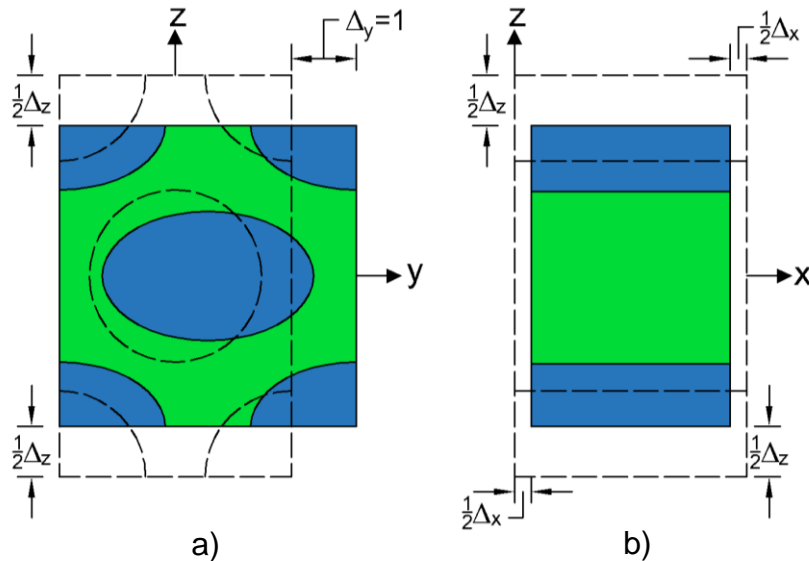


Fig. 3.8. Esquema de la configuración sin deformar (línea punteada) y deformada del MEF ante deformación transversal. a) Vista en el plano  $yz$ , b) vista en el plano  $xz$ .

Consecuentemente,  $E_2$  se determinó a partir de la sustitución de las Ecs. (3.11) y (3.5b) en la ley de Hooke unidimensional,

$$E_2 = \frac{\sigma_y}{\varepsilon_y} \quad (3.12)$$

Adicionalmente,  $v_{23}$  se determinó a partir de la sustitución de las Ecs. (3.5b) y (3.5c) en su definición ingenieril,

$$v_{23} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_y} \quad (3.13)$$

Por motivos de comprobación, alternativamente al teorema de reciprocidad (Ec. (2.1)),  $v_{21}$  se determinó también de la definición ingenieril de dicho parámetro,

$$v_{21} = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y} \quad (3.14)$$

### 3.6. Módulo cortante en el plano

#### 3.6.1. Condiciones de frontera

Para la determinación de  $G_{12}$  se aplicó un desplazamiento cortante positivo, uniforme y unitario en la dirección  $x$  únicamente a los nodos que se encuentran en  $y=W/2$  (Fig. 3.8), de acuerdo con la expresión,

$$u|_{y=W/2} = 1 \quad (3.15)$$

Con el fin de evitar el movimiento de cuerpo rígido, se restringió el desplazamiento en todos los grados de libertad de los nodos que se encuentran en  $y=-W/2$  (Fig. 3.9), es decir,

$$u|_{y=-W/2} = v|_{y=-W/2} = w|_{y=-W/2} = 0 \quad (3.16)$$

Adicionalmente, para evitar que se produzcan efectos de flexión (ver por ejemplo, Mohammadi et al. 2016), se restringió el desplazamiento en la dirección  $y$  de los nodos ubicados en  $x=0$  y  $x=D$  (Fig. 3.9), es decir,

$$v|_{x=0} = 0 \quad (3.17a)$$

$$v|_{x=D} = 0 \quad (3.17b)$$



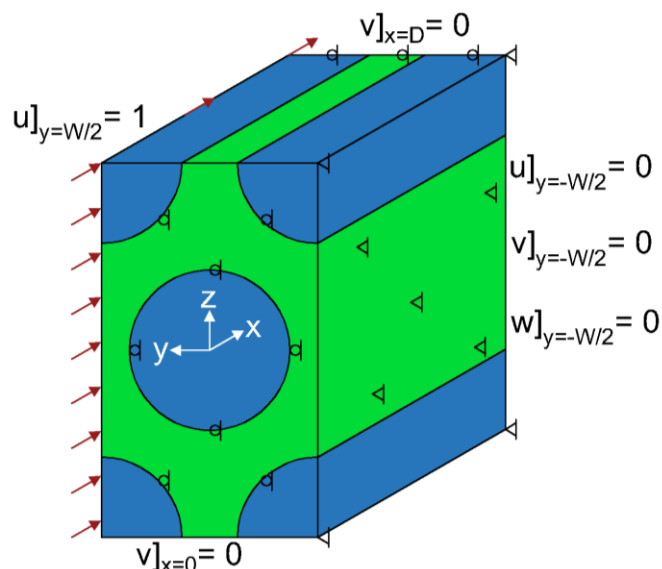


Fig. 3.9. Condiciones de carga y frontera en el MEF para la determinación del módulo cortante en el plano ( $G_{12}$ ).

### 3.6.2. Cálculo del módulo cortante en el plano

De acuerdo con las condiciones de carga y frontera impuestas en el modelo de cortante (Fig. 3.9), en los nodos que se encuentran restringidos en  $y=-W/2$  se generan fuerzas cortantes de reacción. El esfuerzo cortante en el plano  $xy$  ( $\tau_{xy}$ ) generado por las fuerzas cortantes nodales de reacción en la dirección  $x$  ( $V_{xi}$ ) puede calcularse como,

$$\tau_{xy} = \frac{\sum_{i=0}^n V_{xi}}{A_{xz}} \quad (3.18)$$

A consecuencia de las condiciones de carga y frontera de este modelo, Ecs. (3.15), (3.16) y (3.17), el VR se distorsiona uniformemente en la dirección  $x$ , evitando que se generen efectos de flexión en la dirección  $y$  (Fig. 3.10).

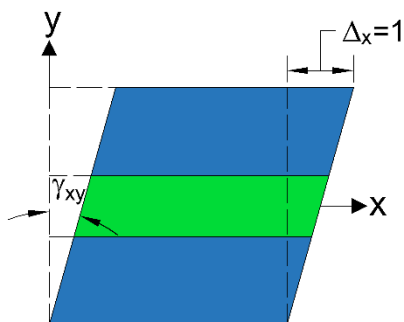


Fig. 3.10. Esquema de la configuración sin deformar (línea punteada) y deformada del MEF ante desplazamiento cortante en el plano  $xy$ .

Asumiendo deformaciones pequeñas, la deformación unitaria por cortante ( $\gamma_{xy}$ ) se determinó a partir de la expresión,

$$\gamma_{xy} = \tan^{-1} \left( \frac{\Delta x}{W} \right) \quad (3.19)$$

Consecuentemente,  $G_{12}$  se determinó a partir de la sustitución de las Ecs. (3.18) y (3.19) en la ley de Hooke unidimensional,

$$G_{12} = \frac{\tau_{xy}}{\gamma_{xy}} \quad (3.20)$$

### 3.7. Análisis y criterio de convergencia

Inicialmente, se realizó un análisis de convergencia riguroso para garantizar la independencia de malla en los resultados reportados. Por ello, se seleccionaron tres  $\phi_f$  (1%, 50% y 80%) para los compuestos FC/E y FV/E y para cada una se determinaron las cinco CEI del VR realizando diez casos de refinamiento de malla.

En la Fig. 3.11 se muestra el aspecto de tres mallas utilizadas en el proceso de convergencia, considerando en este caso, FC/E con  $\phi_f=50\%$ .

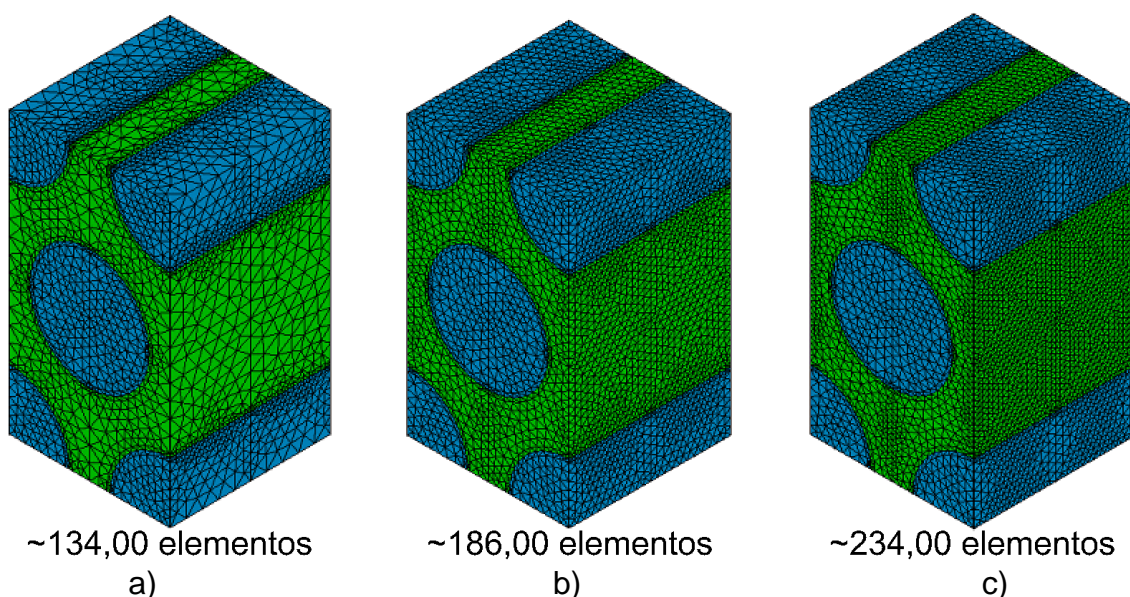


Fig. 3.11. Proceso de refinamiento en la malla correspondiente a FC/E y  $\phi_f=50\%$ .  
a) Malla gruesa, b) malla intermedia, c) malla fina.

En la tabla 3.2 se muestra el número aproximado de elementos utilizados en las modelaciones de los dos compuestos.

Tabla 3.2. Número de elementos utilizados en el análisis de convergencia.

Combinación material	$\phi_f$ (%)	Número de elementos en la malla ( $\times 10^3$ )		
		Gruesa	Intermedia	Fina
FC/E	1	131	165	217
	50	134	186	234
	80	89	120	150
FV/E	1	98	129	178
	50	134	188	235
	80	89	118	148

Se determinó la diferencia ( $e$ ) que existe entre los resultados de los casos de refinamiento con respecto al resultado obtenido de la malla más fina utilizada, siguiendo la expresión,

$$e = \left| \frac{P_{m0} - P_{mr}}{P_{mr}} \right| \quad (3.21)$$

donde  $P_{m0}$  indica la CEI obtenida de los casos de refinamiento y  $P_{mr}$  la CEI obtenida en la malla fina, utilizada como referencia. El criterio seleccionado para aceptar una malla fue  $e \leq 1\%$ .

### 3.8. Cálculo estadístico del error en los modelos de micromecánica

Tomando como referencia los resultados obtenidos por los MEF, la diferencia ante cada MM y el MEF fue cuantificada a partir de un parámetro estadístico. La métrica estadística utilizada ha sido recomendada por Hyndman y Koehler (2006) debido a que es un parámetro que es independiente de la escala que se utilice en la base de datos. Asimismo, los autores consideran que dicho parámetro no es susceptible a problemas de indeterminación (divisiones entre cero), magnitudes excesivas que carecen de sentido (divisiones entre magnitudes muy cercanas a cero), diferencias positivas o negativas y otros problemas que presentan otros parámetros de medición de errores. De igual manera, los autores aseguran que dicho parámetro, al ser independiente de escalas puede ser comparado entre series de datos que contengan escalas distintas, por ejemplo  $E_1$  y  $\nu_{12}$ . Llevado al contexto de este trabajo y de acuerdo a la recomendación de los autores, el error absoluto libre de escalas ( $q_k$ ) para cada  $\phi_f$  en el intervalo de análisis, se estimó con la expresión,

$$q_k = \frac{|CE_k^{MM} - CE_k^{MEF}|}{\lambda} \quad (3.22a)$$

donde  $CE$  indica la magnitud de la constante elástica determinada por MM o MEF (expresado en el superíndice), el subíndice  $k$  denota la  $\phi_f$  específica que está siendo analizada y  $\lambda$  es la constante de normalización del error (numerador) del MM que, de acuerdo con Hyndman y Koehler (2006) esta constante de normalización se determina como,

$$\lambda = \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n |CE_i^{MEF} - CE_{i-1}^{MEF}| \quad (3.22b)$$

donde  $n$  es la cantidad de datos utilizados en el intervalo de análisis.

Debido a que la Ec. (3.22a) está definida para cada  $\phi_f$  específica (ver Fig. 3.12) el promedio de  $q_k$  puede emplearse como una medida global del error que existe en el MM y se define como,

$$q_{\text{prom}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n q_k \quad (3.23)$$

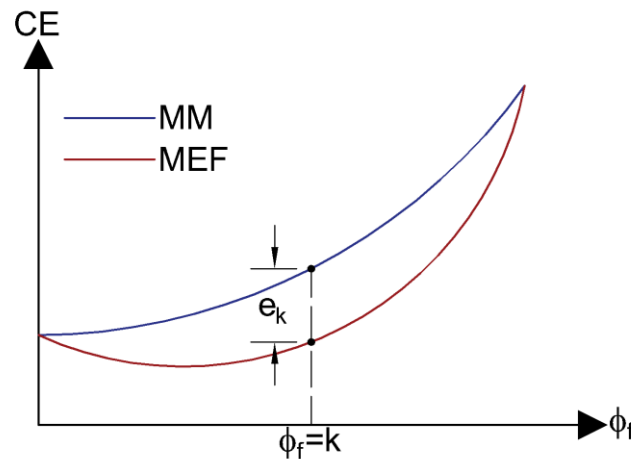


Fig. 3.12. Representación gráfica del error absoluto libre de escalas  $q_k$ .

## CAPÍTULO 4

### Resultados de los modelos de elemento finito y su comparación contra ensayos

#### 4.1. Examinación de la convergencia numérica

Las magnitudes de las CEI para FC/E y  $\phi_f=50\%$  se presentan en la Fig. 4.1.

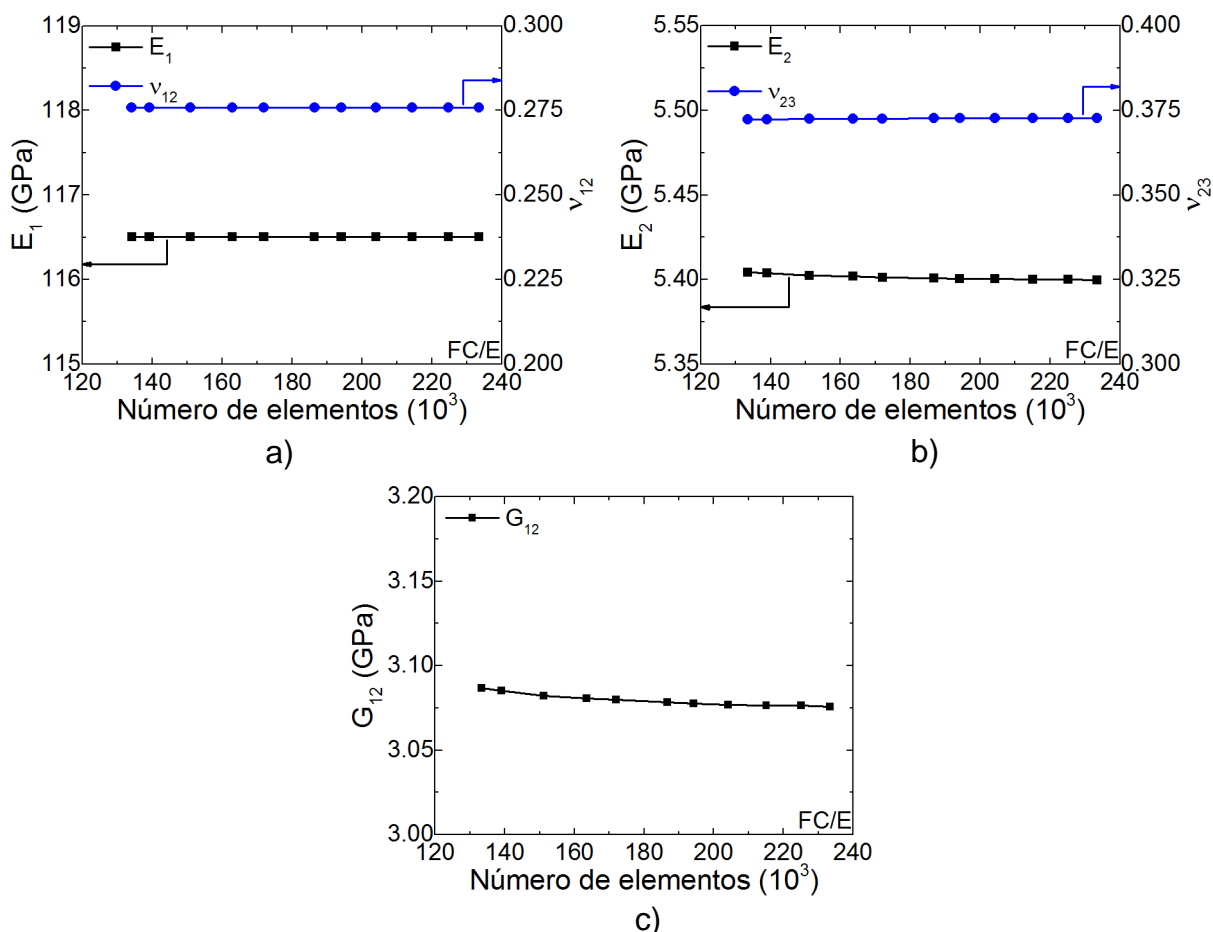


Fig. 4.1. Análisis de convergencia numérica para FC/E y  $\phi_f=50\%$ .

a)  $E_1$  y  $\nu_{12}$ , b)  $E_2$  y  $\nu_{23}$ , c)  $G_{12}$ .

En la Fig. 4.1a se observa que las magnitudes de  $E_1$  y  $\nu_{12}$  se mantuvieron, prácticamente, constantes conforme se incrementó la cantidad de elementos desde 134,000 hasta 240,000. Por esta razón, la diferencia entre los resultados de la malla más gruesa con respecto a la malla más fina (Fig. 3.11a y 3,11c) fue de  $7.21 \times 10^{-8}$  y  $3.86 \times 10^{-5}$  para  $E_1$  y  $\nu_{12}$ , respectivamente.

En la Fig. 4.1b el comportamiento de los resultados es similar al de la Fig. 4.1a. Para este caso, la diferencia entre los resultados (Ec. (3.21)) de la malla más gruesa con respecto a la malla más fina (Fig. 3.11a y 3,11c) fue de  $8.40 \times 10^{-4}$  y  $1.04 \times 10^{-3}$  para  $E_2$  y  $\nu_{23}$ , respectivamente.

Con respecto a la Fig. 4.1c, se observa que el comportamiento de los resultados no es constante; sin embargo, la diferencia obtenida fue de  $3.58 \times 10^{-3}$  para  $G_{12}$ .

Las diferencias encontradas demostraron que con la malla más gruesa (Fig. 3.11a) se obtuvo convergencia numérica, esto es, se cumplió el criterio establecido en la sección 3.7 ( $e \leq 1\%$ ).

Resultados muy similares se encontraron en  $\phi_f=1\%$  y  $\phi_f=80\%$  (no graficados) y en ambos casos la malla más gruesa utilizada cumplió con el criterio de convergencia. Asimismo, considerando la combinación material FV/E, todas las CEI determinadas con la malla más gruesa mostraron  $e \leq 1\%$  con respecto a la malla más fina. En la tabla 4.1 se muestran, para ambas combinaciones materiales, las diferencias entre los resultados de la malla más gruesa con respecto a la malla más fina para las tres  $\phi_f$  seleccionadas en el análisis de convergencia.

Tabla 4.1. Diferencia entre los resultados de la malla gruesa y la fina.

CEI	e (Ec. (3.21))					
	$\phi_f=1\%$		$\phi_f=50\%$		$\phi_f=80\%$	
	FC/E	FV/E	FC/E	FV/E	FC/E	FV/E
$E_1$	$7.00 \times 10^{-5}$	$2.03 \times 10^{-5}$	$7.21 \times 10^{-8}$	$1.34 \times 10^{-6}$	$2.93 \times 10^{-7}$	$1.99 \times 10^{-7}$
$\nu_{12}$	$6.07 \times 10^{-7}$	$3.47 \times 10^{-5}$	$3.86 \times 10^{-5}$	$1.81 \times 10^{-4}$	$3.43 \times 10^{-5}$	$1.24 \times 10^{-4}$
$E_2$	$1.50 \times 10^{-4}$	$4.31 \times 10^{-4}$	$8.40 \times 10^{-4}$	$2.83 \times 10^{-3}$	$8.41 \times 10^{-4}$	$3.21 \times 10^{-3}$
$\nu_{23}$	$2.55 \times 10^{-4}$	$7.21 \times 10^{-4}$	$1.04 \times 10^{-3}$	$3.44 \times 10^{-3}$	$1.18 \times 10^{-3}$	$5.10 \times 10^{-3}$
$G_{12}$	$4.27 \times 10^{-4}$	$5.55 \times 10^{-4}$	$3.58 \times 10^{-3}$	$3.66 \times 10^{-3}$	$5.31 \times 10^{-3}$	$5.12 \times 10^{-3}$

Derivado del análisis de convergencia, se concluyó que la malla más gruesa utilizada en cada  $\phi_f$  es suficiente para asegurar resultados en convergencia numérica.

Finalmente, para validar los resultados de los MEF elaborados se analizó un caso homogéneo e isotrópico, donde las propiedades de las fibras fueron cambiadas por las de la matriz ( $E_f=3$  GPa y  $\nu_f=0.3$ ). Se aseguró que el número de elementos para el intervalo de análisis ( $1\% \leq \phi_f \leq 80\%$ ) fuera mayor a 130,000 y los resultados se muestran en el apéndice C. En estas modelaciones los resultados son auto-consistentes, en el

sentido de que los valores de  $E_1$ ,  $\nu_{12}$ ,  $E_2$ ,  $\nu_{23}$  y  $G_{12}$  del MCU calculadas por la metodología propuesta coinciden con los de los valores de entrada.

## 4.2. Propiedades elásticas longitudinales

### 4.2.1. Análisis de la distribución de esfuerzos

Debido a las condiciones de carga y frontera, en ambos sistemas materiales se obtuvo la elongación en la dirección longitudinal de las fibras y la contracción por efecto Poisson en las direcciones transversales a las mismas tal cual se esquematizó en la Fig. 3.6. Dicha contracción sucede en el plano de isotropía material, por lo que fue posible comprobar que  $\varepsilon_y = \varepsilon_z$ , lo que ocasiona que  $\nu_{12} = \nu_{13}$ .

En la Fig. 4.2 se muestra, a modo representativo, las distribuciones de los esfuerzos normales ( $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\sigma_z$ ) y el esfuerzo cortante en el plano  $yz$  ( $\tau_{yz}$ ) para el material FC/E con  $\phi_f = 50\%$  debido a que no se encontraron diferencias significativas en la distribución de los mismos para las diversas  $\phi_f$  analizadas.

En cuanto a la Fig. 4.2a se observa la uniformidad de  $\sigma_x$  tanto en la fibra, como en la matriz. Asimismo, debido a que la rigidez longitudinal de la fibra es mayor que la de la matriz ( $E_{1f} > E_m$ ), es en la fibra donde se da el mayor  $\sigma_x$ , mientras que el esfuerzo en la matriz es despreciable. Por esta razón, Hull y Clyne (1996) consideran que los MCU tienen un mejor desempeño mecánico ante cargas de tensión longitudinal. Asimismo, Talreja y Singh (2012) mencionan que la asunción de la interfaz perfecta reproduce la distribución uniforme de  $\sigma_x$  en la interfaz del VR.

En relación a la Fig. 4.2b se aprecia que la contracción en la dirección  $y$  produzca esfuerzos  $\sigma_y$  de compresión máximos en la fibra y de tensión máxima en  $z = \pm r_f$  y el plano  $xy$ . Hyer (1998) explica que la matriz, al ser menos rígida que la fibra, tiende a comprimir radialmente a la fibra y también a deformarse más que la fibra, por lo que se generan esfuerzos tensión en la vecindad de la fibra correspondiente al plano  $xy$  cerca de  $z = \pm r_f$  donde el VR es menos rígido. Asimismo, Aboudi (1989) definió que el gradiente de  $\sigma_y$  ( $\pm r_f \leq y \leq \pm W/2$ , 0) es de compresión ( $\sigma_y \sim -0.42$ ) hasta llegar a ser de tensión ( $\sigma_y \sim 1$ ) conforme la coordenada  $z$  aumenta, debido a que la rigidez transversal del VR es mayor en el plano  $xy$  cuando  $z = 0$  y decrece conforme la coordenada  $z$  se aproxima a  $\pm r_f$ .

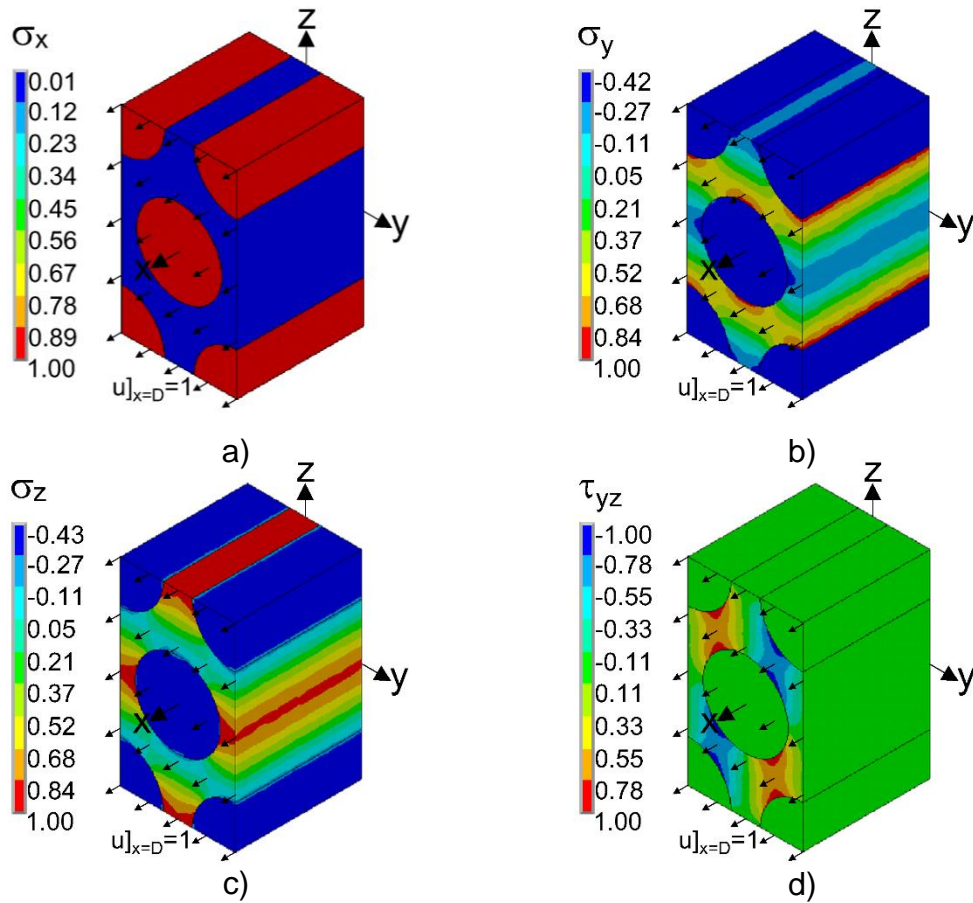


Fig. 4.2. Distribución de esfuerzos ante un desplazamiento uniforme y unitario en la dirección  $x$  en el plano  $yz$  con  $x=D$ , para FC/E con  $\phi_f=50\%$ .

a)  $\sigma_x$ , b)  $\sigma_y$ , c)  $\sigma_z$ , d)  $\tau_{yz}$ .

De manera similar a la Fig. 4.2b, en la Fig. 4.3c se observa que las fibras se encuentran en un estado de compresión uniforme inducido por la deformación de la matriz. asimismo, Agarwal et al. (2006) señalan que la distribución de  $\sigma_z$  es similar a la de  $\sigma_y$  pero con una rotación de  $90^\circ$  debido a que ambas direcciones forman un plano de isotropía material. Por lo tanto, los  $\sigma_z$  máximos de compresión en la matriz se encuentran en la zona interfacial del plano  $xy$  con  $z=\pm r_f$  y los de tensión en el plano  $xz$  con  $y=\pm r_f$ .

Acerca de la Fig. 4.3d en la que se presenta la distribución  $\tau_{yz}$ , se observa que los mayores gradientes se encuentran en las diagonales a  $45^\circ$  con el plano  $xy$ , en la matriz y la zona interfacial. Agarwal et al. (2006) indican que  $\tau_{yz}$  se genera debido a la transferencia de los esfuerzos  $\sigma_y$  y  $\sigma_z$  del material menos rígido al más rígido, esto es,



de la matriz a la fibra. Esto último puede observarse en las Figs. 4.2b y 4.2c, en las que  $\sigma_y$  y  $\sigma_z$ , respectivamente, se disipan en las zonas donde  $\tau_{yz}$  presenta los mayores gradientes, esto debido al balance de fuerzas y compatibilidad de esfuerzos.

Es importante notar que debido a la uniformidad de  $\sigma_x$  (Fig. 4.2a) en la fibra y la matriz, los esfuerzos cortantes en los planos  $xy$  ( $\tau_{xy}$ ) y  $xz$  ( $\tau_{xz}$ ) (ambos no mostrados) resultaron uniformes y con magnitudes despreciables (del orden del 1%) al compararlos con el máximo valor absoluto de  $\tau_{yz}$ .

Al comparar las distribuciones de esfuerzos normales y cortantes en el otro sistema material investigado (FV/E) se observó que las magnitudes varían con respecto al sistema material FC/E. No obstante, dichas magnitudes al ser normalizadas, no mostraron diferencias significativas con respecto a FC/E y por esta razón, no son reportadas en la Fig. 4.2. Esto último coincide con lo reportado por Goh et al. (2004), quienes examinaron la distribución de los esfuerzos variando la relación  $E_f/E_m$  en un intervalo de 50 a  $10^4$ , concluyendo que en un análisis elástico-lineal las distribuciones de esfuerzos normales y cortantes son muy similares sin importar la relación  $E_f/E_m$  que se utilice (siempre y cuando  $E_f > E_m$ ) y que sólo las magnitudes varían.

De este modo, los resultados de la distribución de esfuerzos normales y cortantes producidos por el MEF no solo ayuda a entender mejor el proceso de carga del VR al MCU, sino que su concordancia con MM clásicos reportados en la literatura, como RMP y RMS, abonan a construir la confiabilidad en el modelo utilizado como referencia.

#### **4.2.2. Comparación contra resultados experimentales**

Con el fin de aumentar la confiabilidad en el MEF realizado, sus resultados fueron comparados contra mediciones reportadas previamente en la literatura. Es importante recalcar que, aunque los datos experimentales pertenecen a los sistemas materiales utilizados (FC/E y FV/E), los valores exactos de las propiedades elásticas de los materiales constitutivos pueden diferir ligeramente de los valores nominales seleccionados para el MEF (ver tabla 3.1) o en muchas ocasiones no son reportadas por los autores. Por esta razón, cuando se contaba con parte de esta información en

alguna publicación en específico, las magnitudes de la tabla 3.1 fueron sustituidas por éstas y han sido señaladas en un paréntesis dentro de los gráficos.

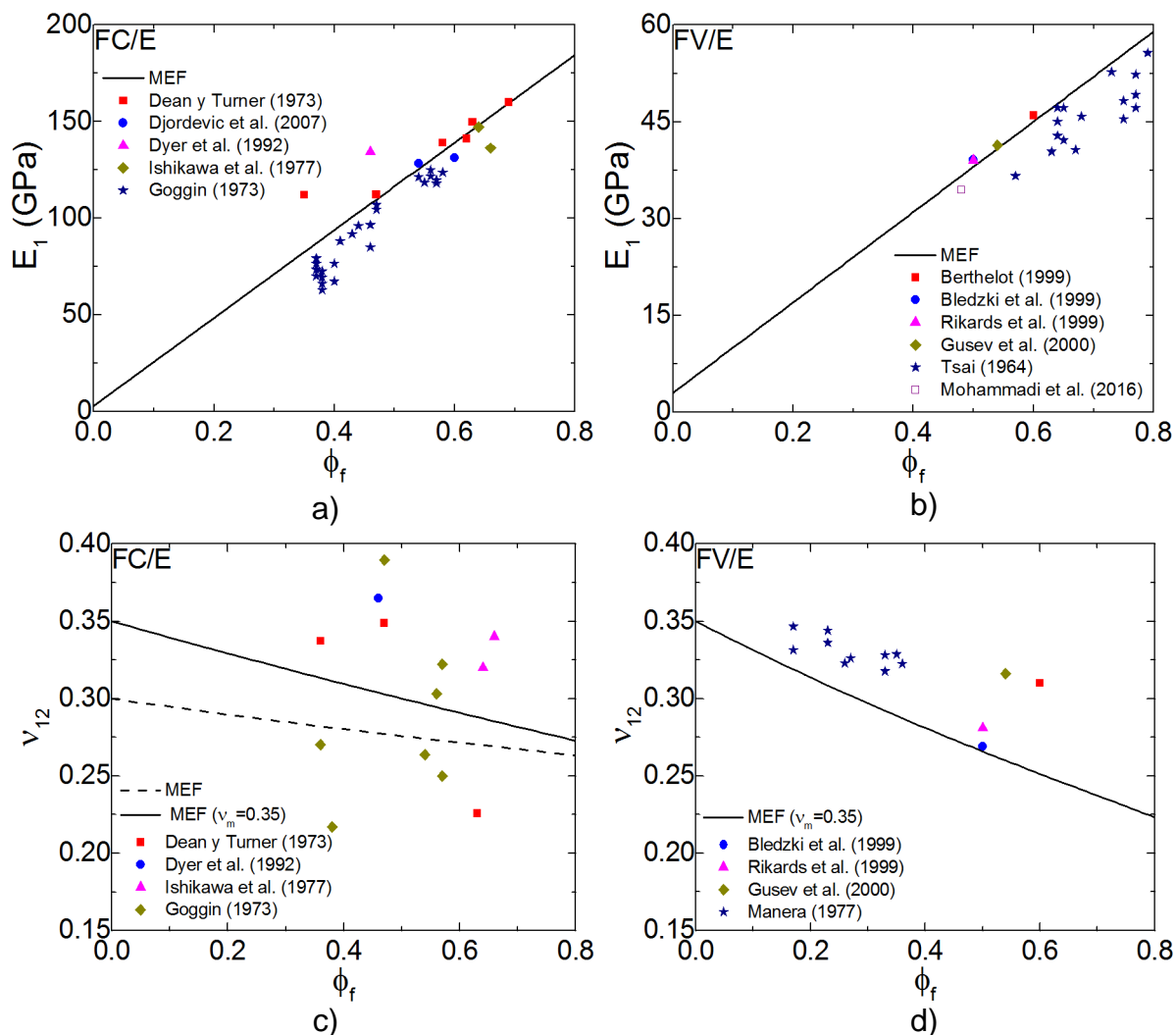


Fig. 4.3. Predicción de MEF para  $E_1$  y  $\nu_{12}$  y su comparación con resultados experimentales. a)  $E_1$  para FC/E, b)  $E_1$  para FV/E, c)  $\nu_{12}$  para FC/E, d)  $\nu_{12}$  para FV/E.

En las Figs. 4.3a y 4.3b se observa que  $E_1$  es linealmente proporcional a  $\phi_f$ ; además, con ayuda de la Fig. 4.2a fue posible observar la dominancia que tiene la fibra sobre el comportamiento mecánico del MCU y es por esto que Jones (1999) asegura que  $E_1$  es una propiedad fuertemente dominada por la fibra. Asimismo, en ambas figuras los autores reportan una rigidez longitudinal de la fibra ( $E_{1f}$ ) muy similar a la utilizada en el MEF (ver tabla 3.1), por esta razón, entre otras, es que los resultados experimentales se comparan satisfactoriamente con los del MEF.

Con respecto a la Fig. 4.3c se observa que los resultados experimentales tienen una mayor dispersión y que para  $\phi_f$  similares, las magnitudes varían considerablemente. Goggin (1973) atribuye la dispersión de sus resultados debido a la alta anisotropía de la fibra y al proceso de manufactura de la misma. Asimismo, en dicha figura los valores de entrada del MEF coinciden con los valores reportados por Dean y Turner (1973) e Ishikawa et al. (1977) y se observa que los resultados se comparan satisfactoriamente con los resultados experimentales reportados por dichos autores.

Por lo que concierne a la Fig. 4.3d, se observa que los resultados experimentales no tienen tanta dispersión para  $\phi_f$  similares, como sucede en la Fig. 4.3c. Esto último, los autores mostrados lo atribuyen a la isotropía que ha sido observada en la FV. De igual forma, se tomaron las propiedades elásticas reportadas por Manera (1977) y se observa que los resultados son satisfactorios, teniendo como diferencia una magnitud máxima de 13% para  $\phi_f=35\%$ . También, Manera (1977) compara sus resultados experimentales con MM simples como RMP y concluye que sus resultados experimentales difieren en magnitudes menores al 5%, por lo que considera que su comparación es satisfactoria.

Debido a que la rigidez del compuesto en la dirección transversal es altamente dominada por la matriz y por la interfaz entre la fibra y la matriz (Jones, 1999), era de esperarse que los resultados de las Figs. 4.3c y 4.3d tuviesen un mayor porcentaje de diferencia con respecto a MEF que los resultados de las Figs. 4.3a y 4.3b. La razón de esto se debe, entre otras, a los defectos de manufactura, la interfaz no es perfecta, la alineación y distribución de las fibras no es perfecta y a que, al menos con la FC, su rigidez transversal  $E_{2f}$  es muy susceptible al proceso de fabricación de la fibra.

### **4.3. Propiedades elásticas transversales**

#### **4.3.1. Análisis de la distribución de esfuerzos**

Tanto en FC/E como en FV/E y todas las  $\phi_f$  se obtuvo la deformación del VR esquematizada en la Fig. 3.8 y se observó que la deformación por efecto Poisson en la dirección  $x$  fue menor que la de la dirección  $z$  ( $\varepsilon_x < \varepsilon_z$ ) debido a que  $E_{1f} > E_m$ . Por otro lado, del MEF para  $E_2$  y  $\nu_{23}$  se obtuvo  $\nu_{21}$  (ver sección 3.5.2) y dicha magnitud fue corroborada con la relación recíproca (Ec. (2.1)) utilizando la magnitud de  $E_2$  y las

propiedades determinadas por el MEF para  $E_1$  y  $\nu_{12}$ , lo cual resultó con diferencias despreciables. Debido a que las distribuciones de esfuerzos normales y cortantes se mantuvieron similares en ambas combinaciones materiales y para todas las  $\phi_f$  analizadas, a modo representativo, en la Fig. 4.4 se muestra la distribución de  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  y  $\tau_{yz}$  para el compuesto FC/E con  $\phi_f=50\%$ .

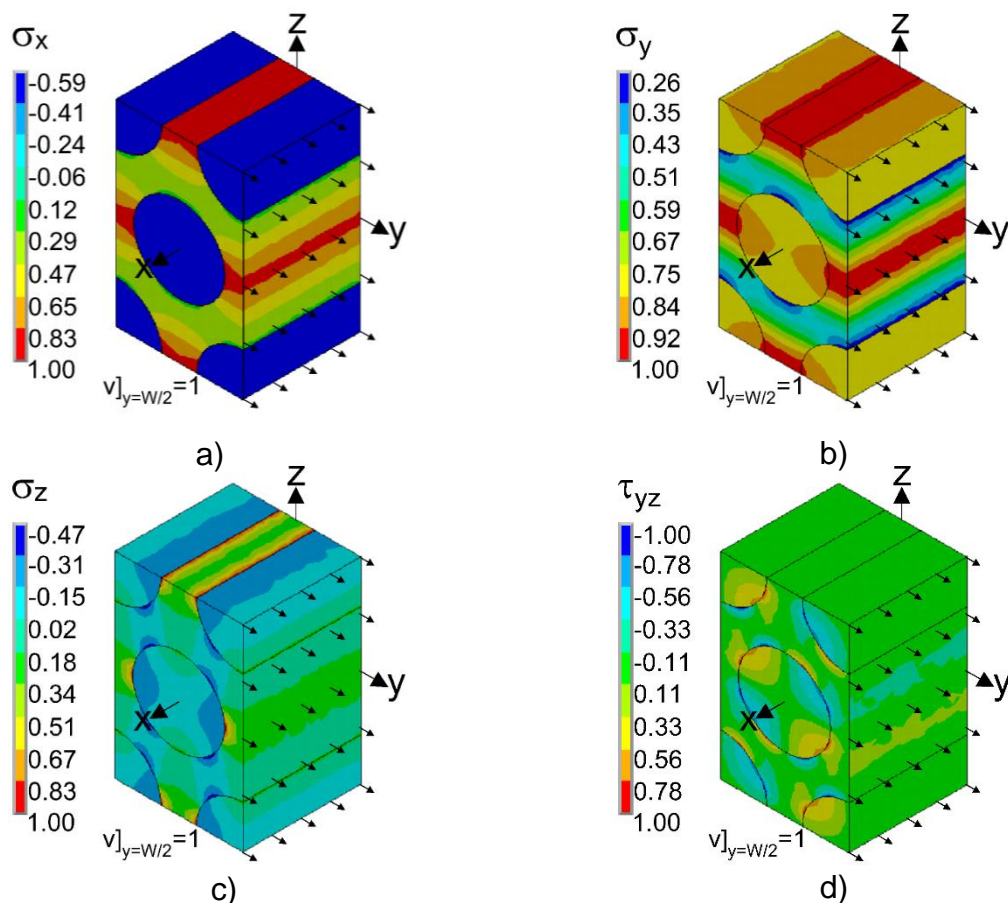


Fig. 4.4. Distribución de esfuerzos ante un desplazamiento uniforme y unitario en la dirección  $y$  en el plano  $xz$  con  $y=W/2$ , para FC/E con  $\phi_f=50\%$ .

a)  $\sigma_x$ , b)  $\sigma_y$ , c)  $\sigma_z$ , d)  $\tau_{yz}$ .

Acerca de la Fig. 4.4a se observa que debido al efecto Poisson, el VR se contrae en la dirección  $x$ , ocasionando que las fibras al ser más rígidas que la matriz en la dirección  $x$  soporten la compresión ( $\sigma_x \sim -0.59$ ). Debido a esta contracción, Hyer (1998) explica que la matriz al ser menos rígida tiende a deformarse más que la fibra; no obstante, debido a la adherencia entre la matriz y la fibra, esta última evita que la deformación sea excesiva, produciendo esfuerzos de tensión en toda la matriz siendo

máximos ( $\sigma_x \sim 1$ ) en el plano  $xy$  con  $z=0$  y  $z=\pm H/2$ , mientras que en  $z=\pm r_f$  son mínimos ( $\sigma_x \sim 0.12$ )

Con respecto a la Fig. 4.4b se observa que  $\sigma_y$  es de tensión en todo el VR cuando al VR se le impone una elongación en la dirección  $y$ . Asimismo, Adams y Doner (1967) reportaron que los máximos esfuerzos de tensión ( $\sigma_y \sim 1$ ) se encuentran en la zona interfacial y en la matriz en el plano  $xy$  con  $z=0$  y  $z=\pm H/2$ . Note que el esfuerzo de tensión en las fibras ( $\sigma_y \sim [0.75 - 0.92]$ ) es menor que en la zona interfacial y la matriz, es por esto que Hyer (1998) la denomina como una dirección dominada por la matriz y la interfaz. Asimismo, se observa que dentro de la fibra  $\sigma_y$  no es uniforme y estos gradientes se dan debido a que existe una interacción entre la proximidad de las fibras (Tandon y Weng, 1986). También se observa que cuando la carga es transversal a las fibras, el esfuerzo de tensión no es uniforme en la matriz, a lo que Agarwal et al. (2006) comentan que se debe a la geometría de la fibra, ya que esta no es capaz de soportar el esfuerzo a tensión, como sucede cuando la condición de carga es paralela a las fibras (ver Fig. 4.2a). Esto es, si se tomará una franja en  $z=\pm r_f$  y a su vez se dividiera en franjas de menor espesor, la rigidez transversal de cada una de estas subdivisiones disminuye conforme  $z$  se aproxima a  $\pm r_f$ .

Por lo que concierne a la Fig. 4.4c, se observa que existen gradientes de esfuerzos de compresión dentro de la fibra, siendo máximos ( $\sigma_z \sim -0.47$ ) en  $y=\pm r_f$  y mínimos ( $\sigma_z \sim -0.02$ ) en  $z=\pm r_f$ . Esto último, Mori y Tanaka (1973) comentan que se debe a la interacción que existe entre las fibras por resistir la contracción del VR en la dirección  $z$  y que es esta misma razón por la que en las diagonales a  $45^\circ$  con el plano  $xy$  de las fibras, se dan esfuerzos de compresión en la zona interfacial y la matriz

En relación con la Fig. 4.4d se observa que los mayores esfuerzos cortantes se encuentran en las diagonales a  $45^\circ$  con el plano  $xy$  debido a que es en la dirección en la que se da la interacción entre las fibras, descrita por Mori y Tanaka (1973) como una forma de resistir los esfuerzos de tensión  $\sigma_y$  y de compresión  $\sigma_z$ .

Similarmente al MEF para  $E_1$  y  $\nu_{12}$ , los esfuerzos cortantes  $\tau_{xy}$  y  $\tau_{xz}$  presentaron distribuciones muy uniformes y de magnitudes despreciables, esto debido a que los esfuerzos normales de compresión  $\sigma_x$  y  $\sigma_z$  son resistidos, en su mayoría, por las fibras,

mientras que el esfuerzo de tensión  $\sigma_y$  es resistido por la matriz. Por esta razón, es muy pequeña la transferencia de esfuerzos que se da de la matriz a la fibra.

#### 4.3.2. Comparación contra resultados experimentales

En la Fig. 4.5 se presenta la evolución de las propiedades transversales  $E_2$  y  $\nu_{23}$  con respecto a  $\phi_f$ ; asimismo, éstos son comparados contra resultados experimentales.

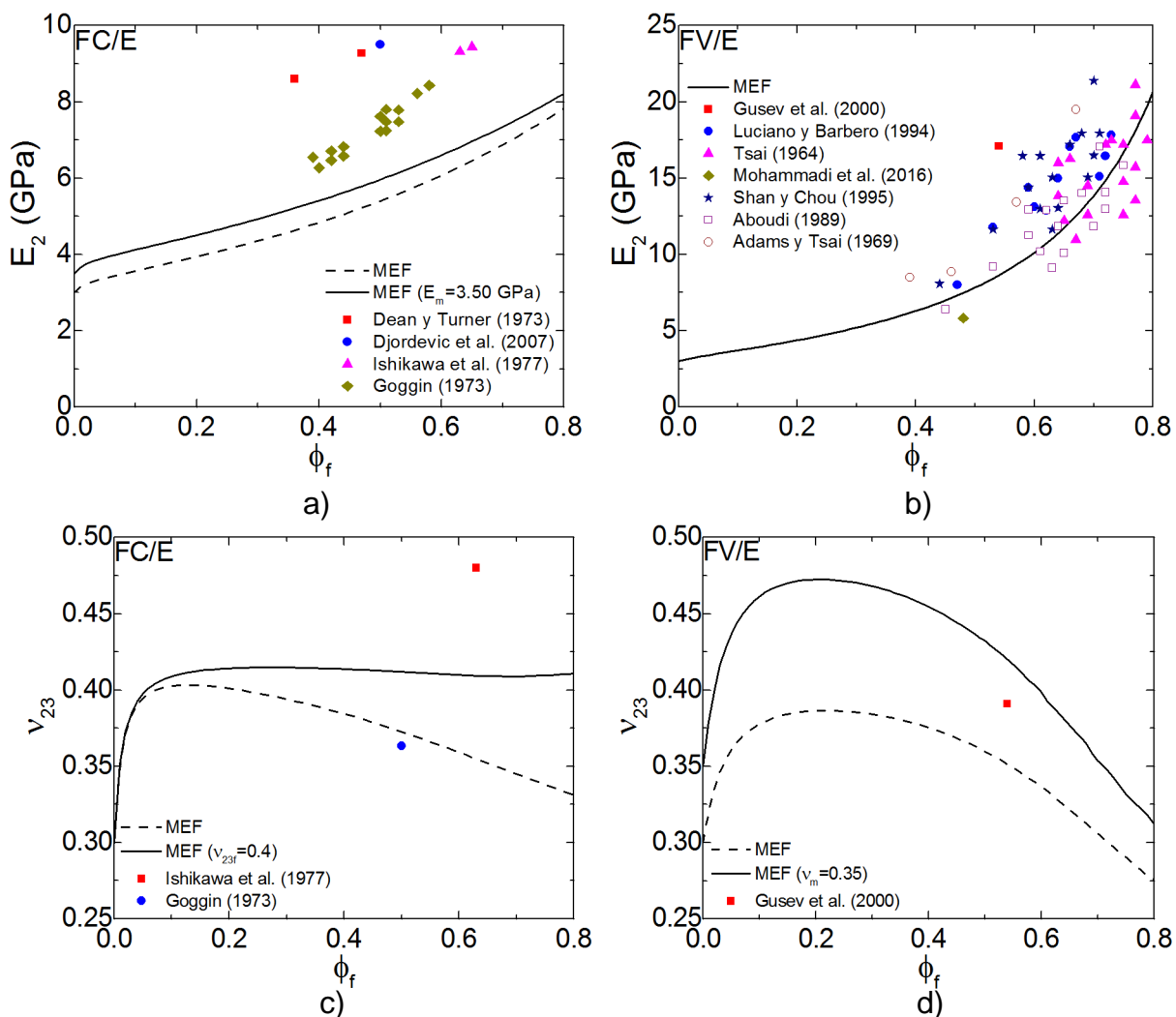


Fig. 4.5. Predicción de  $E_2$  y  $\nu_{23}$  (MEF) y su comparación con resultados experimentales. a)  $E_2$  para FC/E, b)  $E_2$  para FV/E, c)  $\nu_{23}$  para FC/E, d)  $\nu_{23}$  para FV/E.

En las Figs. 4.5a y 4.5b puede observarse el crecimiento no lineal que tiene  $E_2$  con respecto a  $\phi_f$ , de igual modo, se observa que la rigidez transversal del MCU no aumenta significativamente con respecto a la rigidez de la matriz. Esto mismo ha sido observado por Barbero (2011) en el que concluyó que la rigidez longitudinal del MCU

( $E_1$ ) aumenta dos veces la rigidez de la matriz ( $E_m$ ) con bajos contenidos de fibras ( $\phi_f < 10\%$ ) (ver Fig. 4.3a y 4.3b); mientras que para aumentar la rigidez transversal del MCU ( $E_2$ ) en dos veces la rigidez de la matriz, se necesitan de contenidos altos de fibras ( $\phi_f > 50\%$ ) (Fig. 4.5a y 4.5b). Concerniente a la Fig. 4.5a se observa que existe una diferencia entre los resultados experimentales con respecto a los de MEF. La curva punteada en dicha figura corresponde a los resultados obtenidos con los valores nominales utilizados (ver tabla 3.1), mientras que la curva sólida corresponde a los resultados obtenidos utilizando las propiedades materiales reportadas por Goggin (1973). En los trabajos de Dean y Turner (1973) y Djordevic et al. (2007) contrastan sus resultados experimentales con MM y concluyen que los resultados obtenidos se deben a la alta anisotropía de la fibra en su dirección transversal y que los valores de  $E_{2f}$  (no mencionados) utilizados en los MM deberían ser revisados con pruebas experimentales a la FC con mayor precisión. Por otro lado, Ishikawa et al. (1977) considera que la diferencia entre sus resultados experimentales contra MM es debido a la alta anisotropía de la fibra y que la asunción de que las fibras se encuentran compactadas en arreglos geométricos repetitivos, como lo es el patrón hexagonal. Goggin (1973) en su trabajo, concluye que la diferencia de sus resultados experimentales con respecto a los MM se debe a que la magnitud de  $E_{2f}$  se basa en pruebas realizadas a cristales y grafitos policristalinos y por lo tanto no representan la verdadera magnitud de dicha propiedad cuando el material se encuentra en fibras.

En cuanto a la Fig. 4.5b se observa que los resultados experimentales reportados son satisfactorios con respecto a los resultados de MEF. Los autores mencionados en el gráfico coinciden que la FV al ser de muy baja anisotropía (a diferencia de la FC) presenta resultados experimentales favorables cuando se comparan contra MM y que la diferencia que existe entre éstos se debe más a las asunciones de muchos de los MM como lo es la interfaz perfecta o el arreglo geométrico de las fibras.

Con lo que respecta a las Figs. 4.5c y 4.5d se aprecia que el comportamiento de  $\nu_{23}$  con respecto a  $\phi_f$  no es monótonico, esto es, primero aumenta con  $\phi_f < 20\%$  y después disminuye conforme  $\phi_f \geq 20\%$ . Shan y Chou (1995) describen que el MCU se comporta en  $\phi_f$  bajas (<20%) como un compuesto con inclusiones de vacíos en forma de fibra y, por consiguiente, la rigidez en la dirección 3 se ve reducida, mientras que, con  $\phi_f$  altas

( $\geq 20\%$ ) las fibras sirven como una restricción a la deformación transversal de la matriz (Agarwal et al., 2006).

Respecto a la Fig. 4.5c se presenta en línea sólida los resultados de MEF utilizando  $\nu_{23f}$  reportado por Ishikawa et al. (1977), mientras que con una línea punteada se presentan los resultados de MEF utilizando las propiedades nominales (ver tabla 3.1). En cuanto al resultado obtenido en el trabajo de Ishikawa et al. (1977) a través de pruebas de torsión (no normadas) en bloques de compuestos laminados presenta una diferencia del 20% con respecto a la línea sólida. El resultado obtenido lo justifican como una prueba de la alta anisotropía de la fibra y que la diferencia que existe con respecto a los MM se debe a la imprecisión con que las propiedades elásticas transversales de la fibra ( $E_{2f}$  y  $\nu_{23f}$ ) son medidas. Por otro lado, Goggin (1973) obtuvo su resultado a través de pruebas (no normadas) de torsión en especímenes con forma de barras de 300 mm de largo, 125 mm de ancho y 2.5 mm de espesor con una configuración de fibras orientadas a  $90^\circ$ . El resultado es favorable con respecto a la línea punteada pues tiene una diferencia del 2%. Sin embargo, el autor describe su resultado como uno mucho mayor al valor de  $\nu_m$  y que éste se debe a la alta anisotropía de la fibra y el proceso de fabricación de las mismas. Por lo que recomienda que un mayor proceso de investigación se debe realizar para la obtención de las propiedades elásticas transversales de la FC.

En la Fig. 4.5d, la línea sólida representa el análisis numérico desarrollado utilizando las propiedades materiales reportadas por Gusev et al. (2000), mientras que la línea punteada representa los resultados del análisis numérico utilizando las propiedades nominales (ver tabla 3.1). Gusev et al. (2000) determinan  $\nu_{23}$  a partir de un método de velocidad ultrasónica desarrollado en la Universidad de Leeds, Inglaterra. Su resultado tiene una diferencia del 7% con respecto a la línea sólida. Sin embargo, Gusev et al. (2000) concluyeron que esta diferencia es debido a que el proceso de medición que utilizaron tiende a sobrestimar las magnitudes de las propiedades transversales.



## 4.4. Módulo cortante en el plano

### 4.4.1. Análisis de la distribución de esfuerzos

Del análisis de la distribución de esfuerzos se comprobó haber obtenido la configuración esquematizada de la Fig. 3.10 para todas las  $\phi_f$  analizadas y en ambas combinaciones materiales. A partir de las condiciones de carga y frontera se obtuvo la distorsión del VR sin inducir esfuerzos de flexión en el mismo. Asimismo, se observó que la deformación sucede principalmente en la matriz, mientras que en las fibras la deformación es menor. Por esta razón Hyer (1998) explica que la acción de cortante en un MCU tiene poco efecto sobre las fibras, en tanto que éstas solo se deslizan unas a otras. De este modo, ante una deformación por cortante la alta rigidez y resistencia de la fibra no se aprovecha en el comportamiento del MCU.

De las distribuciones de esfuerzo normal, se observó que el esfuerzo normal  $\sigma_x$  presenta una distribución uniforme y prácticamente nula, tal y como ha sido reportado por Nedele y Wisnom (1994) quienes aseguran que en el caso de una carga de cortante longitudinal pura, la componente del esfuerzo normal  $\sigma_x$  es cero y que los esfuerzos cortantes en los planos  $xy$ ,  $xz$  y  $yz$  ( $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  y  $\tau_{yz}$ ) son de interés. Asimismo, se observó que  $\sigma_y$  y  $\sigma_z$  presentan una distribución de esfuerzo similar y simétrica con respecto a los ejes  $z$  e  $y$  debido a que dichos ejes forman el plano de simetría material. Por esta razón, la Fig. 4.6 se muestra la distribución del esfuerzo normal  $\sigma_z$  y los esfuerzos cortantes en los tres planos  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  y  $\tau_{yz}$  para el compuesto FC/E con  $\phi_f=50\%$ .

Con respecto a la Fig. 4.6a se observa que cuando al VR se le impone una deformación por cortante en el plano  $xy$  se generan esfuerzos normales  $\sigma_z$  de tensión y compresión en la zona interfacial de la fibra y la matriz en direcciones a  $45^\circ$  sobre el plano  $yz$ . Esto último Hyer (1998) lo define como esfuerzos generados debido al deslizamiento que tiene la fibra sobre la matriz al deformarse. Asimismo, se observa que dichos esfuerzos  $\sigma_z$  no son constantes en el espesor del VR y que sólo existen sobre el plano  $yz$  cuando  $x=0$  y  $x=D$ . Esto último coincide con lo reportado por Yang et al. (20015) quienes aseguran que es debido a estos esfuerzos en  $x=0$  y  $x=D$  donde se darían las primeras fallas interfaciales.

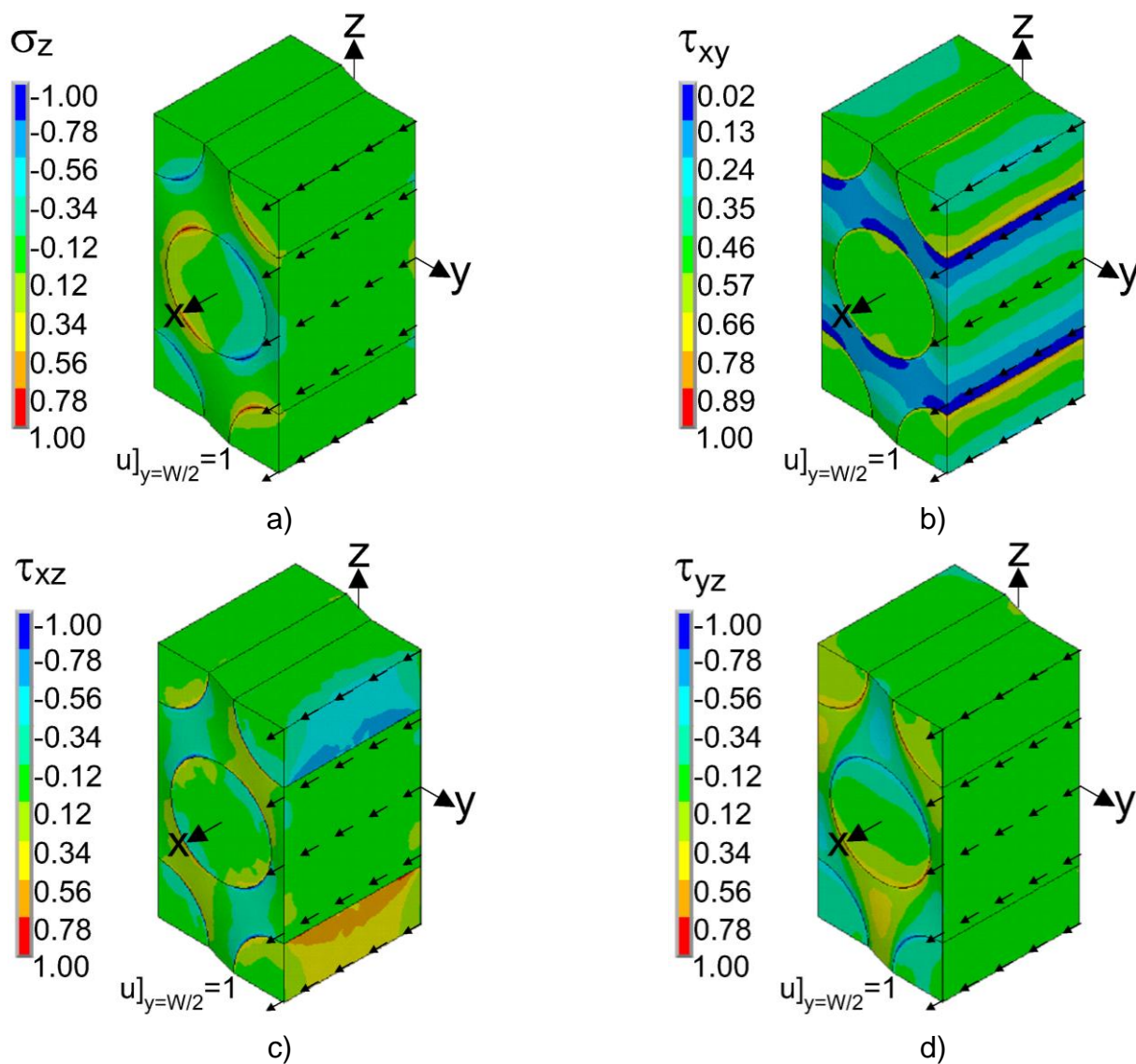


Fig. 4.6. Distribución de esfuerzos ante un desplazamiento uniforme y unitario en la dirección  $x$  en el plano  $yz$  con  $y=W/2$ , para FC/E y  $\phi_f=50\%$ .

a)  $\sigma_z$ , b)  $\tau_{xy}$ , c)  $\tau_{xz}$ , d)  $\tau_{yz}$ .

En la Fig. 4.6b se aprecia que el máximo esfuerzo cortante  $\tau_{xy}$  ocurre sobre el plano  $xy$  cuando  $z=0$  y  $z=\pm H/2$  y que la magnitud es uniforme tanto en la fibra como en la matriz, por lo que la fibra, aunque es más rígida que la matriz, no toma un mayor esfuerzo que en la matriz y es por esto que Adams y Doner (1967) aseguran que  $G_{12}$  es una propiedad dominada por la matriz. Asimismo, se observa que  $\tau_{xy}$  es bastante uniforme en el dominio de la fibra sobre el plano  $xy$  cuando  $z$  se aproxima a  $\pm r_f$ , dándose un gradiente muy alto en la zona interfacial cuando  $z=r_f$ . Esto último ha sido también observado por Ahmadi y Aghdam (2010) quienes explican que  $\tau_{xy}$  es máximo

cuando  $x=\pm r_f$  y  $z=0$  y que éste disminuye conforme  $x$  se aproxima a 0 y  $z$  se aproxima a  $\pm r_f$  sobre la zona interfacial debido al deslizamiento que tiene la fibra dentro de la matriz, producto de la deformación por cortante.

Correspondiente a la Fig. 4.6c, se observa que el esfuerzo cortante  $\tau_{xz}$  es máximo sobre la matriz en direcciones a  $45^\circ$  sobre el plano  $xy$  y a su vez, en el dominio de la fibra sobre el plano  $xz$  cuando  $y=0$  y  $y=\pm W/2$ . Esto último coincide con lo que Ahmadi y Aghdam (2010) aseguran que debido al deslizamiento de la fibra sobre la matriz, el esfuerzo  $\tau_{xy}$  es máximo sobre el plano  $xy$  cuando  $z=0$  (ver Fig. 4.6c) y se esperaría que lo mismo sucediera en un plano perpendicular al plano  $xy$ , esto es, sobre el plano  $xz$  cuando  $y=0$ .

En la Fig. 4.9d y recordando que el plano  $yz$  es un plano de isotropía material, se muestra que el esfuerzo cortante  $\tau_{yz}$  es máximo y mínimo en las zonas donde los esfuerzos normales  $\sigma_y$  (no mostrado) y  $\sigma_z$  (ver Fig. 4.6a) son mínimos y máximos, respectivamente. Asimismo, se observa que  $\tau_{yz}$  no es constante en la profundidad del VR, sólo existe en el plano  $yz$  cuando  $x=0$  y  $x=D$ . Por esta razón es que Yang et al. (2005) consideran que una vez que los esfuerzos normales  $\sigma_y$  y  $\sigma_z$  alcancen la resistencia del material se observarán microagrietamientos con un ángulo de inclinación aproximadamente a  $45^\circ$  sobre el plano  $xy$  en  $x=0$  y  $x=D$ .

#### 4.4.2. Comparación contra resultados experimentales

En la Fig. 4.7 se presenta  $G_{12}$  como función de  $\phi_f$  para las dos combinaciones materiales analizadas, comparados contra resultados experimentales.

A partir de las Figs. 4.7 se observa que los resultados de MEF (línea punteada) utilizando las propiedades nominales son muy similares entre combinaciones materiales, a pesar de que la relación  $G_{12f}/G_m$  es de 23.7 y 26.4 para FC/E y FV/E respectivamente. Lo mismo sucede en las curvas sólidas donde se modificó el valor de entrada de  $E_m$  de 3 GPa a 3.5 GPa. Esto último coincide con el análisis paramétrico realizado por Nedele y Wisnom (1994) en donde los autores concluyeron que el cambio en la rigidez de la fibra no impacta considerablemente en el resultado de  $G_{12}$  como impacta el cambio en la rigidez de la matriz. Por esta razón, Jones (1999) explica que el módulo cortante de un MCU es una propiedad altamente dominada por la matriz y

que la rigidez longitudinal de la fibra no es aprovechada en el comportamiento mecánico del material.

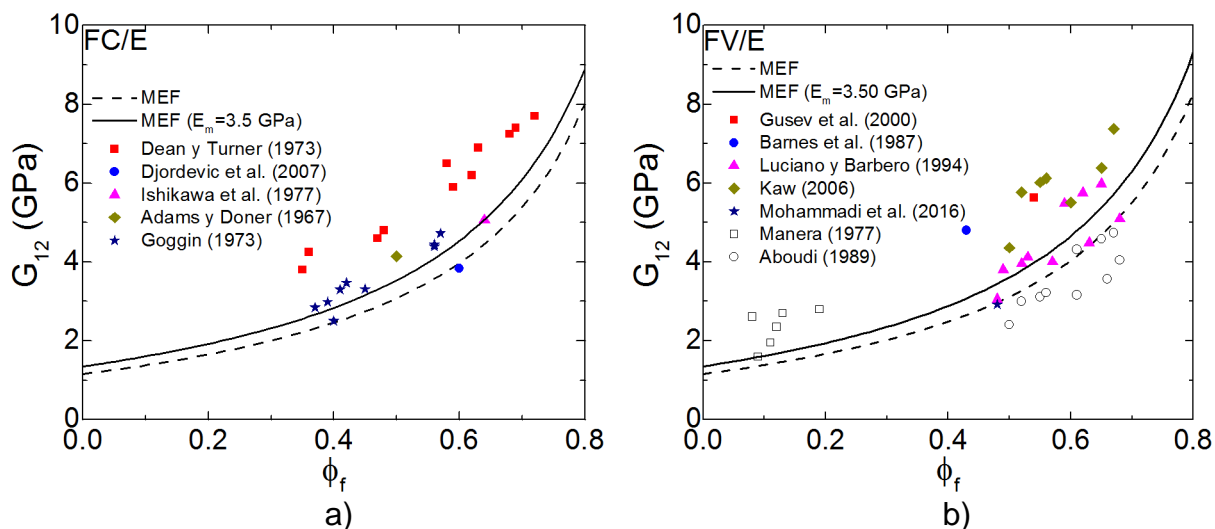


Fig. 4.7. Predicción de  $G_{12}$  (MEF) y su comparación con resultados experimentales. a) FC/E, b) FV/E.

En relación con la Fig. 4.7a la línea sólida representa los resultados de MEF utilizando la magnitud de  $E_m$  reportada por Goggin (1973) e Ishikawa et al. (1977), mientras que la curva punteada representa los resultados de MEF utilizando las propiedades materiales nominales (ver tabla 3.1). Para el caso de los resultados experimentales de Goggin (1973) e Ishikawa et al. (1977) se observa que son satisfactorios con respecto a la curva sólida y coincide con las conclusiones de ambos trabajos donde dichos resultados fueron comparados contra diversos MM. Sin embargo, Dean y Turner (1973) también reportaron un valor similar de  $E_m$  y la variación de sus resultados se lo atribuyen a la alta anisotropía de la fibra que a su vez depende, entre otros, del tratamiento térmico con que se produce la misma.

Respecto a la Fig. 4.7b la línea sólida fue generada utilizando los valores de  $E_m$  reportados por Luciano y Barbero (1994) mientras que la línea punteada fue generada utilizando los valores nominales, los cuales, a su vez, coinciden con lo reportado por Aboudi (1989). Para el caso de los resultados publicados por Luciano y Barbero (1994), éstos son satisfactorios con los resultados de MEF y coincide con la conclusión de los autores donde dichos resultados experimentales fueron comparados contra MM. Esto mismo se observa con los resultados de Aboudi (1989) cuando son comparados contra la curva punteada.

## CAPÍTULO 5

### Comparación de los resultados de los modelos de elemento finito contra los modelos de micromecánica

#### 5.1. Propiedades elásticas longitudinales

##### 5.1.1. Módulo elástico longitudinal

La examinación de los MM para  $E_1$  del compuesto FC/E se presenta en la Fig. 5.1

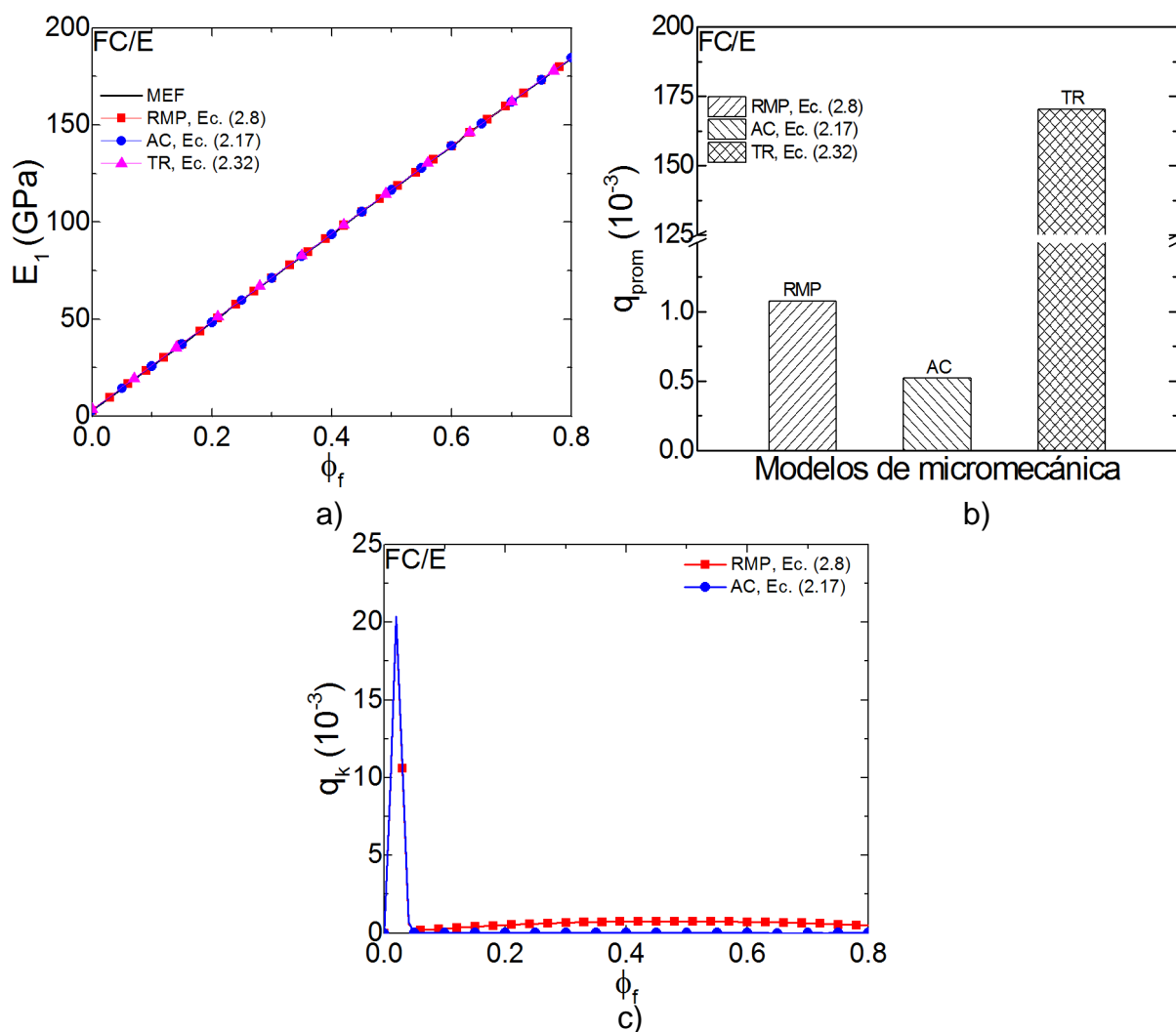


Fig. 5.1. Comparación de los MM contra MEF para FC/E. a) Predicción de  $E_1$ , b) cuantificación del error global promedio, c) distribución del error puntual como función de  $\phi_f$ .

Relacionado con la Fig. 5.1a se observa que todos los MM presentados en la sección 2.2 para la predicción de  $E_1$  tienen resultados favorables con respecto a la curva de MEF. Esto último se debe a que los tres MM se encuentran formulados con la hipótesis de que la distribución de esfuerzos  $\sigma_x$  cuando el MCU es tensionado en la dirección 1 es uniforme y proporcional al volumen de sus materiales constitutivos, lo cual coincide con la distribución de esfuerzos observada en la Fig. 4.2a.

Concerniente a la Fig. 5.1b se observa que el  $q_{prom}$  de los tres MM es menor a la unidad y de acuerdo con Hyndman y Koehler (2006) esto indica que los MM tendrán resultados favorables con respecto a los resultados de MEF. No obstante, se observa que TR presenta un  $q_{prom}$  mucho mayor que RMP y AC. Esto último indica que existe una leve imprecisión en la predicción de  $E_1$  por parte de TR. Asimismo, se observa que entre AC es el MM que menor  $q_{prom}$  presenta, por lo que da un indicio de que es el MM con mayor precisión para la predicción de  $E_1$ .

En la Fig. 5.1c se grafica  $q_k$  como función de  $\phi_f$  de los MM con menor  $q_{prom}$  y se observa como en  $\phi_f < 5\%$  ambos MM tienen una diferencia muy similar con respecto a MEF. No obstante, para  $\phi_f > 5\%$  AC mantiene un error prácticamente constante y muy cercano a cero, siendo  $1.8 \times 10^{-5}$  el máximo valor de  $q_k$  que sucede en  $\phi_f = 34\%$ . De RMP se observa que en  $\phi_f > 5\%$  el error es más grande que el obtenido por AC, siendo  $7.6 \times 10^{-4}$  el máximo valor de  $q_k$  que sucede en  $\phi_f = 50\%$ .

Las bajas magnitudes de  $q_k$  calculadas para los modelos RMP y AC se debe a que ambos MM coinciden en la hipótesis de que la distribución del esfuerzo normal  $\sigma_x$  es uniforme en el MCU cuando éste es tensionado en la dirección 1 (ver Fig. 4.2a). Sin embargo, el modelo AC considera en su formulación que existirá una contracción transversal a la carga debido al efecto Poisson, lo cual fue observado con ayuda de las Figs. 4.2b y 4.2c.

El análisis del error estadístico para el compuesto FV/E se presenta en la Fig. 5.2.

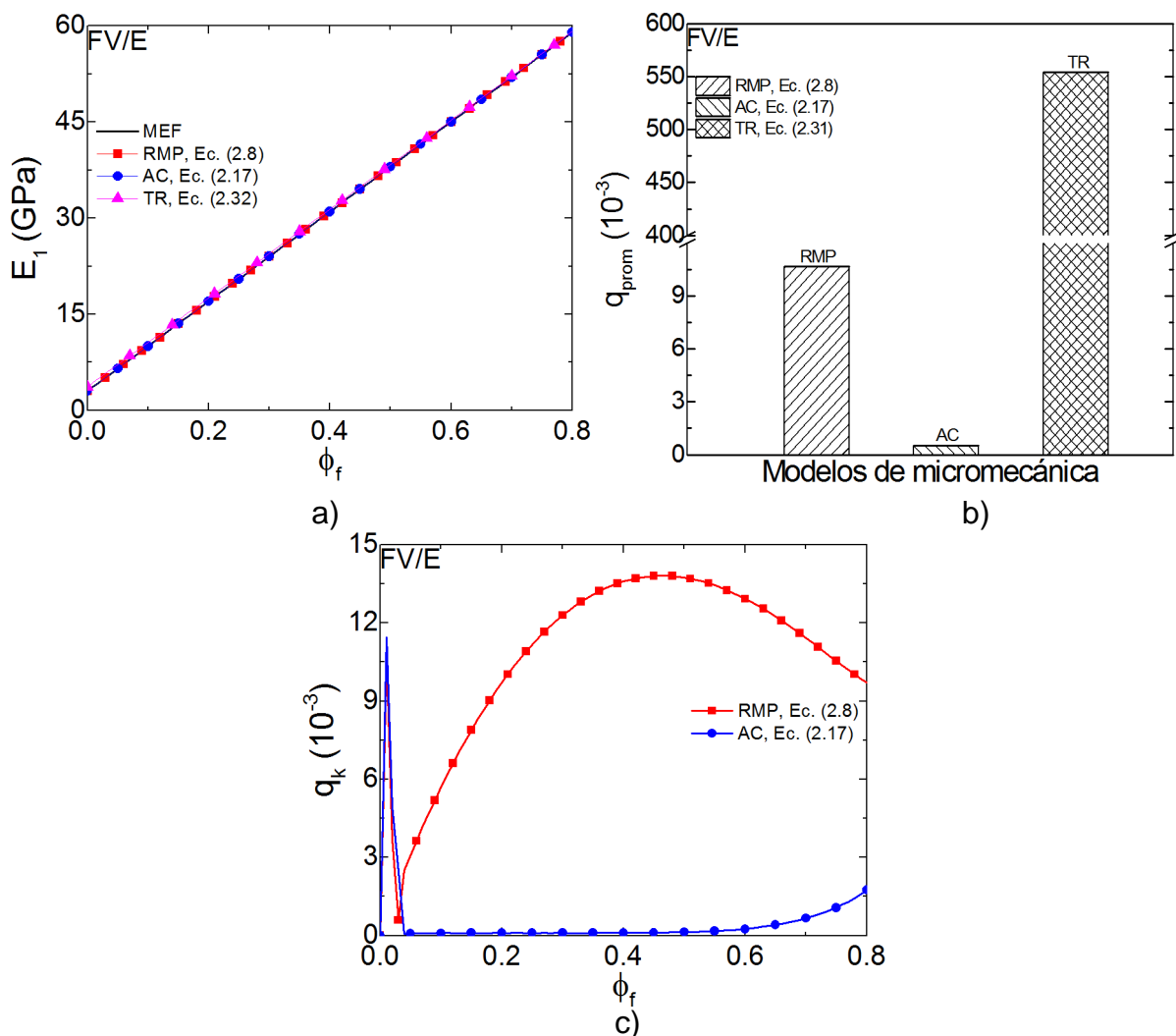


Fig. 5.2. Comparación de los MM contra MEF para FV/E. a) Predicción de  $E_1$ , b) cuantificación del error global promedio, c) distribución del error puntual como función de  $\phi_f$ .

A partir de la Fig. 5.2a se observa que los tres MM para la predicción de  $E_1$  presentan resultados muy similares a los obtenidos a través de MEF, todos con un  $q_{prom} < 1$  (Fig. 5.2b). Al igual que para el compuesto FC/E (ver Fig. 5.1b) el MM AC es el que presenta la menor magnitud de  $q_{prom}$ , seguido por RMP y TR.

La distribución de  $q_k$  como función de  $\phi_f$  se muestra en la Fig. 5.1c para los dos MM con menor magnitud de  $q_{prom}$  (RMP y AC). Se observa que para  $\phi_f < 5\%$  ambos MM presentan diferencias muy similares con respecto a los resultados obtenidos por MEF, teniendo una magnitud máxima de  $q_k = 11.4 \times 10^{-3}$  en  $\phi_f = 1\%$ . De igual forma, se observa que el modelo AC presenta un valor de  $q_k$  casi constante para  $\phi_f < 50\%$ , siendo una

magnitud de  $q_k=0.128 \times 10^{-3}$ , mientras que para  $\phi_f > 50\%$ ,  $q_k$  aumenta hasta alcanzar un máximo de  $1.75 \times 10^{-3}$  en  $\phi_f=80\%$ . Asimismo, se observa que la diferencia del modelo RMP no es constante para  $\phi_f > 5\%$  como sucede en el modelo AC. La máxima diferencia tiene una magnitud  $q_k=13.8 \times 10^{-3}$  en  $\phi_f=50\%$  y posteriormente desciende a una magnitud de  $q_k=9.7 \times 10^{-3}$  en  $\phi_f=80\%$ .

Similarmente al compuesto FC/E y debido a que  $E_1$  es una propiedad elástica altamente dominada por la fibra (Hull y Clyne, 1996), las bajas magnitudes de  $q_k$ , se deben a la formulación con la que cuentan los modelos RMP y AC.

### 5.1.2. Razón de Poisson longitudinal

El análisis de los resultados de MEF contra los de los MM para la predicción de  $\nu_{12}$  es presentado en la Fig. 5.3.

En la Fig. 5.3a se muestra la predicción de  $\nu_{12}$  como función de  $\phi_f$  a partir de los MM presentados en la sección 2.2 y la metodología expuesta en la sección 3.4 y se puede notar que el modelo RMP presenta una ligera sobrestimación de  $\nu_{12}$  con respecto de los resultados de MEF, mientras que los modelos CN y AC presentan resultados más favorables. El promedio de las diferencias entre resultados se presenta en la Fig. 5.3b y en ella se advierte que es el modelo AC quien tiene la menor magnitud de  $q_{prom}$  con una magnitud de 0.22, mientras que los modelos RMP y AC presentan magnitudes 10 y 17.5 veces más grandes, respectivamente. De acuerdo con el criterio establecido en el trabajo de Hyndman y Koehler (2006) es el modelo AC quien tiene la mejor aproximación de resultados con respecto a los de MEF, esto mismo puede concluirse inspeccionando la Fig. 5.3c, en la que se grafica  $q_k$  en función de  $\phi_f$ . A partir de la Fig. 5.3c se puede observar que el modelo RMP tiene las mayores diferencias con respecto a los resultados de MEF, teniendo un valor máximo de  $q_k=4.7$  en  $\phi_f=50\%$  para después disminuir a una valor de  $q_k=3.11$  en  $\phi_f=80\%$ . Por otro lado, el modelo CN alcanza un valor máximo de  $q_k=2.8$  en  $\phi_f=35\%$  y de  $q_k=0.85$  en  $\phi_f=80\%$ , mientras que el modelo AC tiene valores de  $q_k$  menores a la unidad en todo el intervalo de análisis, siendo el valor máximo de  $q_k=0.34$  en  $\phi_f=45\%$



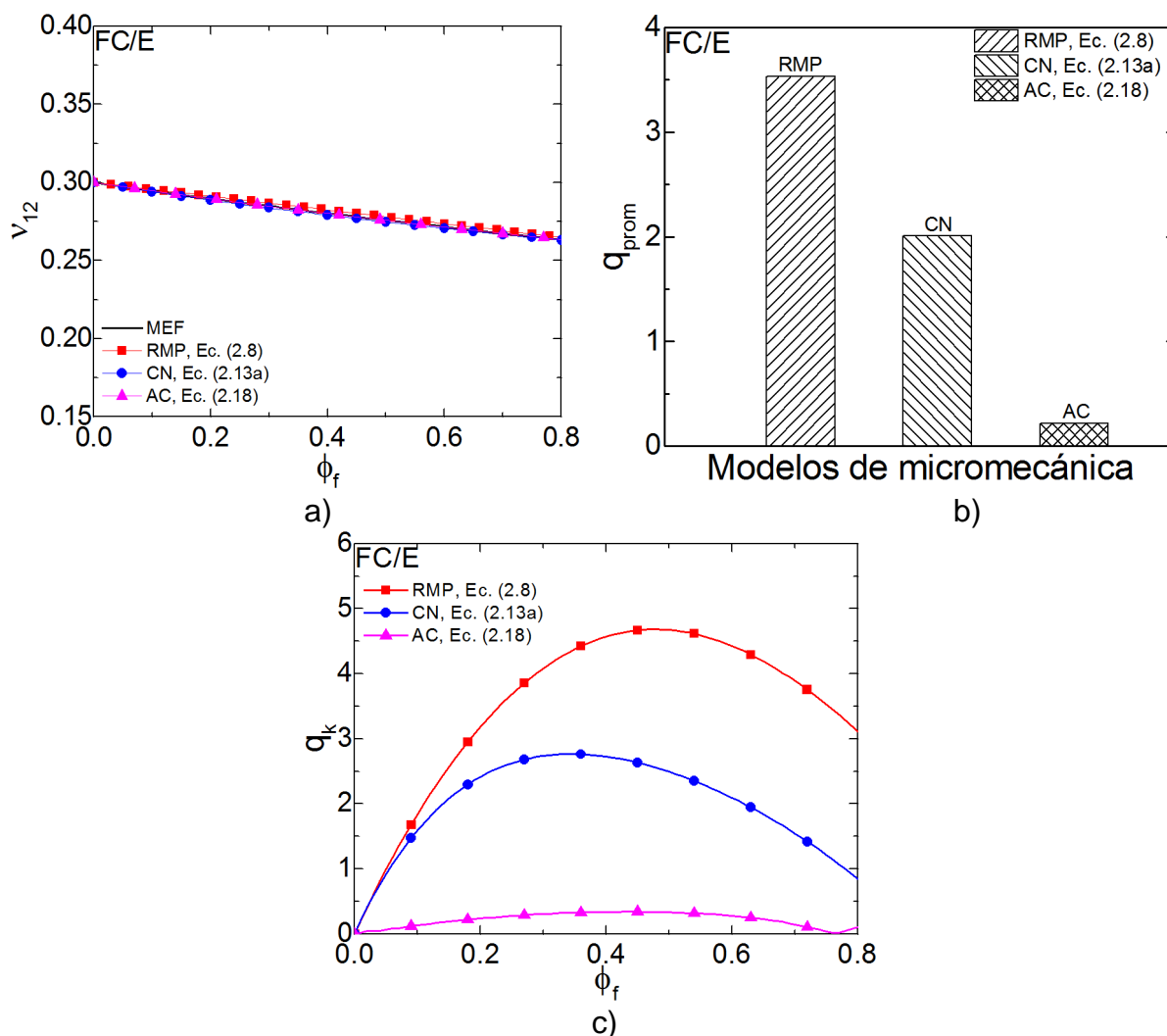


Fig. 5.3. Comparación de los MM contra MEF para FC/E. a) Predicción de  $v_{12}$ , b) cuantificación del error global promedio, c) distribución del error puntual como función de  $\phi_f$ .

Debido a la existencia de gradientes de esfuerzo ( $\sigma_y$  y  $\sigma_z$ ) significativos en la matriz debido a la rigidez transversal de la fibra observados en las Figs. 4.2b y 4.2c,  $v_{12}$  está íntimamente ligada a las propiedades transversales de la fibra y la matriz. Por esta razón, los modelos CN y RMP al despreciar la contribución en la predicción de  $v_{12}$  de dichos gradientes en su formulación, presentan mayores valores de  $q_k$  que los que presenta el modelo AC quien hace un esfuerzo por incluir dicha contribución en su formulación.

Análogamente, para la combinación FV/E la examinación de los MM se presenta en la Fig. 5.4

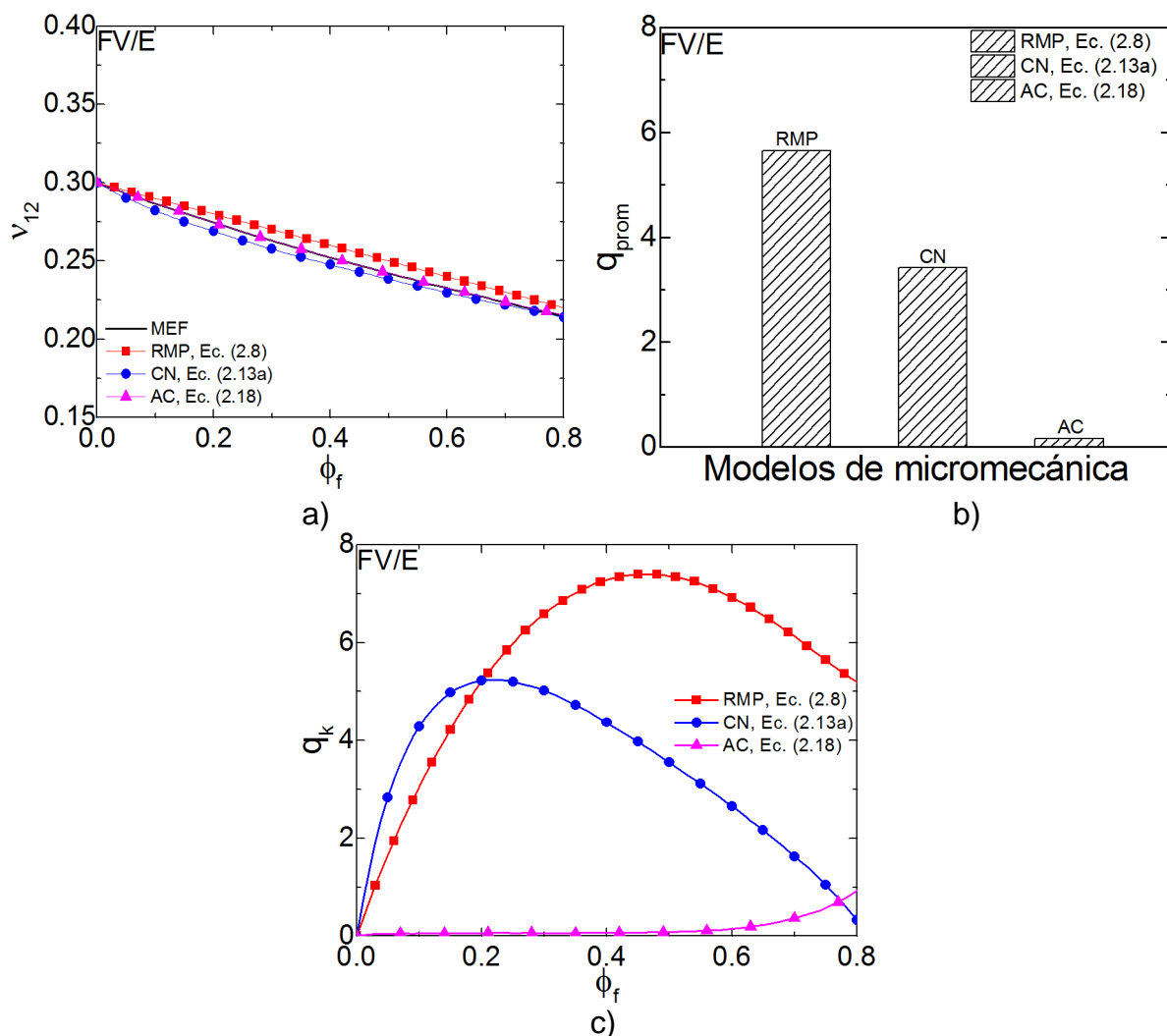


Fig. 5.4. Comparación de los MM contra MEF para FV/E. a) Predicción de  $v_{12}$ , b) cuantificación del error global promedio, c) distribución del error puntual como función de  $\phi_f$ .

Con respecto a la Fig. 5.4a se advierte que el modelo RMP presenta una sobrestimación de  $v_{12}$  en el intervalo de análisis, teniendo una diferencia máxima de  $7.9 \times 10^{-3}$  en  $\phi_f = 45\%$ . Paralelamente, el modelo CN presenta una subestimación de  $v_{12}$  en el intervalo de análisis, siendo la máxima de  $5.6 \times 10^{-3}$  en  $\phi_f = 0.22$ , mientras que el modelo AC presenta resultados, en general, más satisfactorios. Por otro lado, en la Fig. 5.4b se muestra el valor de  $q_{prom}$  determinado para cada uno de los MM examinados, en la que se puede notar que similarmente a la Fig. 5.3b, es el modelo AC el de menor magnitud con  $q_{prom} = 0.16$ . Asimismo, son los modelos RMP y CN los que presentan una magnitud de  $q_{prom} > 1$ , siendo de 5.6 y 3.4, respectivamente.

Los valores de  $q_k$  en función de  $\phi_f$  para los tres modelos se presenta en la Fig. 5.4c y se puede observar que las magnitudes de  $q_k$  del modelo RMP son menores que las del modelo CN en  $\phi_f < 20\%$  y en  $\phi_f > 20\%$ , la magnitud de  $q_k$  aumenta para el modelo RMP hasta un máximo de 7.4 en  $\phi_f = 50\%$ , mientras que para el modelo CN disminuye hasta un mínimo de 0.32 en  $\phi_f = 80\%$ . No obstante, las magnitudes de  $q_k$  del modelo AC se mantienen con magnitudes menores a la unidad y a su vez menores a las de los modelos RMP y CN.

De las Figs. 5.3a y 5.4a se puede observar que  $\nu_{12}$  no es linealmente proporcional a  $\phi_f$  como lo establece el modelo RMP y por esta razón, entre otras, es que para las dos combinaciones materiales analizadas (FC/E y FV/E) presenta las mayores magnitudes de  $q_k$ . No obstante, el modelo AC al tener hipótesis un poco más reales, adquiere un mayor grado de precisión con respecto a los resultados obtenidos por MEF.

## 5.2. Propiedades elásticas transversales

### 5.2.1. Módulo elástico transversal

Todos los MM presentados en la sección 2.2 para la predicción de  $E_2$  se examinaron y se compararon contra los resultados del MEF presentado en la sección 3.5 y los resultados se muestran en la Fig. 5.5.

En las Figs. 5.5a y 5.5b se presenta la predicción de  $E_2$  a partir de MEF y MM, siendo la Fig. 5.5a aquellos MM en los que se determinó un valor de  $q_{prom} \leq 2.5$  y en la Fig. 5.5b el resto de los MM examinados. Referente a la Fig. 5.5a se observa que los MM presentan valores por encima y por debajo de la curva de MEF para diversas  $\phi_f$ . No obstante, en comparación con la Fig. 5.5b se advierte que los MM presentados en la Fig. 5.5a presentan una mejor aproximación con respecto a la curva del MEF.

Con respecto a la Fig. 5.5c se aprecia que el modelo más sencillo RMS presenta una magnitud de  $q_{prom} = 10$ , esto es, es el MM en el que se determinaron las mayores diferencias de resultados con respecto a los obtenidos mediante MEF. Asimismo, un modelo muy utilizado, como lo es HT presenta una magnitud  $q_{prom} = 4$ , lo cual advierte que sus resultados varían considerablemente con respecto a los resultados de MEF.

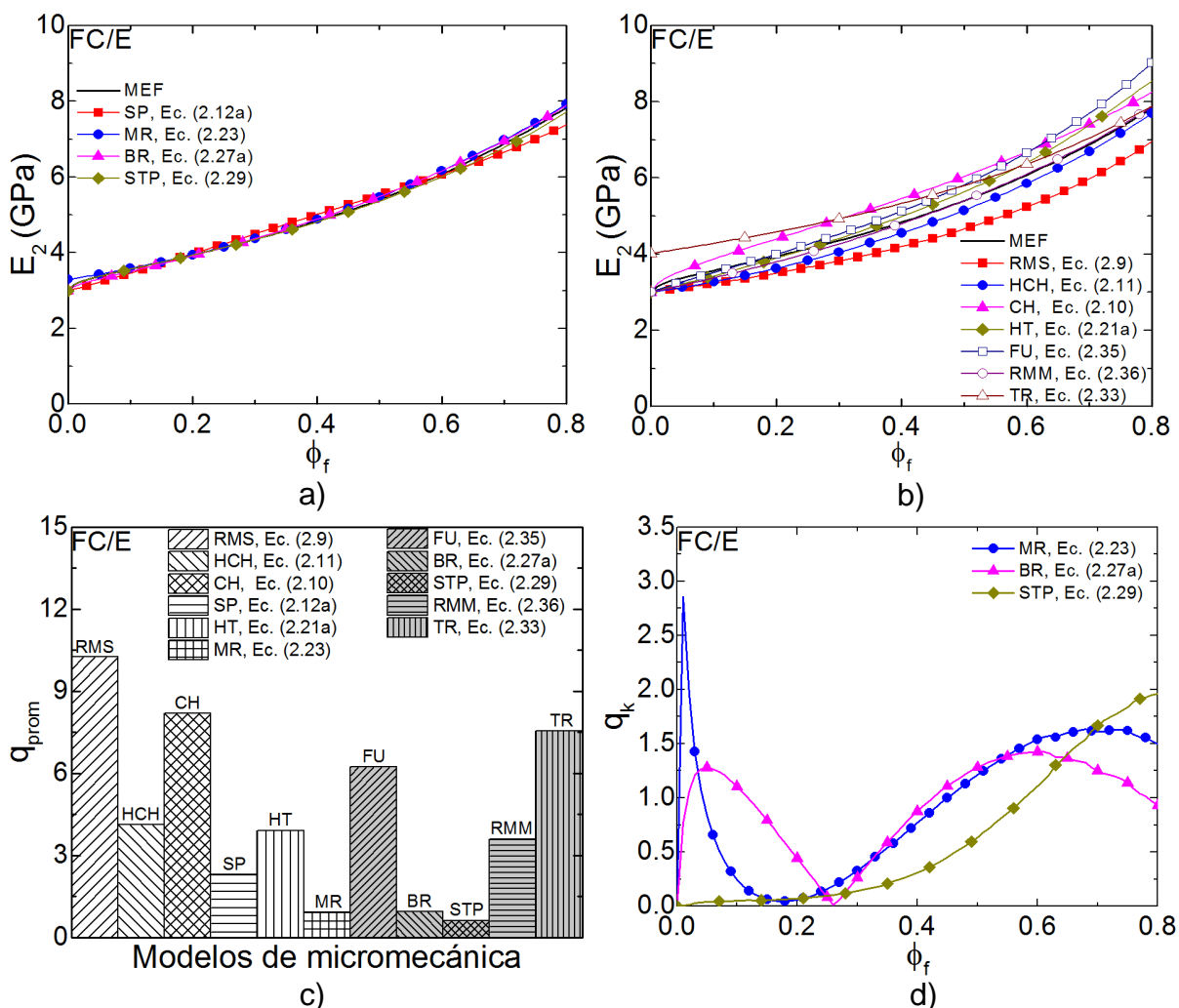


Fig. 5.5. Comparación de los MM contra MEF para FC/E. a) Predicción de  $E_2$  con los MM con  $q_{prom} \leq 2.5$ , b) predicción de  $E_2$  con los MM con  $q_{prom} > 2.5$ , c) cuantificación del error global promedio, d) distribución del error puntual como función de  $\phi_f$  de los MM seleccionados.

De igual forma, se aprecia que MM en los que se considera que el esfuerzo normal  $\sigma_y$  cuando el MCU se tensiona en la dirección 2 no es uniforme (ver Fig. 4.4b) como lo son BR, MR y STP presentan mejores aproximaciones de resultados. Estos últimos MM presentan magnitudes de  $q_{prom} < 1$ , siendo el modelo STP el de menor magnitud con  $q_{prom} = 0.6$ .

A partir de la Fig. 5.5d se observa que los modelos MR y BR, aunque tienen magnitudes de  $q_{prom}$  similares (0.9), las diferencias en función de  $\phi_f$  no lo son. Por ejemplo, en  $\phi_f < 25\%$  se determinaron valores máximos de  $q_k = 2.85$  en  $\phi_f = 1\%$  para el

modelo MR y de  $q_k=1.3$  en  $\phi_f=5\%$  para el modelo BR. Sin embargo, el modelo MR se mantiene con magnitudes de  $q_k$  menores que las del modelo BR. Después, en un intervalo de  $25\% \leq \phi_f \leq 55\%$  las magnitudes de  $q_k$  son similares, pero en  $\phi_f > 55\%$  el modelo BR alcanza un máximo de  $q_k=1.42$  en  $\phi_f=60\%$  para después disminuir a un valor de  $q_k=0.92$  en  $\phi_f=80\%$ , mientras que el modelo MR alcanza un máximo de  $q_k=1.6$  en  $\phi_f=70\%$  y disminuye a un valor de  $q_k=1.5$  en  $\phi_f=80\%$ . No obstante, el modelo STP presenta magnitudes  $q_k < 1$  en  $\phi_f < 55\%$ , posteriormente continua en aumento hasta un máximo de  $q_k=2$  en  $\phi_f=80\%$ . Tsai y Hahn (1980) explican que su MM (STP) pierde precisión en la predicción de  $E_2$  en  $\phi_f > 60\%$ , sin embargo, argumentan que esto puede no ser de importancia ya que un MCU habitual difícilmente presenta un adecuado comportamiento mecánico en dichas  $\phi_f$ .

Los resultados de la examinación de los MM para la predicción de  $E_2$  considerando el compuesto FV/E se presentan en la 5.6.

En la Fig. 5.6a se presentan los MM cuyos valores de  $q_{prom}$  son menores a 4, mientras que en la Fig. 5.6b se presenta el resto de los MM examinados y presentados en la sección 2.2. Con respecto a la Fig. 5.6a se puede observar que el modelo TR sobrestima la magnitud de  $E_2$  en  $\phi_f < 45\%$  teniendo una diferencia máxima de 0.96 GPa en  $\phi_f < 1\%$ , mientras que en  $\phi_f > 45\%$  subestima la magnitud de  $E_2$  teniendo como mínimo una diferencia de 4.21 GPa en  $\phi_f=80\%$ , ambas diferencias con respecto a los resultados del MEF. Referente a dicho modelo, Ekvall (1965) comenta que su MM tiende a subestimar  $E_2$  debido a la utilización de un módulo elástico efectivo de la matriz. Asimismo, se observa que el modelo RMM tiene una mejor aproximación a los resultados de MEF debido a que en su modificación, considera que el esfuerzo normal  $\sigma_y$  cuando el MCU es tensionado en la dirección 2 no es uniforme. De esta manera, el modelo RMM tiene una máxima diferencia de 0.56 GPa en  $\phi_f=61\%$ , con respecto a los resultados de MEF. Conjuntamente, en la Fig. 5.6b se observa que el modelo RMS presenta una subestimación de  $E_2$  en todo el intervalo de análisis, siendo una máxima diferencia de 7.8 GPa en  $\phi_f=80\%$  con respecto a los resultados de MEF. Esto último, si se compara con la máxima diferencia del modelo RMM se advierte que debido a la

modificación a las hipótesis del MM original (RMS) se logra disminuir la diferencia 14 veces, aproximadamente. Asimismo, se observa que modelos de uso habitual como lo es HT, produce una diferencia exponencial en la predicción de  $E_2$ , alcanzando una máxima diferencia de  $1.65 \times 10^{10}$  en  $\phi_f = 80\%$  con respecto a los resultados de MEF.

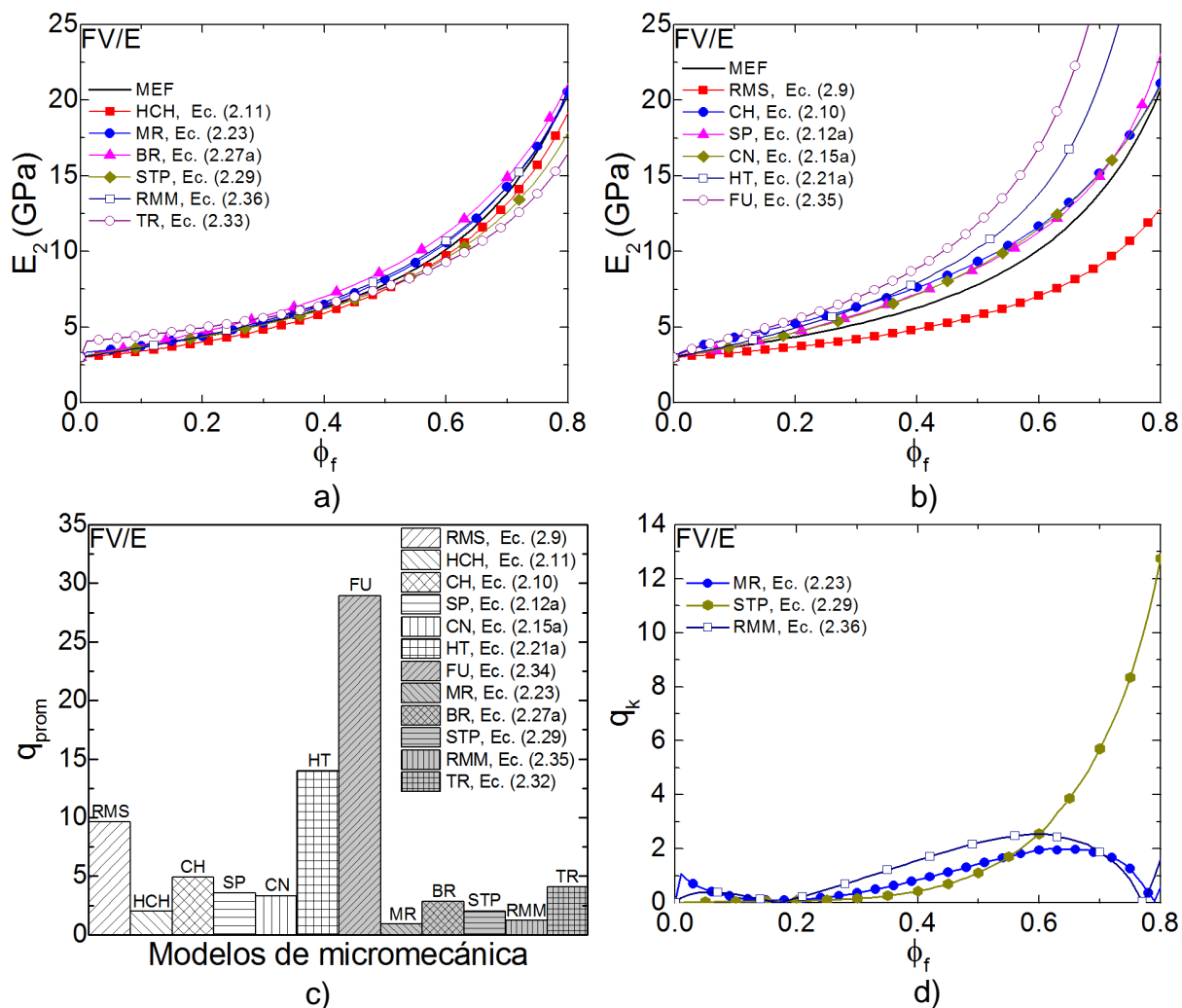


Fig. 5.6. Comparación de los MM contra MEF para FV/E. a) Predicción de  $E_2$  con los MM con  $q_{prom} \leq 4$ , b) predicción de  $E_2$  con los MM con  $q_{prom} > 4$ , c) cuantificación del error global promedio, d) distribución del error puntual como función de  $\phi_f$  de los MM seleccionados.

A partir de la Fig. 5.6c se puede observar que son los modelos FU y HT los que mayor magnitud de  $q_{prom}$  presentan, siendo éstas de 29 y 14, respectivamente. Esto último se puede ver en la Fig. 5.6b donde la sobrestimación de  $E_2$  de ambos modelos aumenta exponencialmente. Asimismo, se puede observar que de los MM presentados

en la Fig. 5.6a, sólo el modelo MR presenta una magnitud de  $q_{prom} < 1$ , siguiendo con los modelos RMM y STP con  $q_{prom} = 1.2$  y  $q_{prom} = 2$ , respectivamente.

Los valores de  $q_k$  en función de  $\phi_f$  de los modelos MR, RMM y STP se presentan en la Fig. 5.7d, en la que se puede observar que el modelo MR mantiene magnitudes de  $q_k < 1$  hasta  $\phi_f = 45\%$ , posteriormente, alcanza un máximo valor de  $q_k = 2$  en  $\phi_f = 65\%$ . Asimismo, el modelo RMM presenta valores de  $q_k$  mayores que los otros dos modelos presentados, alcanzando una máxima magnitud de  $q_k = 2.5$  en  $\phi_f = 60\%$  y posteriormente mantiene valores similares a los del modelo RMM. Sin embargo, el modelo STP, aunque se determinó una magnitud  $q_{prom} = 2$ , mantiene valores de  $q_k$  menores que los del modelo con menor magnitud  $q_{prom}$  (MR) hasta  $\phi_f = 55\%$ , posterior a dicha  $\phi_f$ , la magnitud de  $q_k$  va en aumento hasta alcanzar un máximo de  $q_k = 12.7$  en  $\phi_f = 80\%$ . No obstante, notar que MCU con contenidos altos de fibra ( $\phi_f > 60\%$ ) no son utilizados habitualmente en la industria debido a que presentan problemas de manufactura.

### 5.2.2. Razón de Poisson transversal

La examinación de los MM presentados en la sección 2.2 que predicen  $\nu_{23}$  es presentada en la Fig. 5.7, en la que se puede observar que es una CEI que no cuenta con múltiples MM para su predicción, debido a la complejidad que existe en la medición de dicha propiedad mediante pruebas.

A partir de la Fig. 5.7a se observa que el modelo MR tiene una tendencia de subestimar la magnitud de  $\nu_{23}$ , por ejemplo, la máxima diferencia con respecto a los resultados de MEF es de  $3.52 \times 10^{-2}$  en  $\phi_f = 1\%$ , mientras que la mínima diferencia es de  $7.16 \times 10^{-4}$  en  $\phi_f = 18\%$ . Asimismo, el modelo FY subestima la magnitud de  $\nu_{23}$ , teniendo una diferencia máxima de  $1.01 \times 10^{-2}$  en  $\phi_f = 45\%$ , mientras que la mínima diferencia se calculó con una magnitud de  $1.84 \times 10^{-4}$  en  $\phi_f = 7\%$ .

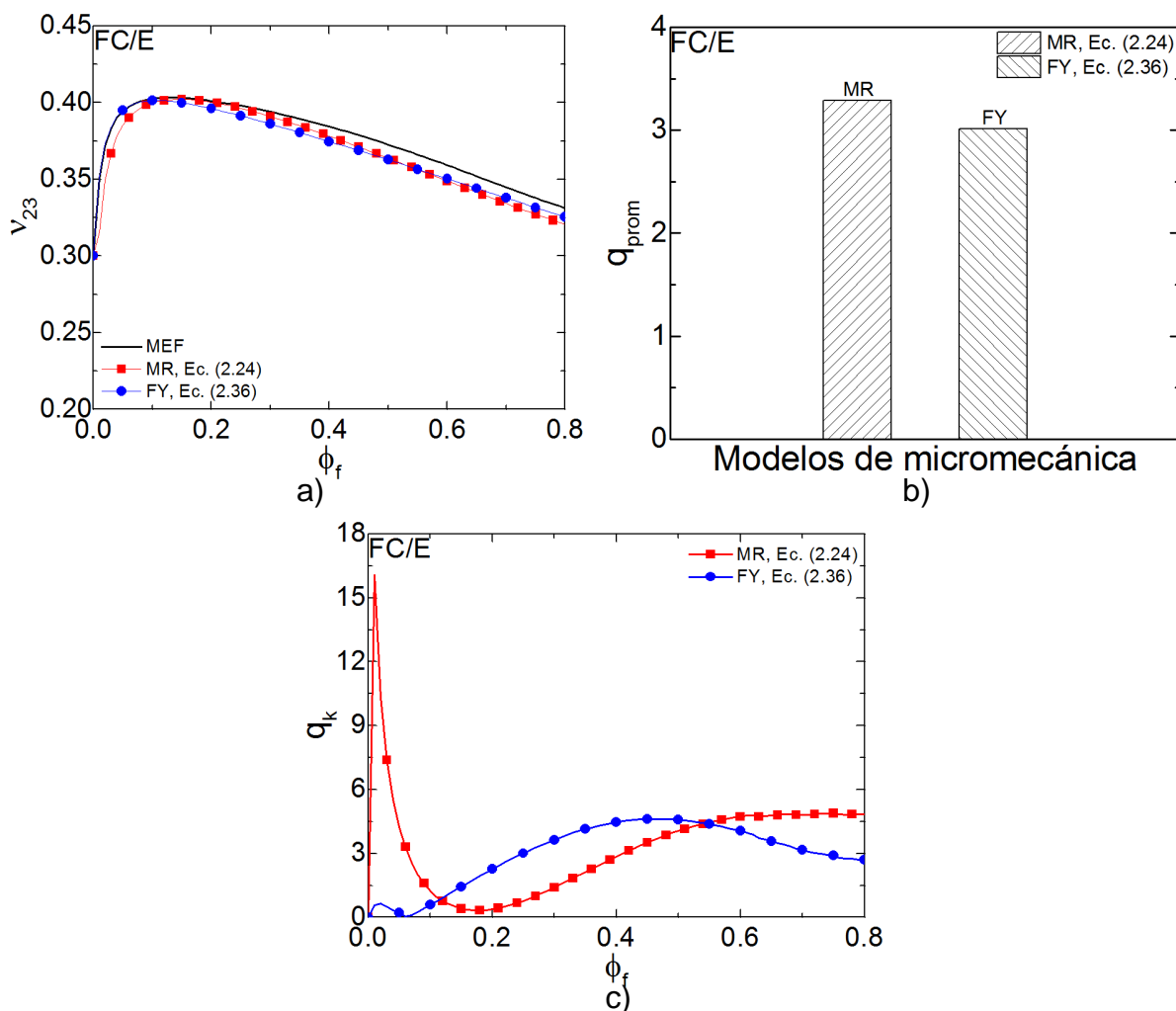


Fig. 5.7. Comparación de los MM contra MEF para FC/E. a) Predicción de  $v_{23}$ , b) cuantificación del error global promedio, c) distribución del error puntual como función de  $\phi_f$ .

Concerniente a la Fig. 5.7b, se aprecia que ambos modelos tienen una magnitud  $q_{prom} > 1$ , siendo  $q_{prom} = 3.3$  para el modelo MR y  $q_{prom} = 3$  para el modelo FY. Al ser magnitudes mayores a la unidad y de acuerdo con el criterio de Hyndman y Koehler (2006), dichos modelos de predicción carecen de precisión con respecto a los resultados de referencia (MEF). Así bien, en la Fig. 5.7c se presentan las magnitudes  $q_k$  en función de  $\phi_f$  y se observa que el modelo FY en  $\phi_f > 10$ , tiene magnitudes de  $q_k$  mayores que el modelo MR, siendo el máximo valor de  $q_k = 4.6$  en  $\phi_f = 45\%$ , continúa en disminución hasta coincidir con la curva del FY cuando  $q_k = 4.43$  en  $\phi_f = 55\%$  y hasta alcanzar un mínimo valor de  $q_k = 2.7$  en  $\phi_f = 80\%$ . Por otro lado, el modelo MR, en



$\phi_f < 10\%$  presenta magnitudes  $q_k$  mayores que las del modelo FY, siendo la magnitud más grande de  $q_k=16$  en  $\phi_f=1\%$ . Posteriormente, se calcularon valores menores de  $q_k$  para el modelo MR desde  $\phi_f > 10\%$  hasta coincidir con la curva de FY con una magnitud de  $q_k=4.43$  en  $\phi_f=55\%$  y continua en aumento hasta alcanzar una máxima magnitud de  $q_k=4.85$  en  $\phi_f=80\%$ . Asimismo, se observa que ambas curvas tienen dos puntos de intersección, el primero se da en  $q_k=0.76$  con  $\phi_f=12\%$  y el segundo se da en  $q_k=4.39$  con  $\phi_f=55\%$

En la Fig. 5.8 se muestran los resultados derivados de la examinación de los MM presentados en la sección 2.2, para la combinación FV/E.

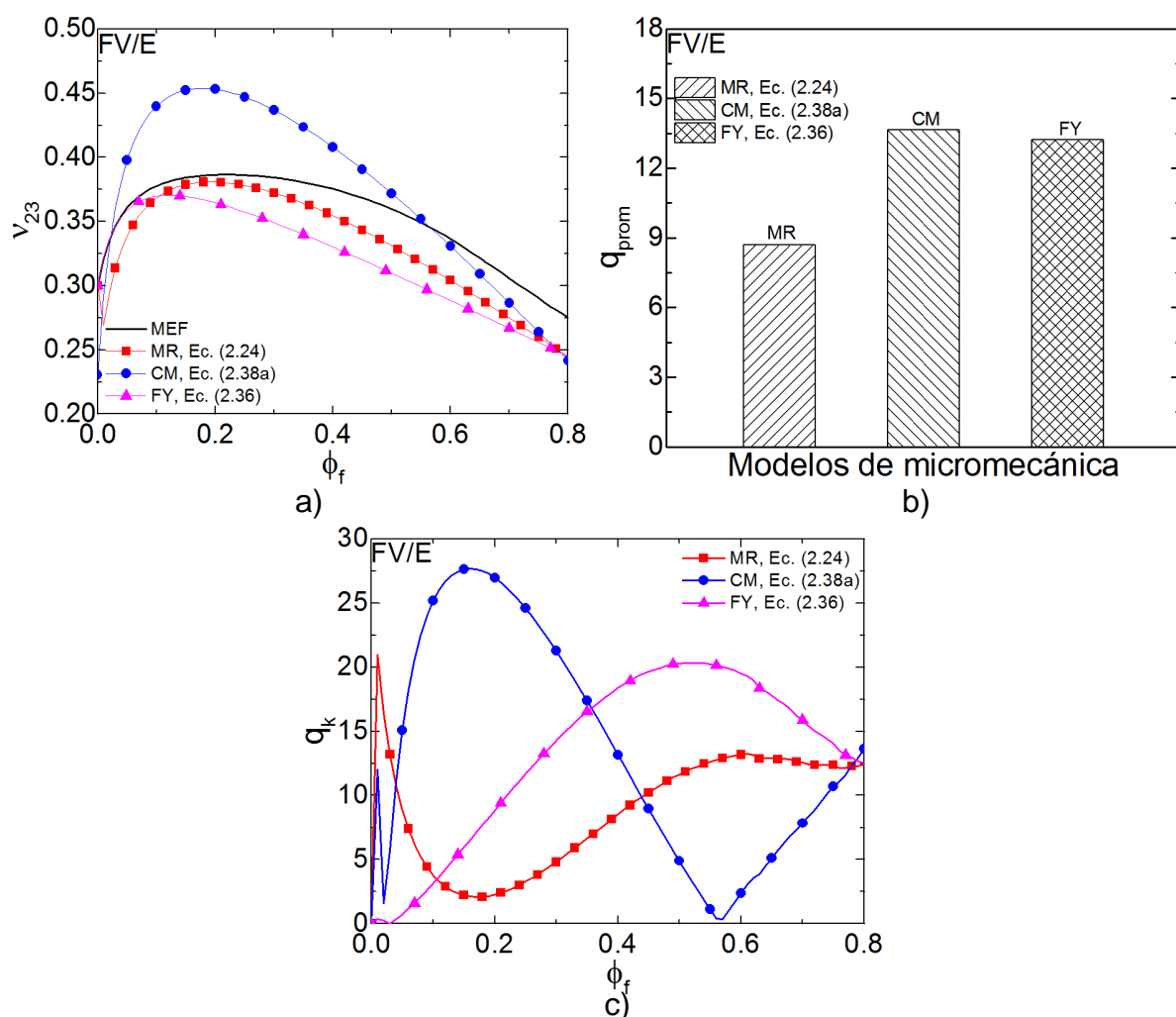


Fig. 5.8. Comparación de los MM contra MEF para FV/E. a) Predicción de  $v_{23}$ , b) cuantificación del error global promedio, c) distribución del error puntual como función de  $\phi_f$ .

A partir de la Fig. 5.8a se aprecia que, similarmente al compuesto FC/E, los modelos MR y FY tienden a subestimar la magnitud de  $\nu_{23}$ ; de manera que el modelo MR tiene una diferencia mínima de  $5.15 \times 10^{-3}$  en  $\phi_f=17\%$  y una diferencia máxima de  $5.18 \times 10^{-2}$  en  $\phi_f=1\%$ , mientras que el modelo FY tiene una diferencia mínima de  $2.28 \times 10^{-5}$  en  $\phi_f=3\%$  y una diferencia máxima de  $5.02 \times 10^{-2}$  en  $\phi_f=53\%$ . Asimismo, el modelo CM, el cual únicamente está formulado para materiales constitutivos isotrópicos, calcula magnitudes de  $\nu_{23}$  de hasta 0.45 en  $\phi_f=15\%$ , lo cual resulta en un valor inusual para un MCU de acuerdo con Carlsson et al. (2014). Consecuentemente, el modelo CM en  $\phi_f>60\%$  calcula valores menores a los de referencia (MEF), siendo la diferencia máxima de  $3.37 \times 10^{-3}$  en  $\phi_f=80\%$ .

Referente a la Fig. 5.8b, se observa que para los tres modelos presentado se calculó una magnitud de  $q_{prom}>1$ , siendo el modelo CM el resultado mayor con una magnitud de  $q_{prom}=13.7$ , seguido por los modelos FY y MR con magnitudes de  $q_{prom}=13.2$  y  $q_{prom}=8.7$ , respectivamente. Notar que aunque el modelo CM presentó diferencias mucho más grandes que el modelo FY, ambos tienen una magnitud de  $q_{prom}$  muy similar, esto se debe a que en  $\phi_f>35\%$  las diferencias del modelo CM con respecto a la curva MEF son menores que las diferencias calculadas para el modelo FY. Esto último también puede confirmarse con ayuda de la Fig. 5.8c, en la que también se observa que en  $\phi_f>45$ , el modelo CM predice la magnitud de  $\nu_{23}$  con una mayor precisión que los modelos MR y FY.

Asimismo, se aprecia en la Fig. 5.8c que el modelo MR en  $\phi_f>10$  predice la magnitud de  $\nu_{23}$  con mayor precisión que el modelo FY, teniendo un valor mínimo de  $q_k=2.1$  en  $\phi_f=17\%$  y un máximo valor de  $q_k=13.2$  en  $\phi_f=60\%$ .

### 5.3. Módulo cortante en el plano

El proceso de examinación de los MM para la predicción de  $G_{12}$  presentados en la sección 2.2 se representa en las Figs. 5.9. Debido a que se tuvo una cantidad de nueve MM, se optó por presentar sus curvas de resultados en dos figuras por separado, tomando como criterio de separación la magnitud de  $q_{prom}$  calculada para cada uno de

los MM. Esto es, en la Fig. 5.9a se presentan gráficamente los resultados de los MM en los que se determinó una magnitud  $q_{prom} < 3$  y en la Fig. 5.9b el resto de los MM.

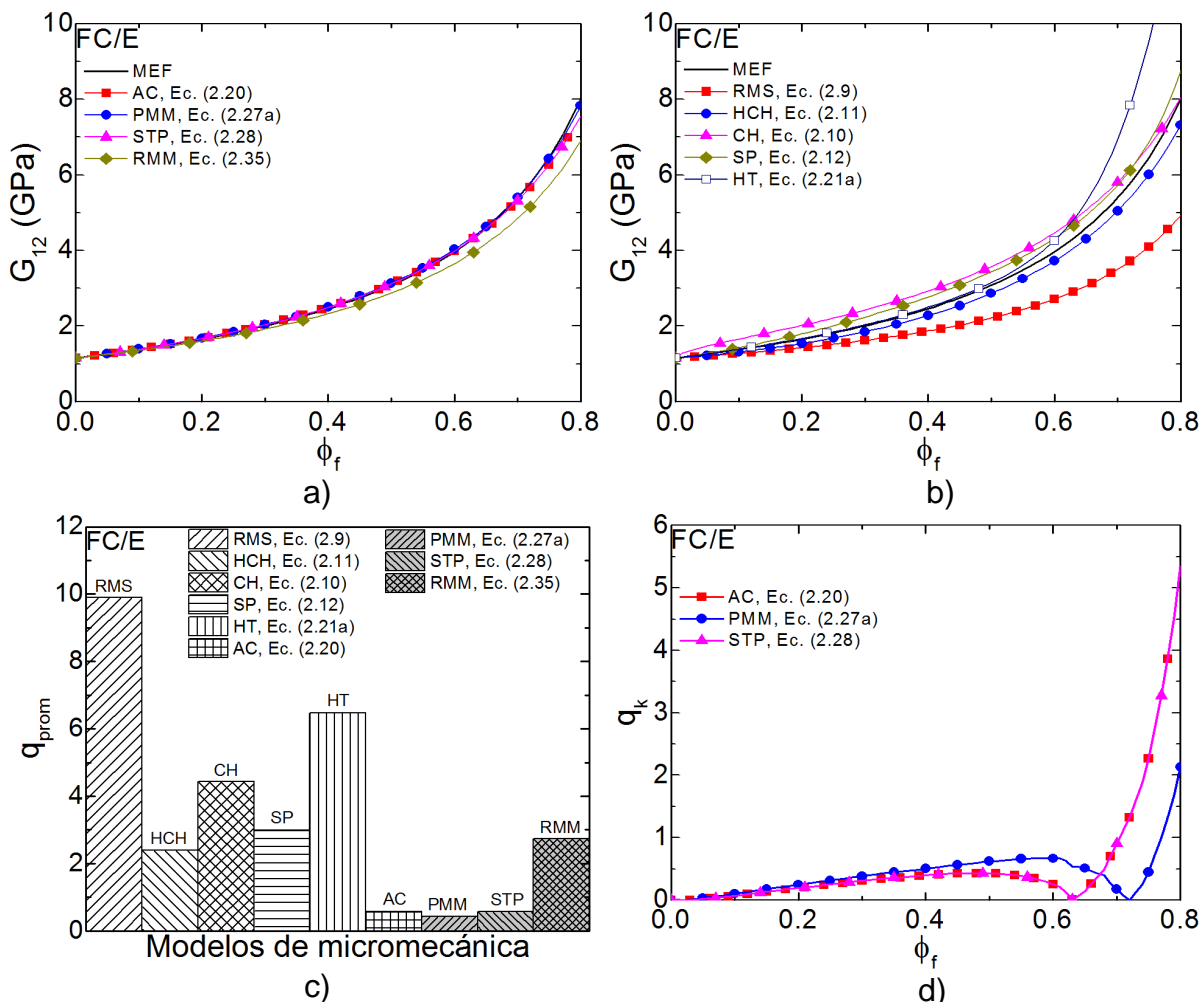


Fig. 5.9. Comparación de los MM contra MEF para FC/E. a) Predicción de  $G_{12}$  con los MM con  $q_{prom} \leq 3$ , b) predicción de  $G_{12}$  con los MM con  $q_{prom} > 3$ , c) cuantificación del error global promedio, d) distribución del error puntual como función de  $\phi_f$  de los MM seleccionados.

Respecto a la Fig. 5.9a se logra apreciar que el modelo RMM subestima considerablemente la magnitud de  $G_{12}$  en  $\phi_f > 35\%$ , alcanzando una diferencia máxima de 1.11 GPa en  $\phi_f = 80\%$ . Por otro lado, los modelos AC, PMM y STP determinan magnitudes de  $G_{12}$  satisfactorias con respecto de los resultados obtenidos por el MEF presentado en la sección 3.6, teniendo diferencias máximas de 0.45 GPa en  $\phi_f = 80\%$ , 0.18 GPa en  $\phi_f = 80\%$  y 0.45 GPa en  $\phi_f = 80\%$ , respectivamente. Concerniente a la Fig. 5.9b se observa que el modelo RMS subestima la magnitud de  $G_{12}$  para cualquier  $\phi_f$ ,

teniendo una diferencia máxima de 3.1 GPa en  $\phi_f=80\%$ , lo cual es también mencionado por Jones (1999). Asimismo, se observa que el modelo HT, al igual que en las Figs. 5.5b y 5.6b, eleva su grado de imprecisión en  $\phi_f>60\%$  (lo cual coincide con lo reportado por Hewitt y Malherbe (1970)), alcanzando una diferencia máxima, para el caso de este compuesto (FC/E), de 5.3 GPa en  $\phi_f=80\%$ . Asimismo, se observa que son los modelos de HCH y SP (únicamente de los MM presentados en la Fig. 5.9b) los que predicen magnitudes de  $G_{12}$  con mayor aproximación a los resultados de MEF, teniendo diferencias máximas de 0.7 GPa y 0.75 GPa, respectivamente.

Concerniente a la Fig. 5.9c se observa que la mayor magnitud  $q_{prom}$  calculada fue la del modelo RMS, siendo esta de  $q_{prom}=9.9$ , mientras que son los modelos AC, STP y PMM en los que se determinó una magnitud  $q_{prom}<1$ , siendo estas de  $q_{prom}=0.58$ ,  $q_{prom}=0.58$  y  $q_{prom}=0.43$ , respectivamente. Esto último, y de acuerdo con el criterio de Hyndman y Koehler (2006), indica que los modelos AC, STP y PMM tienen un buen grado de precisión en la predicción de  $G_{12}$ . Notar que, aunque los modelos AC y STP tienen una matemática diferente, ambos modelos presentan una magnitud de  $q_{prom}$  similar.

En relación a la Fig. 5.9d se aprecia que los tres modelos (AC, STP y PMM) presentan magnitudes de  $q_k$  muy similares en  $\phi_f<20\%$ , no obstante, las magnitudes de  $q_k$  en el modelo PMM continúan en aumento hasta alcanzar un valor de  $q_k=0.67$  en  $\phi_f=58\%$ , para después coincidir con las curvas de AC y STP en un valor de  $q_k=0.4$  en  $\phi_f=67\%$ . Asimismo, se observa que los modelos AC y STP, tienen el mismo comportamiento, de manera que en  $\phi_f<67\%$  (punto de intersección con la curva de PMM), se calcularon magnitudes de  $q_k$  inferiores a las del modelo PMM, siendo la más alta de  $q_k=0.43$  en  $\phi_f=50\%$ . Posterior al punto de intersección de las tres curvas ( $\phi_f=67\%$ ), las magnitudes determinadas de  $q_k$  de los modelos AC y STP alcanzan un máximo de  $q_k=5.3$  en  $\phi_f=80\%$ , mientras que, el modelo PMM alcanza un máximo de  $q_k=2.1$  en  $\phi_f=80\%$ . Sin embargo, no se debe olvidar que las  $\phi_f>60$  son meramente teóricos ya que en un MCU habitual, este contenido de fibras presentan bajos desempeños mecánicos debido al complicado proceso de manufactura (Carlsson et al., 2014).

El análisis de examinación de los MM que se realizó en el compuesto FV/E se presenta en la Fig. 5.10.

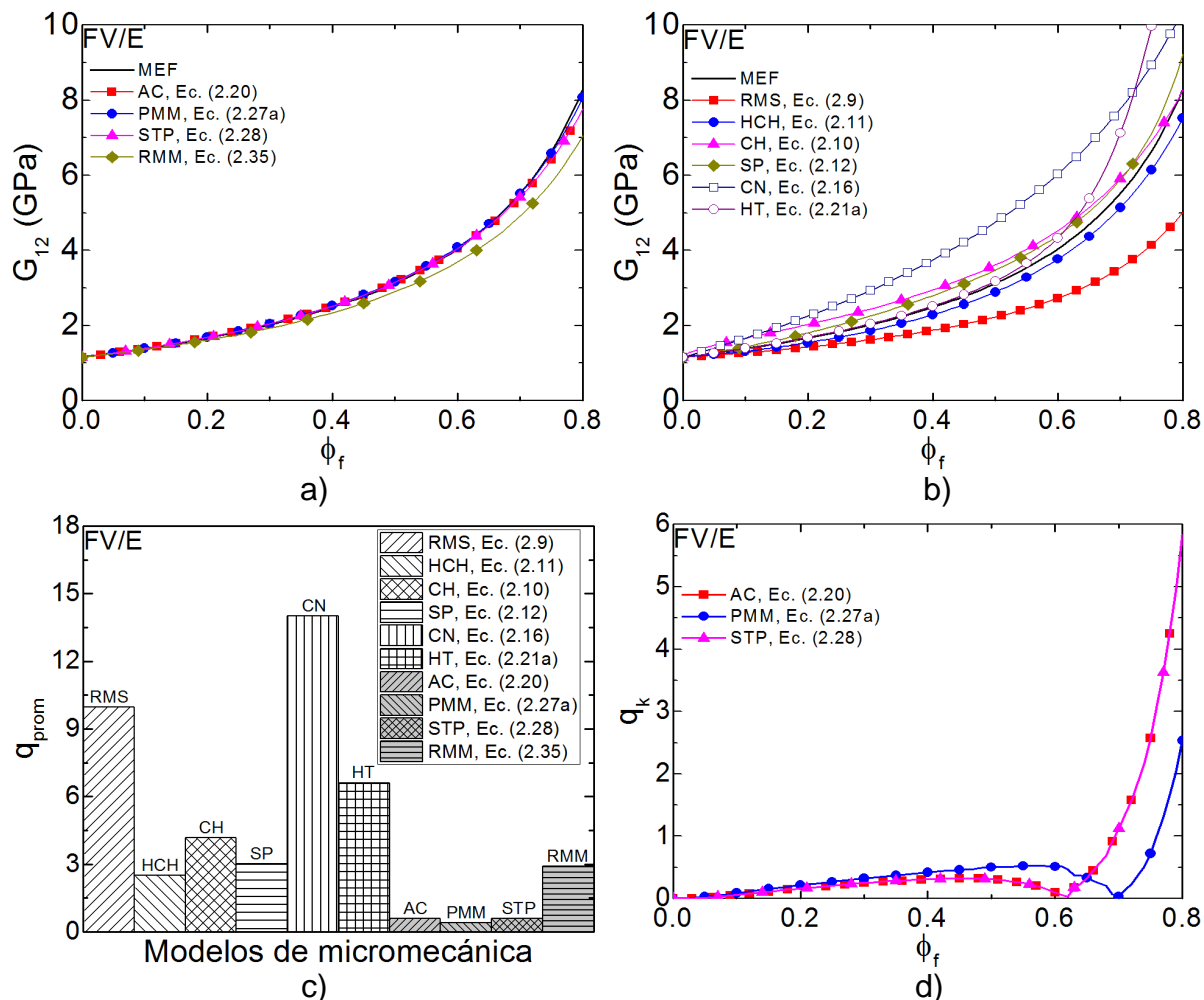


Fig. 5.10. Comparación de los MM contra MEF para FV/E. a) Predicción de  $G_{12}$  con los MM con  $q_{prom} \leq 3$ , b) predicción de  $G_{12}$  con los MM con  $q_{prom} > 3$ , c) cuantificación del error global promedio, d) distribución del error puntual como función de  $\phi_f$  de los MM seleccionados.

Debido a que la rigidez longitudinal de la fibra no es aprovechada en el comportamiento mecánico del MCU cuando este es sometido a la acción de un esfuerzo cortante en el plano, las curvas de  $G_{12}$  en función de  $\phi_f$  son muy similares para los dos compuestos considerados FC/E y FV/E (ver Fig. 4.7). Por esta razón, los resultados obtenidos de la examinación de los MM para la predicción de  $G_{12}$  considerando el compuesto FV/E son muy similares a los obtenidos para el compuesto FC/E. Esto último, puede observarse si se comparan las Figs. 5.9 y 5.10, en las que se podrá notar que las

magnitudes y el comportamiento de las curvas son muy similares, a excepción, del modelo CN, el cual está formulado para un compuesto en los que sus materiales constitutivos presentan un comportamiento isotrópico. Sin embargo, en la Fig. 5.10b se observa que dicho modelo (CN) sobrestima la magnitud de  $G_{12}$  para cualquier  $\phi_f$ , teniendo una diferencia máxima de 2.3 GPa en  $\phi_f=80\%$ . Derivado de esta sobrestimación, el valor calculado de  $q_{prom}$  para este modelo, resultó ser el más alto con una magnitud de  $q_{prom}=14$ , lo cual indica que es el MM con mayor imprecisión para la predicción de  $G_{12}$  en este análisis.

## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En el presente trabajo se examinaron los modelos de micromecánica (MM) existentes en la literatura y se propusieron un conjunto de ecuaciones para la predicción de las cinco constantes elásticas independientes (CEI) en materiales compuestos reforzados con fibras unidireccionales (MCU). El conjunto de ecuaciones de MM propuestas se determinó a partir de la comparación de las CEI determinadas por tres modelos de elemento finito (MEF) propios. Para el análisis desarrollado en este trabajo se seleccionaron dos combinaciones materiales, ambas teniendo como matriz una resina epóxica y siendo el refuerzo fibras de carbono (FC/E) y fibras de vidrio (FV/E).

En los tres MEF desarrollados para obtener las cinco CEI del MCU idealizado se utilizaron un volumen representativo (VR) con geometría en paralelepípedo en el que se consideró interfaz perfecta y fibras perfectamente distribuidas en un arreglo hexagonal. Asimismo, las CEI obtenidas a partir de los MEF fueron validadas contra una variedad de resultados experimentales publicados, encontrando una aproximación muy razonable, en especial considerando que las CEI independientes de la fibra y la matriz difieren de las mismas en los resultados experimentales.

En el apéndice E se muestra un resumen con los MM que presentaron la mejor aproximación a los resultados obtenidos por MEF de acuerdo a la metodología descrita en el capítulo 3. Para el caso del módulo elástico longitudinal ( $E_1$ ), la dominancia que tiene la rigidez de la fibra sobre la matriz en el comportamiento mecánico del MCU promueve que el aumento de la rigidez del material sea lineal con respecto a la fracción de fibras ( $\phi_f$ ). Aunque la mayoría de los MM examinados guardan esta relación, el MM “auto-consistente” de Hill (1965), Ec. (2.17), es el que mejor se ajustó al MEF ya que incluye un término en el que intervienen la contracción transversal a las fibras del MCU y las deformaciones por cortante. Alternativamente, la “regla de mezclas en paralelo” (Ec. (2.8)) presenta también un error muy pequeño respecto al MEF correspondiente (<0.01%) y su implementación es más sencilla.

Para el caso de la razón de Poisson en el plano ( $\nu_{12}$ ), la rigidez transversal de los materiales constitutivos tiene un papel importante en las deformaciones transversales a la fibra en el MCU. El MM auto-consistente de Hill (1965), Ec. (2.18), presentó el

mejor ajuste al MEF ya que incluye un término en el que interviene la interacción de la rigidez transversal de los materiales constitutivos.

Para el caso del módulo elástico transversal ( $E_2$ ), a pesar de ser una propiedad dominada por la matriz, la rigidez transversal de la fibra tiene un papel de importancia para  $\phi_f > 50\%$ . El análisis de esfuerzos en este modelo mostró gradientes de esfuerzos significativos en la matriz y gradientes menos significativos en la fibra. Asimismo, el análisis estadístico del error mostró que el MM de Tsai y Hahn (1980), Ec. (2.30a), presentó mejor ajuste al MEF ya que en su formulación incluye un parámetro de distribución de esfuerzos en la matriz. Análogamente el MM de Balacó de Morais (2000), Ec. (2.23), que considera regiones de distinta rigidez transversal en el VR presentó un ajuste adecuado al MEF. Para  $\phi_f \leq 60\%$  el MM de Tsai y Hahn (1980) presentó un mejor ajuste al MEF ya que sus errores porcentuales con respecto al MEF son  $< 5\%$ , mientras que para  $\phi_f > 60\%$  el MM de Balacó de Morais presenta un mejor ajuste al MEF con errores porcentuales con respecto al MEF  $< 5\%$ .

Para el caso de la razón de Poisson transversal ( $\nu_{23}$ ) se observó a partir del análisis de esfuerzos que la contribución de la rigidez longitudinal de la fibra tiene una participación relevante en la deformación fuera del plano del MCU. Asimismo, el análisis de error mostró que el MM de Balacó de Morais (2000), Ec. (2.24), es el que presenta un mejor ajuste al MEF de manera global. Dicho modelo, presenta diferencias porcentuales con respecto al MEF  $< 5\%$  para  $\phi_f \leq 50\%$ , mientras que para  $\phi_f > 50\%$  las diferencias porcentuales van en un aumento hasta alcanzar un máximo de  $10\%$  en  $\phi_f = 80\%$ .

Para el caso del módulo de cortante en el plano ( $G_{12}$ ) el análisis de esfuerzos mostró una fuerte dominancia de la matriz en dicha propiedad y poca participación de la rigidez de la fibra en el comportamiento del MCU. Derivado del análisis estadístico del error se concluyó que tanto el MM de Hermans (1967), Ec. (2.20), como el MM de Tsai y Hahn (1980), Ec. (2.28), presentan el mejor ajuste al MEF con diferencias despreciables. En  $\phi_f \leq 60\%$  el error porcentual, con respecto al MEF, tanto para el MM de Hermans (1967) como para el de Tsai y Hahn (1980) se mantiene siempre  $< 1\%$  mientras que para  $\phi_f > 60\%$  es el MM de Luciano y Barbero (1994) el que presenta el



menor error porcentual con respecto al MEF, siendo un valor máximo de 2% en  $\phi_f=80\%$ .

De este modo, este trabajo ha contribuido con recomendaciones concisas y acotadas sobre modelos de micromecánica existentes de mucho valor en la literatura internacional. Aún quedan muchos temas de mayor complejidad que se pueden abordar con este tipo de examinación de MM; por ejemplo, la consideración de una interfaz imperfecta en el VR, la consideración de fibras en dos direcciones y arquitecturas materiales más complejas, la consideración de tejidos como fase de refuerzo, etcétera. Sin embargo, habrá que considerar que, al retirar algunas idealizaciones, muy probablemente se perdería la representación analítica cerrada de los MM, lo cual constituye el principal atractivo del enfoque de esta tesis. Asimismo, se espera que la contribución de este trabajo tenga un alto impacto en la modelación de sistemas estructurales mucho más complejos, en los que los valores numéricos de las CEI de un MCU (valores de entrada) ya no constituyan una incógnita en el proyecto. Un ejemplo de esta aplicación se encuentra en el apéndice D, donde se demuestra que con este enfoque no es necesario desarrollar modelos específicos de elemento finito para predecir las propiedades de entrada de un modelo de mayor escala dimensional.

## APÉNDICE A

### Dimensiones del volumen representativo en un patrón de distribución hexagonal de fibras

Un hexágono regular tiene la característica de que sus aristas tienen la misma longitud y por ende sus ángulos internos entre dos aristas contiguas tienen una magnitud de  $120^\circ$ . Considerando que los centroides de las fibras coinciden con los vértices de un hexágono regular (ver Fig. 3.1a), se puede definir el patrón hexagonal de distribución de fibras. A partir de esta geometría se puede definir el VR como un rectángulo con vértices que coinciden con los de dos aristas opuestas del hexágono regular (ver Fig. 3.1b). El ancho ( $W$ ) y la altura ( $H$ ) del VR no son arbitrarias y pueden ser definidas a partir de un triángulo rectángulo inscrito dentro del rectángulo con su ángulo recto en la arista inferior del rectángulo (Fig. A1). La hipotenusa del triángulo rectángulo de magnitud  $W$  y el cateto adyacente de magnitud  $H/2$  coinciden con la bisectriz y la apotema del hexágono, respectivamente. De este modo, el ángulo formado por estas dos rectas tiene una magnitud de  $30^\circ$  y por trigonometría se puede establecer la relación,

$$\cos(30^\circ) = \frac{H}{2W} \quad (\text{A1})$$

Debido a que  $\cos(30^\circ) = \sqrt{3}/2$ , la Ec. (A1) puede reescribirse como,

$$H = \sqrt{3}W \quad (\text{A2})$$

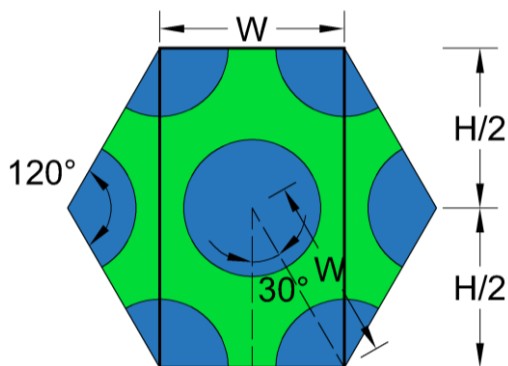


Fig. A1. Volumen representativo inscrito en el hexágono regular formado por el patrón hexagonal de distribución de las fibras.

Considerando que el VR tiene una profundidad ( $D$ ) y que éste alberga una fibra continua al centro del mismo y cuatro cuartos de fibra distribuidos en cada una de sus esquinas, el volumen total que ocupan las fibras ( $V_f$ ) es,

$$V_f = 2(\pi r_f^2)D \quad (A3)$$

donde  $r_f$  es el radio de la fibra. A su vez, el volumen total del VR ( $V_T$ ) es,

$$V_T = WHD \quad (A4)$$

Sustituyendo las Ecs. (A3) y (A4) en la Ec. (2.7) se puede determinar la fracción de volumen de fibra ( $\phi_f$ ) como,

$$\phi_f = \frac{2\pi r_f^2}{WH} \quad (A5)$$

De la Ec. (A5) se puede observar que la magnitud de  $D$  no influye en la fracción volumétrica de la fibra en el material compuesto. Sustituyendo la Ec. (A2) en la Ec. (A5) y despejando  $W$  se obtiene la Ec. (3.1a).

De acuerdo con la Ec. (3.1a)  $W$  es inversamente proporcional a  $\phi_f^{1/2}$ ;  $\phi_f$  tiene un límite cuando  $\phi_f$  se aproxima a 0, lo cual indica la ausencia de fibras en el VR (bloque de material homogéneo, la matriz). Con la Ec. (3.1a) se asegura que si el VR se reprodujera  $n$  veces dentro y fuera del plano, las fibras se distribuirían en un patrón hexagonal como en la Fig. 3.1a para cualquier  $\phi_f$  con intervalo  $0 < \phi_f < 1$ .

No obstante, el valor máximo de  $\phi_f$  no es 1, ya que existiría una interpenetración física entre las fibras. De acuerdo con la Fig. 3.3c, el ancho mínimo teórico ( $W_{min}$ ) que puede adoptar el VR se da cuando se cumple,

$$W_{min} = 2r_f + 2(0.06r_f) \quad (A6)$$

Cuando  $\phi_f \sim 0.81$ ,  $W$  toma el valor de  $W_{min}$  y las fibras se encuentran a una separación de  $0.12r_f$ , lo que equivale a que, las zonas externas de las fibras (Fig. 3.2), se encuentren en contacto entre sí en las direcciones a  $0^\circ$  ( $180^\circ$ ) y  $\pm 45^\circ$ , con respecto al eje  $x$  (fig. 3.3c). Por lo tanto, el valor máximo de  $\phi_f$  en este trabajo fue de 0.80.

## APÉNDICE B

### Formulación de elementos tetraédricos

#### B.1. Elementos de interpolación lineal

En modelos de elemento finito con geometrías regulares, los volúmenes generalmente son mallados utilizando elementos hexaédricos. Sin embargo, en ciertas ocasiones la geometría es de forma irregular y no permite la utilización de dichos elementos. En estas ocasiones se recurre a elementos tetraédricos (Fig. B1), los cuales se pueden ajustar de manera más sencilla a cualquier geometría.

La configuración básica de elementos tetraédricos es la formada por 4 nodos (Fig. B1a) y reciben el nombre de elementos tetraédricos de interpolación lineal debido a que la formulación de los polinomios de aproximación son de grado uno.

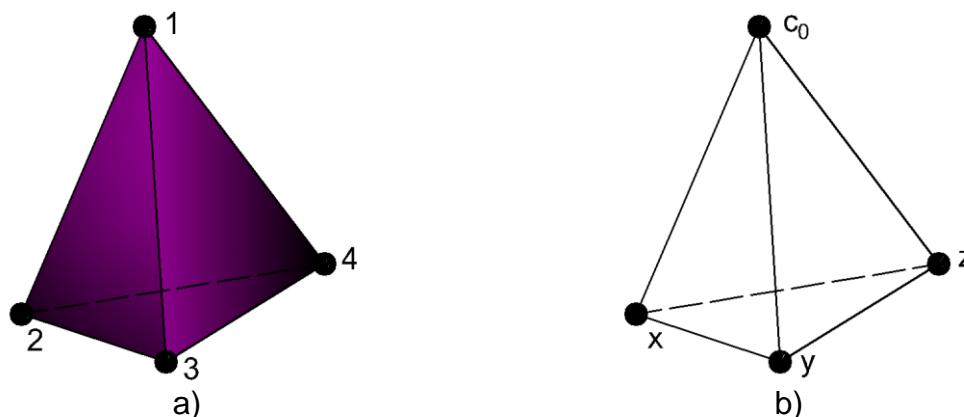


Fig. B1. Elemento tetraédrico de interpolación lineal.  
a) Numeración de nodos, b) pirámide de Pascal.

Los polinomios de interpolación para el campo de desplazamientos deben estar balanceados con los términos constantes, lineales, cuadráticos y de orden superior, de manera que una de las direcciones no contenga más términos que otra; para lograr esto, se recurre a la pirámide de Pascal (Fig. B1b) para la determinación del orden de interpolación (Cook et al., 2002).

De la Fig. B1b se observa que los polinomios de interpolación necesitan de cuatro términos, uno constante ( $c_0$ ) y tres lineales ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ), de manera que el campo de desplazamientos se expresa como,

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 X + \alpha_3 Y + \alpha_4 Z \quad (\text{B1a})$$

$$v = \alpha_5 + \alpha_6 X + \alpha_7 Y + \alpha_8 Z \quad (\text{B1b})$$

$$w = \alpha_9 + \alpha_{10} X + \alpha_{11} Y + \alpha_{12} Z \quad (\text{B1c})$$

donde  $u$ ,  $v$  y  $w$  indican el desplazamiento nodal en las direcciones  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y  $\alpha_i$  ( $i=1-12$ ) son términos constantes; estas constantes pueden ser determinadas cuando se sustituyen las coordenadas nodales del elemento en las Ecs. (B1), resultando en un sistema de ecuaciones  $12 \times 12$ . Sin embargo, el método de elemento finito recurre a la isoparametría para el cálculo de los desplazamientos nodales; por esta razón, se introduce un sistema coordenado local, el cual recibe el nombre de coordenadas de volumen (Cook et al. 2002). Dichas coordenadas se pueden determinar asumiendo que existe un punto interno  $Q$  que se desplaza dentro del elemento y, a su vez subdivide al elemento en cuatro volúmenes parciales ( $V_{Qjkl}$ ,  $j \neq k \neq l = 1-4$ ) formados por tres nodos y dicho punto (Fig. B2).

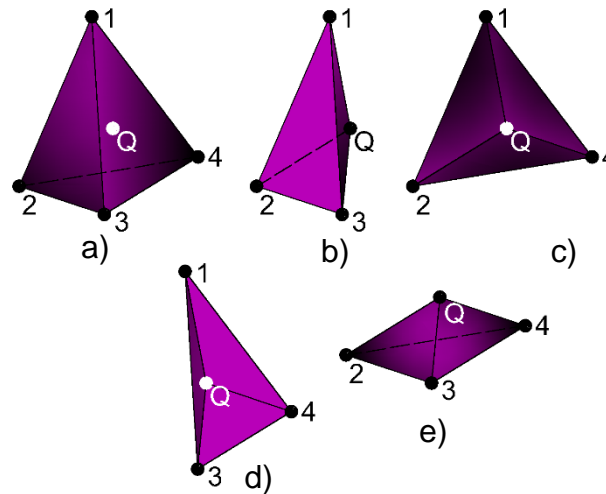


Fig. B2. Subdivisión del elemento tetraédrico en cuatro volúmenes.

a) Punto interno  $Q$ , b)  $V_{Q123}$ , c)  $V_{Q124}$ , d)  $V_{Q134}$ , e)  $V_{Q234}$ .

De este modo, las coordenadas de volumen ( $L_i$ ,  $i=1-4$ ) se expresan como la razón que existe entre el volumen parcial y el volumen total del elemento ( $V_{ijkl}$ ,  $i \neq j \neq k \neq l = 1-4$ ) como,

$$L_i = \frac{V_{Qjkl}}{V_{ijkl}} \quad (\text{B2})$$

Por ejemplo, cuando  $Q$  se encuentra sobre el nodo 1 ( $Q=1$ ),  $L_1=1$  y  $L_2=L_3=L_4=0$ . Por esta razón, las funciones de forma ( $N_i$ ,  $i=1-4$ ) se expresan como,

$$N_i = L_i \quad (\text{B3})$$

## B.2. Elementos de interpolación cuadrática

Los elementos tetraédricos de interpolación cuadrática (Fig. B3a) se formulan de una manera similar a los de interpolación lineal. Los polinomios de interpolación para el campo de desplazamientos son de orden dos y se pueden deducir a partir de la pirámide de Pascal para interpolación cuadrática (Fig. B3b).

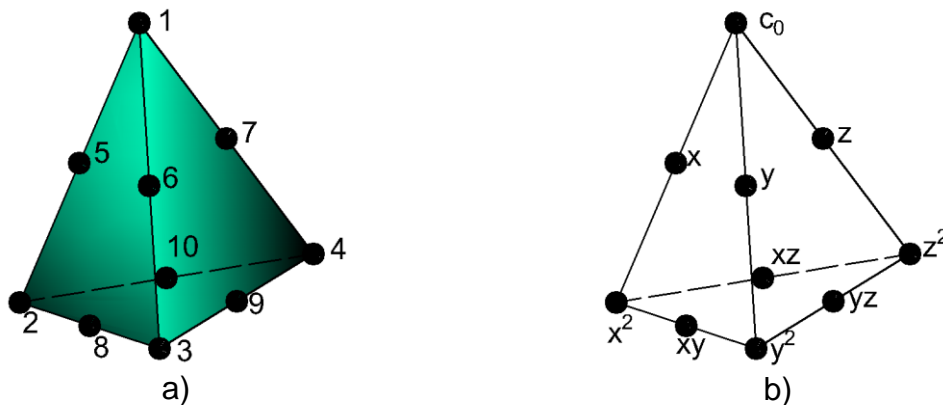


Fig. B3. Elemento tetraédrico de interpolación cuadrática.  
a) Numeración de nodos, b) pirámide de Pascal.

De la Fig. B3b se puede deducir que los polinomios de interpolación cuadrática estarán formados por diez términos, uno constante ( $c_0$ ), tres lineales  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y seis cuadráticos  $x^2$ ,  $y^2$ ,  $z^2$ ,  $xy$ ,  $xz$ ,  $yz$ . Similar a la formulación de las Ecs. (B1), el campo de desplazamientos tendrá treinta constantes ( $\alpha_i \ i=1,2,\dots,30$ ), por lo que la sustitución de las coordenadas nodales del elemento resulta en un sistema de ecuaciones de  $30 \times 30$ . Análogamente a la deducción de las coordenadas de volumen, se pueden determinar las funciones de forma de los elementos tetraédricos de interpolación cuadrática, las cuales se expresan como,

$$N_i = (2L_i - 1)L_i \quad (i=1,2,3,4) \quad (\text{B4a})$$

$$N_i = 4L_1 L_{i-3} \quad (i=5,6,7) \quad (\text{B4b})$$

$$N_i = 4L_{i-6} L_{i-5} \quad (i=8,9) \quad (\text{B4c})$$

$$N_{10} = 4L_2 L_4 \quad (\text{B4d})$$

### B.3. Elementos de transición

Debido a que el método del elemento finito es un método numérico, una manera de aumentar la precisión numérica de los resultados es a partir del refinamiento de la malla. Esto puede lograrse, entre otras formas, disminuyendo el tamaño de los elementos y/o aumentando el orden de interpolación de las funciones de forma (Bathe, 1996). Asimismo, al realizar dicho refinamiento el número de ecuaciones por resolver también aumenta. Por esta razón, en este trabajo se consideró la utilización de una malla híbrida, esto es, compuesta de elementos de interpolación lineal y cuadrática (Fig. 3.4). Sin embargo, considerar este tipo de refinamiento puede generar incompatibilidad de mallas debido a la diferencia de orden en las funciones de forma utilizadas (Liu y Quek, 2003). Esta incompatibilidad puede ser resuelta al utilizar elementos de transición, en los que las funciones de forma tienen diferente orden de interpolación en distintas aristas y, a su vez, coinciden con el orden de interpolación de las aristas que comparten con los elementos (Fig. B4).

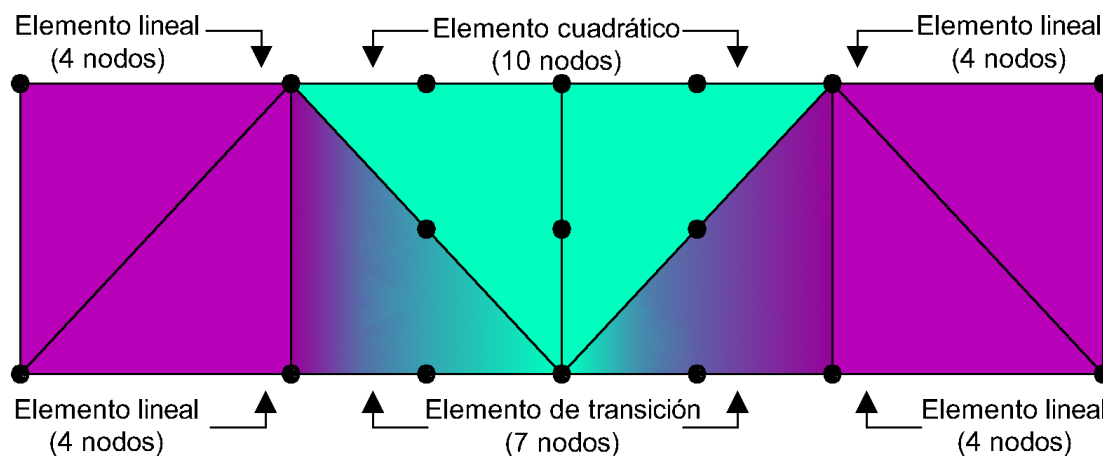


Fig. B4. Elementos tetraédricos de transición utilizados para la compatibilidad entre mallas de diferente orden de interpolación (vista en dos dimensiones).

## APÉNDICE C

### Validación de los modelos de elemento finito para el caso homogéneo e isotrópico

La metodología para la determinación de las CEI de un MCU descrita en el capítulo 3 se validó a partir de un caso homogéneo e isotrópico utilizando los mismos códigos que los desarrollados para el MCU. Esto es, se consideró que la matriz y la fase de refuerzo son el mismo material y que éste tiene un comportamiento isotrópico. Por esta razón, se utilizó un módulo de elasticidad  $E=3.00$  GPa, una razón de Poisson  $\nu=0.30$  y a partir de la Ec. (2.1) un módulo cortante  $G=1.15$  GPa como las propiedades materiales de entrada tanto para la “matriz” como para las “fibras”, de modo que en la práctica lo que existe en este caso es un solo material.

En las modelaciones de elemento finito se consideró que el bloque homogéneo tiene la geometría y malla descrita en las secciones 3.2 y 3.3. Asimismo, se aplicaron las condiciones de carga y frontera descritas en las secciones 3.4.1 (ver Fig. 3.5), 3.5.1 (ver Fig. 3.7) y 3.6.1 (ver Fig. 3.9).

Del MEF para la determinación de las propiedades elásticas longitudinales ( $E_1$  y  $\nu_{12}$ ) se observó en los mapas de contorno que el esfuerzo en la dirección del desplazamiento impuesto es constante y uniforme, mientras que los esfuerzos en las demás componentes son despreciables. Resultados similares se encontraron en los MEF para la determinación de las propiedades elásticas transversales ( $E_2$  y  $\nu_{23}$ ) y para la determinación del módulo cortante en el plano ( $G_{12}$ ).

En la Fig. C1 se muestra que, como era de esperarse, todas las CEI utilizadas como valores de entrada en el caso homogéneo e isotrópico ( $E$ ,  $\nu$  y  $G$ ) se reproducen de modo consistente, independientemente del tamaño del cilindro considerado como “fibra” ( $\phi_f$ ). Esto comprueba que el MEF generado y la metodología establecida (capítulo 3) para obtener las propiedades elásticas son correctas.



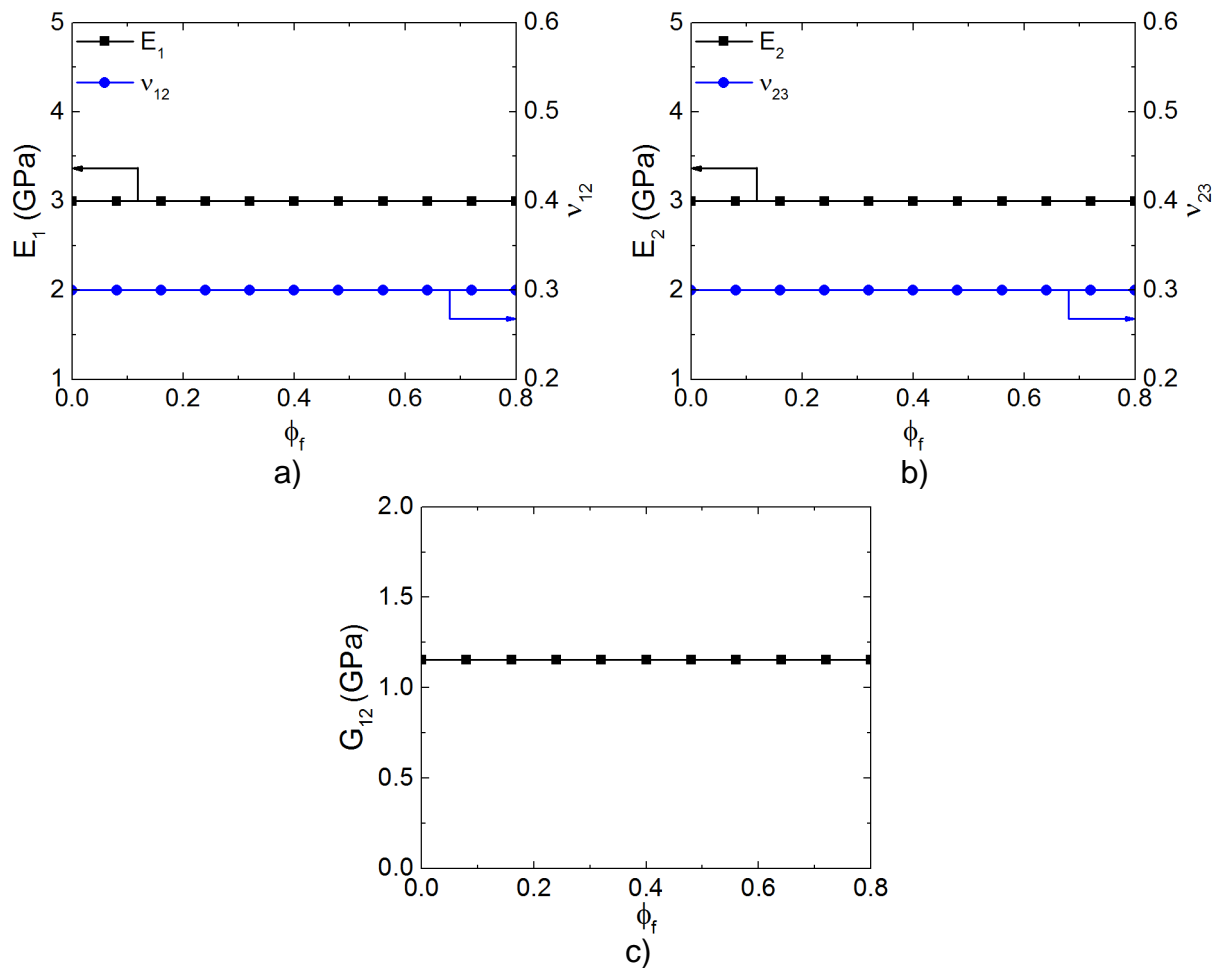


Fig. C1. Propiedades elásticas del VR determinadas a partir del caso homogéneo e isotrópico (solo matriz). a)  $E_1$  y  $\nu_{12}$ , b)  $E_2$  y  $\nu_{23}$ , c)  $G_{12}$ .

## APÉNDICE D

### Ejemplo de uso: Predicción de esfuerzos y deformaciones en una viga en voladizo de material compuesto reforzado con fibras unidireccionales

#### D.1. Modelo de elemento finito

A manera de ejemplo aplicativo, se realizó un MEF de una viga en voladizo hecha de MCU ( $\phi_f=50\%$ ) con una carga puntual en el extremo libre. Esto con la finalidad de comparar los resultados del análisis numérico cuando las CEI del MCU son determinadas a partir del MEF desarrollado en este trabajo (ver capítulo 3) o MM sugeridos (ver capítulo 5 y conclusiones). La modelación consistió en una viga homogénea y de comportamiento ortotrópico con una geometría definida por el estándar ASTM D7264 (2007); siendo el ancho ( $W_v$ ) de 13mm y el espesor ( $T_v$ ) de 4 mm. La longitud de la viga ( $L_v$ ) se definió a partir de la razón  $L_v/T_v=32$  y  $L_v/T_v=5$ , con la finalidad de promover que en el primer caso las deformaciones por cortante sean despreciables y en el segundo no lo sean (ASTM D7264, 2007). Finalmente, se consideraron las combinaciones materiales FC/E y FV/E de la Tabla D1, en las que las CEI fueron determinadas a partir de la metodología establecida en el capítulo 3 y los MM sugeridos (ver capítulo 5 y conclusiones).

Tabla D1. CEI utilizadas en la modelación de la viga en voladizo.

MCU	Método	$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$\nu_{12}$	$\nu_{23}$	$G_{12}$ (GPa)
FC/E	MEF	117	5.40	0.276	0.373	3.07
	MM	117	5.36	0.276	0.363	3.13
FV/E	MEF	38	7.83	0.242	0.360	3.11
	MM	38	8.14	0.242	0.331	3.16

Las condiciones de frontera en los nodos localizados en  $x=0$  (ver Fig. D1) se definieron como,

$$u]_{x=0} = v]_{x=0} = w]_{x=0} = 0 \quad (D1)$$

Se aplicó una carga puntual ( $P_z$ ) de 1 kg en el extremo libre ( $x=L$ ), Fig. D1, esto es,

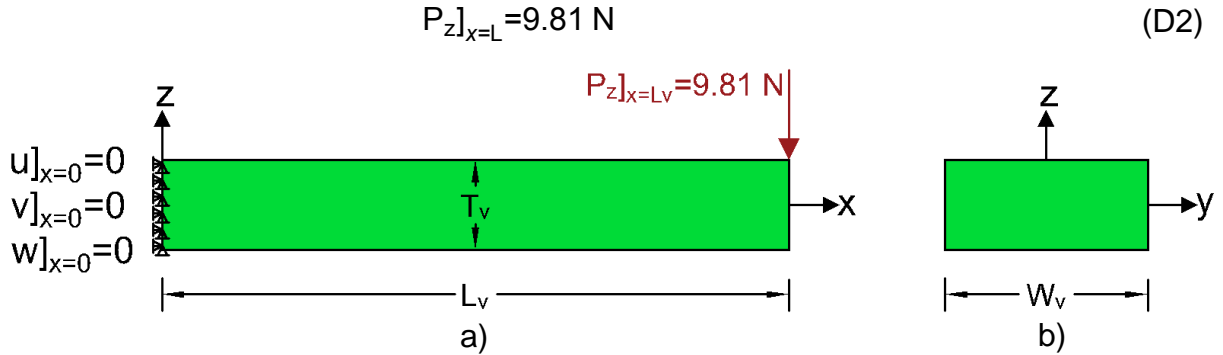


Fig. D1. Condiciones de carga y frontera en el MEF de la viga en voladizo .  
a) Vista en el plano xz, b) Vista en el plano yz.

Adicionalmente a los análisis numéricos efectuados, se incluyó la comparación de los resultados contra fórmulas de mecánica de materiales como una aproximación homogénea e isotrópica (AH) como se describe en Gere y Timoshenko (1984). Dicha aproximación define la deflexión en la dirección  $z$  ( $\delta$ ) incluyendo la deformación por flexión pura y por cortante con la expresión,

$$\delta(x) = \left( \frac{P_z x^2}{6E_v I_y} \right) (3L_v - x) + \frac{\alpha_s P_z x}{G_v A_v} \quad (D3)$$

donde  $I_y$  es la inercia centroidal con respecto al eje  $y$  de la sección transversal,  $E_v$  es el módulo elástico de la viga,  $\alpha_s = 1.5$  es definido por Gere y Timoshenko (1984) como un coeficiente de cortante,  $G_v$  es el módulo cortante y  $A_v$  el área de la sección transversal. De este modo, la deflexión máxima de la viga ( $\delta_{max}$ ), la cual sucede en  $x=L_v$ , se expresa como,

$$\delta_{max} = \frac{P_z L_v^3}{3E_v I_y} + \frac{\alpha_s P_z L_v}{G_v A_v} \quad (D4)$$

Por otra parte, la determinación de los esfuerzos normales en la dirección  $x$  ( $\sigma_x$ ) por flexión se determinan como,

$$\sigma_x(x) = \pm \frac{P_z z (L_v - x)}{I_y} \quad (D5)$$

Conviene subrayar que en la formulación de las Ecs. (D3) a (D5) se asume que el material es elástico-lineal, homogéneo, e isotrópico ya que esta última asunción (isotropía material) no se cumple en el caso del material compuesto. Asimismo, en las modelaciones se consideró que  $E_v = E_1$  y  $G_v = G_{12}$  de la tabla D1.

## D.2. Resultados y discusión

En la Fig. D2 se presenta el perfil de deflexión de la viga en voladizo normalizado con respecto a  $L_v$  en el eje horizontal y  $\delta_{max}$  (determinado por MEF) en el eje vertical para los casos  $L_v/T_v=32$  y  $L_v/T_v=5$  en ambas combinaciones materiales.

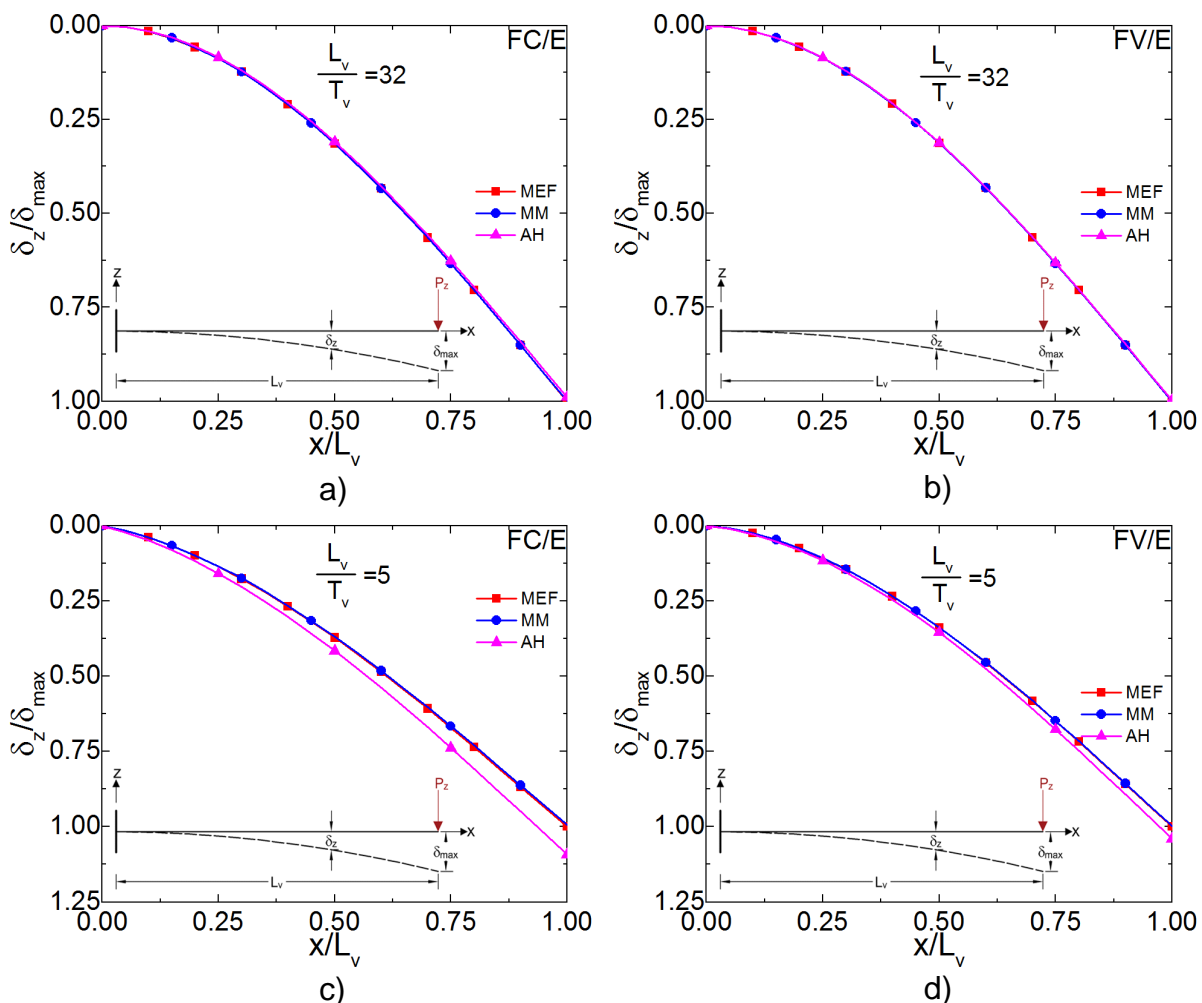


Fig. D2. Perfil de deflexión de las vigas en voladizo. a) FC/E con  $L_v/T_v=32$ , b) FV/E con  $L_v/T_v=32$ , c) FC/E con  $L_v/T_v=5$ , d) FV/E con  $L_v/T_v=5$ .

A partir de la Fig. D2a y D2b se observa que cuando la viga está dominada por la flexión, las tres curvas presentan resultados muy similares para ambos sistemas materiales. En este caso la deformación por cortante (segundo término en la Ec. (D3)) representa el 1.4% de  $\delta_{max}$  (Ec. (D4)), debido a que por la razón de aspecto de la viga su deflexión está dominada por la flexión. Si se toma la curva originada por MEF como referencia, la diferencia entre resultados en el extremo libre con las curvas MM y AH es de 0.02% y 1%, respectivamente, es decir, las diferencias son despreciables. Este

resultado soporta el argumento de esta investigación, en el sentido que el uso de los MM es suficiente para las predicciones de las propiedades elásticas de entrada del MEF de la viga, sin necesidad de efectuar otro MEF para ello.

Con relación a la Fig. D2c se observa que cuando las deformaciones por cortante son significativas ( $L_v/T_v=5$ ), la curva AH sobrestima la deflexión de la viga, siendo un 10% mayor en el extremo libre con respecto a la curva MEF. En este caso la deformación por cortante (segundo término en la Ec. (D3)) representa el 36% de  $\delta_{max}$  (Ec. (D4)) indicando que las deformaciones por cortante son significativas. No obstante, cuando las CEI son obtenidas por MM la diferencia entre resultados con respecto a MEF resulta despreciable, siendo de 0.7% en el extremo libre de la viga.

Un comportamiento similar se observa en la Fig. D2d para FV/E, pero en este caso las diferencias con MEF son menores. En contraste con la Fig. D2c, la deformación por cortante (segundo sumando en la Ec. (D3)) representa solo el 15% de  $\delta_{max}$  (Ec. (D4)), lo cual es mucho menor que en la combinación FC/E. Asimismo, se determinó que la diferencia de AH con respecto a MEF es del 4%, ya que la ortotropía del compuesto FV/E es menor que la del compuesto FC/E (ver Tabla D1).

Asimismo, cuando las CEI se determinan por los MM descritos en el capítulo 5, la diferencia entre resultados con respecto a MEF es despreciable, siendo de 0.3% en el extremo libre. De este modo, se observa que los MM seleccionados, al ser usados como valores de entrada, predicen con mucha precisión las deformaciones transversales de una viga en voladizo, sin importar la razón de aspecto de la misma y/o la contribución relativa de deformaciones por cortante.

Debido a que el análisis de la viga es elástico-lineal, la distribución de esfuerzos normales normalizada es idéntica para ambos sistemas materiales. Por esta razón, en la Fig. D3 se presentan los resultados obtenidos para el compuesto FC/E.

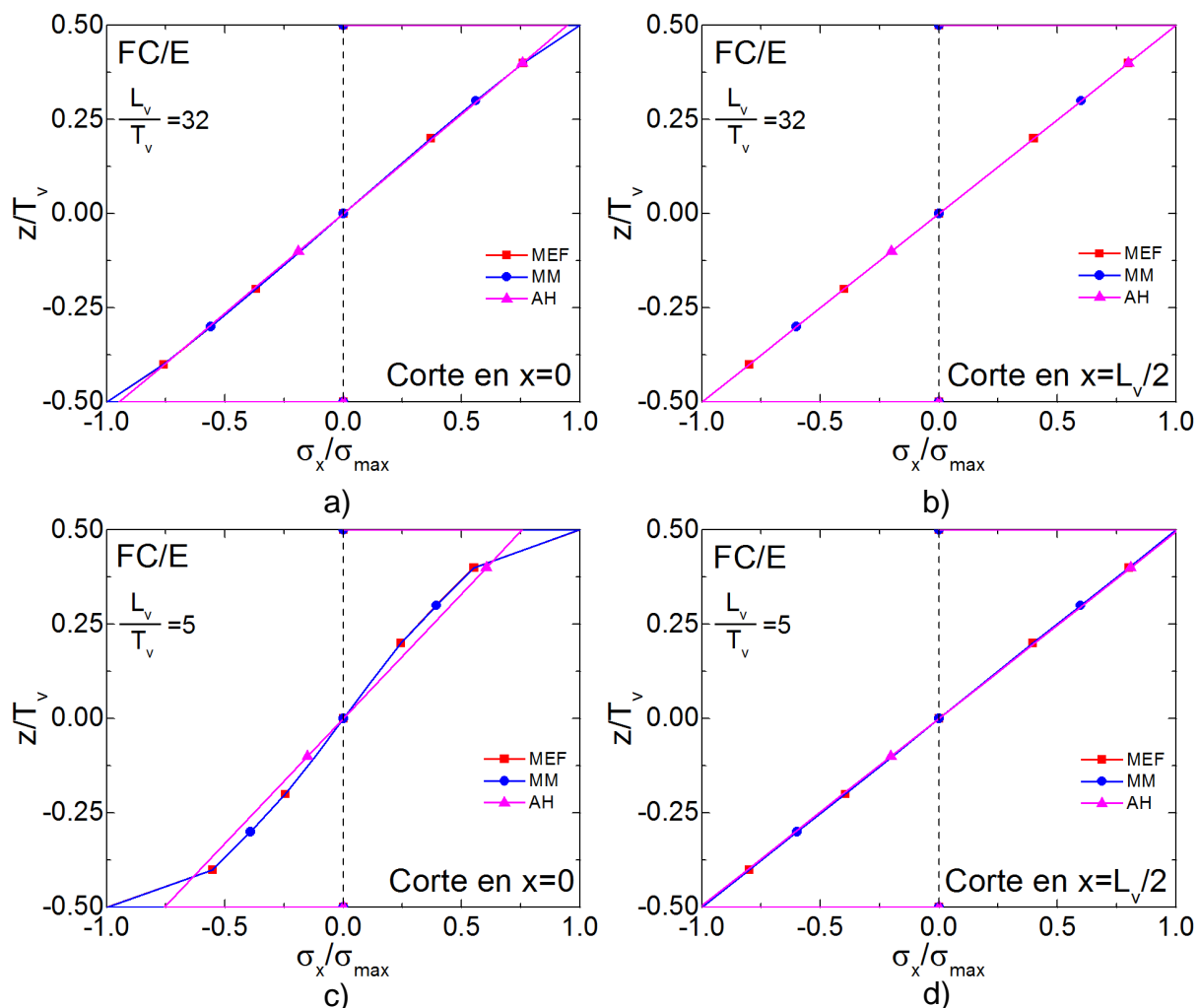


Fig. D3. Distribución del esfuerzo normal  $\sigma_x$  para FC/E. a)  $L_v/T_v=32$  y  $x=0$ , b)  $L_v/T_v=32$  y  $x=L_v/2$ , c)  $L_v/T_v=5$  y  $x=0$ , d)  $L_v/T_v=5$  y  $x=L_v/2$ .

Se observa en la Fig. D3 que la predicción de la distribución de esfuerzos normales ( $\sigma_x$ ) utilizando MM como valores de entrada es prácticamente idéntica que la distribución obtenida a partir de MEF específicos. Cerca del empotramiento existen concentraciones de esfuerzos que perturban la linealidad de la distribución, y eso también es bien capturado en ambos modelos numéricos. Por otro lado, la AH no es adecuada para materiales compuestos, pero constituye una primera aproximación gruesa. De este modo, este apéndice demuestra la pertinencia del uso de MM como valores de entrada en modelos estructurales, con una gran precisión.

## APÉNDICE E

### Resumen de los modelos de micromecánica seleccionados

A partir de la métrica estadística presentada en la sección 3.8, en la tabla E1 se muestra un resumen con los MM a los que se les determinó la mejor aproximación a los resultados obtenidos por los MEF descritos en las secciones 3.4, 3.5 y 3.6.

Tabla E1. Modelos de micromecánica propuestos para la determinación de las CEI de MCU.

CEI	Ecuación	Autor	Número de ecuación
$E_1$	$E_1 = E_{1f}\phi_f + E_m\phi_m + \frac{4\phi_f\phi_m(v_{12f}-v_m)^2}{\frac{\phi_f}{k_{23m}} + \frac{1}{G_m} + \frac{\phi_m}{k_{23f}}}$	Hill (1965)	(2.17)
$v_{12}$	$v_{12} = v_{12f}\phi_f + v_m\phi_m + \frac{\phi_f\phi_m(v_{12f}-v_m)\left(\frac{1}{k_{23m}} - \frac{1}{k_f}\right)}{\frac{\phi_f}{k_{23m}} + \frac{1}{G_m} + \frac{\phi_m}{k_{23f}}}$	Hill (1965)	(2.18)
$E_2$	$E_2 = \frac{4k_{23}G_{23}}{k_{23} + \beta G_{23}}$ $\beta = 1 + \frac{4k_{23}v_{12}^2}{E_1}$	Tsai y Hahn (1980)	(2.31a) (2.31b)
$v_{23}$	$v_{23} = 1 - E_2 \left( \frac{2v_{12}^2}{E_1} + \frac{1}{2k_{23}} \right)$	Balacó de Morais (2000)	(2.24)
$G_{12}$	$G_{12} = \left[ \frac{1}{\phi_f + \alpha_{G12}\phi_m} \left( \frac{\phi_f}{G_{12f}} + \frac{\alpha\phi_m}{G_{12m}} \right) \right]^{-1}$ $\alpha_{G12} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{G_m}{G_{12f}} \right)$	Tsai y Hahn (1980)	(2.29) (2.30a)

## REFERENCIAS

- Aboudi, J. (1989). Micromechanical analysis of composites by the method of cells. "Applied mechanics reviews", 42, 193-221.
- Adams, D. F., y Doner, D. R. (1967a). Longitudinal shear loading of a unidirectional composite. "Journal of composite materials", 1, 4-17.
- Adams, D. F., y Doner, D. R. (1967b). Transverse normal loading of a unidirectional composite. "Journal of composite materials", 1, 152-164.
- Adams, D. F., y Tsai, S. W. (1969). The influence of random filament packing on the transverse stiffness of unidirectional composites. "Journal of composite materials", 3, 368-381.
- Agarwal, B. D., Broutman, L. J., y Chandrashekhara, K. (2006). Analysis and performance of fiber composites (third ed.). New Delhi: Jon Wiley y Sons.
- Ahmadi, I., y Aghdam, M. M. (2010). Micromechanics of fibrous composites subjected to combined shear and thermal loading using a truly meshless method. "Computational mechanics", 46, 387-398.
- ANSYS 15.0. (2014). Swanson Analysis Systems, Inc., Canonsburg, PA, Estados Unidos.
- ASTM D3039. (2014). Standard test method for tensile properties of polymer matrix composite materials. "American Society for Testing and Materials". West Conshohocken, Pennsylvania.
- ASTM D3518. (2013). Standard test method for in-plane shear response of polymer matrix composite materials by tensile test of a  $\pm 45^\circ$  laminate. "American Society for Testing and Materials". West Conshohocken, Pennsylvania.
- ASTM D4255. (2015). Standard test method for in-plane shear properties of polymer matrix composite materials by the rail shear method. "American Society for Testing and Materials". West Conshohocken, Pennsylvania.
- ASTM D5379. (2012). Standard test method for shear properties of composite materials by the V-Notched beam method. "American Society for Testing and Materials". West Conshohocken, Pennsylvania.



- ASTM D7264. (2007). Standard test method for flexural properties of polymer matrix composite materials. "American Society for Testing and Materials". West Conshohocken, Pennsylvania.
- Bai, J. (Ed.). (2013). Advanced fibre-reinforced polymer (FRP) composites for structural applications. Woodhead Publishing Limited.
- Bakis, C. E., Bank, L. C., Brown, V. L., Cosenza, E., Davalos, J. F., Lesko, J. J. y Triantafillou, T. C. (2002). Fiber-reinforced polymer composites for construction - State of the art review. "Journal of composites for construction", 6, 73-87.
- Balacó de Morais, A. (2000). Transverse moduli of continuous-fibre-reinforced polymers. "Composite science and technology", 60, 997-1002.
- Barbero, E. J. (2011). Introduction to composite materials design. Boca Raton: CRC Press.
- Barnes, J. A., Kumosa, M., y Hull, D. (1987). Theoretical and experimental evaluation of the Iosipescu shear test. "Composites science and technology", 28, 251-268.
- Bathe, K. J. (1996). Finite element procedures. New Jersey: Prentice-Hall.
- Bayat, M., y Aghdam, M. M. (2012). A micromechanics-based analysis of effects of square and hexagonal fiber arrays in fibrous composites using DQEM. "European journal of mechanics A/Solids", 32, 32-40.
- Behzadi, S., Curtis, P. T., y Jones, F. R. (2009). Improving the prediction of tensile failure in unidirectional fibre composites by introducing matrix shear yielding. "Composites science and technology", 69, 2421-2427.
- Beischa, D., Kanit, T., Brunet, Y., Imad, A., El Moumen, A., y Khelifaoui, Y. (2016). Effective transverse elastic properties of unidirectional fiber reinforced composites. "Mechanics of materials", 102, 47-53.
- Berthelot, J. M. (1999). Composite materials: Mechanical behavior and structural analysis (First ed.). New York: Springer.
- Bledzki, A. K., Kessler, A., Rikards, R., y Chate, A. (1999). Determination of elastic constants of glass/epoxy unidirectional laminates by the vibration testing of plates. "Composites science and technology", 59, 2015-2024.
- Bnarjee, S., y Sankar, B. V. (2014). Mechanical properties of hybrid composites using finite element method based micromechanics. "Composites: Part B", 58, 318-327.

- Brockenbrough, J. R., Suresh, S., y Wienecke, H. A. (1991). Deformation of metal-matrix composites with continous fibers: Geometrical effects of fiber distribution and shape. "Acta metallurgica et materialia", 39, 735-752.
- Broughton, W. R., Kumosa, M., y Hull, D. (1990). Analysis of the Iosipescu shear test as applied to unidirectional carbon-fibre reinforced composites. "Composites science and technology", 38, 299-325.
- Caporale, A., Luciano, R., y Sacco, E. (2006). Micromechanical analysis of interfacial debonding in unidirectional fiber reinforced composites. "Computers and structures", 84, 2200-2211.
- Carlsson, L. A., Adams, D. F., y Pipes, R. B. (2014). Experimental characterization of advanced composite materials (Fourth ed.). Boca Raton: CRC press.
- Chamis, C. C. (1984). Simplified composite micromechanics equations for hygral, thermal and mechanical properties. Technical Memorandum. Cleveland: Lewis Research Center. (NASA TM-83320).
- Chamis, C. C., y Sendekyj, G. P. (1968). Critique on theories predicting thermoelastic properties of fibrous composites. "Journal of composite materials, 2, 332-358.
- Chou, T. W. (1992). Microstructural design of fiber composites (First ed.). Cambridge: Cambridge University Press.
- Christensen, R. M., y Lo, K. H. (1979). Solutions for effective shear properties in three phase and cylinder model. "Journal of the mechanics and physics of solids", 27, 315-350.
- Clyne, T. W. (1990). A compressibility-based derivation of simple expressions for the transverse Poisson's ratio and shear modulus of an aligned long fibre composite. "Journal of materials science letters", 9, 336-339.
- Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E., y Witt, R. J. (2002). Concepts and applications of finite element analysis (Fourth ed.). Wisconsin: John Wiley y sons, inc.
- Dean, G. D., y Turner, P. (1973). The elastic properties of carbon fibres and their composites. "Composites", 4, 174-180.
- Djordjevic, I., Sekulic, D. P., y Stevanovic, M. (2007). Carbon fiber composites, main engineering elastic constants and macromechanical characterization. "Journal of reinforced plastics and composites", 26, 1193-1199.

- Dyer, S. A., Lord, D., Hutchinson, I. J., Ward, I. M., y Duckett, R. A. (1992). Elastic anisotropy in unidirectional fibre reinforced composites. "Journal of physics D: Applied physics", 25, 66-73.
- Edie, D. D. (1998). The effect of processing on the structure and properties of carbon fibers. "Carbon", 36, 345-362.
- Ekvall, J. C. (1965). Structural behavior of monofilament composites. AIAA 6th Structures and Materials Conference (págs. 250-263). New York: American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- Foye, R. L. (1972). The transverse Poisson's ratio of composites. "Journal of composite materials", 6, 293-295.
- Fu, S. Y., Hu, X., y Yue, C. Y. (1998). A new model for the transverse modulus of unidirectional fiber composites. "Journal of materials of science", 33, 4953-4960.
- Gere, J. M., y Timoshenko, S. P. (1984). Mechanics of materials (2nd ed.). Boston: PWS Publishers.
- Goggin, P. R. (1973). The elastic constants of carbon-fibre composites. "Journal of materials science", 8, 233-244.
- Goh, K. L., Aspden, R. M., Mathias, K. J., y Hukins, D. W. (2004). Finite-element analysis of the effect of material properties and fibre shape on stresses in an elastic fibre embedded in an elastic matrix in a fibre-composite material. Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 460, págs. 2339-2352. London: The Royal Society.
- Gusev, A. A., Hine, P. J., y Ward, I. M. (2000). Fiber packing and elastic properties of a transversely random unidirectional glass/epoxy composite. "Composites science and technology, 60, 535-641.
- Halpin, J. C. (1969). Effects of environmental factors on composite materials. Technical Report. Ohio: Wright-Patterson Air Force Base. (AFML-TR-67-423).
- Halpin, J. C., y Kardos, J. L. (1976). The Halpin-Tsai equations: A review. "Polymer engineering and science", 16, 344-352.
- Hashin, Z., y Rosen, B. W. (1964). The elastic moduli of fiber-reinforced materials. "Journal of applied mechanics", 31, 223-232.

- Hashin, Z., Rosen, B. W., Humphreys, E. A., Newton, C., y Chatterjee, S. (1997). Fiber composite analysis and design: Composite materials and laminates (Vol. 1). Springfield: Federal Aviation Administration.
- Herakovich, C. T. (1998). Mechanics of fibrous composites. New York: John Wiley y Sons, Inc.
- Hermans, J. J. (1967). The elastic properties of fiber reinforced materials when the fibers are aligned. Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen-Proceedings Series B-Physical Sciences, 70, 1-9.
- Hewitt, R. L., y Malherbe, M. C. (1970). An approximation for the longitudinal shear modulus of continuous fibre composites. "Journal of composite materials", 4, 280-282.
- Hill, R. (1964). Theory of mechanical properties of fibre-strengthened materials I: Elastic behaviour. "Journal of the mechanics and physics of solids", 12, 199-212.
- Hill, R. (1965). Theory of mechanical properties of fibre-strengthened materials III: Self-consistent model. "Journal of the mechanics and physics of solids", 13, 189-198.
- Ho, H., Tsai, M. Y., Morton, J., y Farley, G. L. (1993). Numerical analysis of the losipescu specimen for composite materials. "Composites science and technology", 46, 115-128.
- Hollaway, L. (2010). A review of the present and future utilisation of FRP composites in the civil. "Construction and building materials", 24, 2419-2445.
- Hopkins, D. A., y Chamis, C. C. (1985). A unique set of micromechanics equations for high temperature metal matrix composites. Technical Memorandum. Cleveland: Lewis Research Center. (NASA TM 87154).
- Huang, Z. M. (2000a). A unified micromechanical model for the mechanical properties of two constituents composite materials. Part II: Plastic behavior. "Journal of thermoplastic composite materials", 13, 344-362.
- Huang, Z. M. (2000b). Unified micromechanical model for the mechanical properties of two constituent composite materials. Part I: Elastic behavior. "Journal of thermoplastic composite materials", 13, 252-271.
- Hull, D., y Clyne, T. W. (1996). An introduction to composite materials (Second ed.). Cambridge: Cambridge University Press.

- Hyer, M. W. (1998). Stress analysis of fiber-reinforced composite materials. Ohio: McGraw-Hill.
- Hyndman, R. J., y Koehler, A. B. (2006). Another look at measures of forecast accuracy. "International journal of forecasting", 22, 679-688.
- Ishikawa, T., Koyama, K., y Kobayashi, S. (1977). Elastic moduli of Carbon-Epoxy composites and carbon fibers. "Journal of composite materials", 11, 332-344.
- Jacquet, E., Trivaudey, F., y Varchon, D. (2000). Calculation of the transverse modulus of a unidirectional composite material and of the modulus of an aggregate. Application of the rule of mixtures. "Composites science and technology", 60, 345-350.
- Jiang, X., y Gao, Q. (2001). Stress-transfer analysis for fibre/matrix interfaces in short-fibre-reinforced composites. "Composites science and technology", 61, 1359-1366.
- Jones, R. (1999). Mechanics of composite materials (Second ed.). Philadelphia: Taylor y Francis, Inc.
- Kaw, A. K. (2006). Mechanics of composite materials (second ed.). Florida: Taylor y Francis, Inc.
- Kelly, A., y Zweben, C. H. (Edits.). (2000). Comprehensive composite materials. Elsevier.
- Krucinska, I., y Stypka, T. (1991). Direct measurement of the axial Poisson's ratio of single carbon fibers. "Composites science and technology", 41, 1-12.
- Lin, T. H., Salinas, D., y Ito, Y. M. (1972). Elastic-plastic analysis of unidirectional composites. "Journal of composite materials", 6, 48-60.
- Liu, G. R., y Quek, S. S. (2003). The finite element method (First ed.). Oxford: Butterworth Heinemann.
- Lu, Z., Yuan, Z., y Liu, Q. (2014). 3D numerical simulation for the elastic properties of random fiber composites with a wide range of fiber aspect ratios. "Computational materials science", 90, 123-129.
- Luciano, R., y Barbero, E. J. (1994). Formulas for the stiffness of composites with periodic microstructure. "International journal of solids and structures", 31, 2933-2944.
- Manera, M. (1977). Elastic properties of randomly oriented short fiber-glass composites. "Journal of composite materials", 11, 235-247.

- Miyagawa, H., Mase, T., Sato, C., Drown, E., Drzal, L. T., y Ikegami, K. (2006). Comparison of experimental and theoretical transverse elastic modulus of carbon fibers. "Carbon", 44, 2002-2008.
- Miyagawa, H., Sato, C., Mase, T., Drown, E., Drzal, L. T., y Ikegami, K. (2005). Transverse elastic modulus of carbon fibers measured by Raman spectroscopy. "Materials science & engineering A", 412, 88-92.
- Mohammadi, M. S., Komeili, M., Phillion, A. B., y Milani, A. S. (2016). Toward better understanding of the effect of fiber distribution on effective elastic properties of unidirectional composite yarns. "Computers and structures", 163, 29-40.
- Mori, T., y Tanaka, K. (1973). Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. "Acta metallurgica", 21, 571-574.
- Nasser, S. N., y Taya, M. (1981). On effective moduli of an elastic body containing periodically distributed voids. "Quarterly of applied mathematics", 31, 43-59.
- Nedele, M. R., y Wisnom, M. R. (1994). Finite element micromechanical modelling of a unidirectional composite subjected to axial shear loading. "Composites", 4, 263-272.
- Rajan, V. P., y Zok, F. W. (2014). Matrix cracking of fiber-reinforced ceramic composites in shear. "Journal of the mechanics and physics of solids", 73, 3-21.
- Rikards, R., Chate, A., Steinchen, W., Kessler, A., y Bledzki, A. K. (1999). Method for identification of elastic properties of laminates based on experiment design. "Composites: Part B", 30, 279-289.
- Shan, H. Z., y Chou, T. W. (1995). Transverse elastic moduli of unidirectional fiber composites with fiber/matrix interfacial debonding. "Composites science and technology", 53, 383-391.
- Sottos, N. R., McCullough, R. L., y Scott, W. R. (1992). The influence of interphase regions on local thermal displacements in composites. "Composites science and technology", 44, 319-332.
- Soutis, C. (2005). Fibre reinforced composites in aircraft construction. "Progress in aerospace sciences", 41, 143-151.
- Spencer, A. (1986). The transverse moduli of fibre-composite material. "Composites science and technology", 27, 93-109.

- Talreja, R., y Singh, C. V. (2012). Damage and failure of composite materials. New York: Cambridge University Press.
- Tandon, G. P., y Weng, G. J. (1986). Stress distribution in and around spheroidal inclusions and voids at finite concentration. "Journal of applied mechanics", 53, 511-518.
- Teng, H. (2007). Transverse stiffness properties of unidirectional fiber composites containing debonded fibers. "Composites Part A: Applied science and manufacturing", 38, 682-690.
- Theocaris, P. S., Stavroulakis, G. E., y Panagiotopolus, P. D. (1997). Calculation of effective transverse elastic moduli of fiber-reinforced composites by numerical homogenization. "Composites science and technology", 57, 573-586.
- Tsai, S. W. (1964). Structural behavior of composite materials. Contractor Report. Newport Beach: PHILCO Corporation (NASA-CR-71).
- Tsai, S. W., y Hahn, H. T. (1980). Introduction to composite materials. Lancaster: Technomic Publishing Company, Inc.
- Wallenberger, F. T., Watson, J. C., y Li, H. (2001). Glass fibers (Vol. 21: Composites). Ohio: ASM International.
- Wang, J., Crouch, S. L., y Mogilevskaya, S. G. (2006). Numerical modeling of the elastic behavior of fiber-reinforced composites with inhomogeneous interphases. "Composites science and technology", 66, 1-18.
- Whitney, J. M., y McCullough, R. L. (1990). Micromechanical materials modeling. Lancaster: Technomic Publishing Co., Inc.
- Xu, Y., Du, S., Xiao, J., y Zhao, Q. (2012). Evaluation of the effective properties of long fiber reinforced composites with interphases. "Computational materials science", 61, 34-41.
- Yang, L., Wu, Z., Cao, Y., y Yan, Y. (2015). Micromechanical modelling and simulation of unidirectional fibre-reinforced composite under shear loading. "Reinforced plastics and composites", 34, 72-83.
- Yu, Y., Zhang, B., Tang, Z., y Qi, G. (2015). Stress transfer analysis of unidirectional composites with randomly distributed fibers using finite element method. "Composites: Part B", 69, 278-285.

Zienkiewicz, O. C., y Taylor, R. L. (2000). The finite element method: The basis (Fifth ed., Vol. 1). Londres: Butterworth Heinemann.