Universidad Autónoma de Yucatán
Facultad de Matemáticas

Sucesiones que casi se dividen en la categoría $\mathfrak{p}(\Lambda)$

Tesis

presentada por:
Sergio Santiago Chan Castro

en opción al título de:
Maestro en Ciencias Matemáticas

Mérida, Yucatán, México

Septiembre de 2016

Dedicado a

mi abuelita Doña fabi,

por que sé que siempre creiste en mi y por alcanzar

este sueño me perdí de esos últimos momentos a tu lado.

Agradecimientos

Por que de ti obtuve la fuerza y el conocimiento, me bendijiste y acompañaste durante todo este trayecto, te agradezco dios mio por permitirme llegar a este punto de mi vida.

Me enseñaste a amar las matemáticas, hoy en día sigo tus pasos, te agradezco que siempre me impulsaste a alcanzar mis sueños. Gracias papá.

Siempre estuviste a mi lado, me enseñaste el valor de la familia, el respeto y a nunca renunciar a los sueños. Siempre has sido mi fuerza. Te amo mamá.

Eres mi ejemplo a seguir, de ti aprendí a luchar y salir adelante por la gente a la que amamos, en tu esposo encontre al hermano que siempre me hizo falta. Gracias hermana, gracias Manuel.

Me sentí perdido y en ti encontre la guía, la fuerza y el amor. Tu eres lo más grande que tengo por ti estoy aqui y por ti seguire luchando. Te amo, mi querida esposa.

Mi inspiracón, mi pequeña, cambiaste mi vida desde el día en que naciste, eres mi mayor logro. Te amo Hisae.

A mis amigos y familiares que siempre me acompañaron y me alentarón a seguir adelante, ustedes siempre fueron pieza fundamental en este proyecto.

A los profesores, por que guiarón mis pasos y me permitieron con sus enseñanzas alcanzar este punto de mi vida.

Al M.C.M. Alejandro Cobá, que tus consejos siempre fuerón para bien y en ti siempre encontre un buen amigo.

Al Dr. Efrén Pérez, por permitir que trabaje bajo su guía, por todas sus enseñanzas, en la escuela, como en la vida. Le agradezco la confianza, la paciencia y todos los conocimientos que me brindó.

A la Universidad Autónoma de Yucatán (UADY), mi casa de estudios.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo brindado.

A todos ustedes MUCHAS GRACIAS.

Índice general

Introducción

Este trabajo tiene como finalidad contribuir como un refuerzo de las herramientas básicas dentro del álgebra homológica, así como de las técnicas de esta disciplina, se pretende que el lector tenga conocimientos básicos de álgebra homológica y teoría de categorías, así como cursos en teoría de grupos y teoría de anillos.

Dentro de la teoría de representaciones de álgebras de Artin una de las herramientas clásicas y más trascendentes son las sucesiones que casi se dividen, estas fueron estudiadas en principio por los grandes investigadores Maurice Auslander, Idun Reiten y Sverre O. Smal$\varnothing$ con resultado de relevancia en áreas como la geometría algebraica y la topología algebraica. En años posteriores se buscó encontrar las condiciones necesarias para que las sucesiones que casi se dividen se preserven en subcategorías de módulos, así surgen los conceptos de las subcategorias homológicamente finitas y las subcategorías funtorialmente finitas, sin embargo, en la literatura actual, se encuentran ciertas inconsistencias con estas nociones, por esta razón tomamos la tarea de plantear estas ideas desde su forma más básica, así como proporcionar ejemplos de los mismos. Entre los resultados más relevantes que presentan esta inconsistencia se encuentra que las subcategorías homologicamente finitas y cerradas bajo extensiones tienen sucesiones que casi se dividen, pero este resultado no siempre es cierto, de modo que se presenta un ejemplo de una categoría que no cumple con estas caracteristicas. Dentro de la teoría de representaciones estudiar un módulo a través de los morfismos que se puedan conectar a traves de él ha sido una herramienta de mucha utilidad y al poder ver los morfismos como una categoría, la cual denotamos por $\mathcal{M}(\Lambda)$, se pueden importar ideas de la teoría de categorias y el álgebra homológica tales como: el radical, y las resoluciones proyectivas, entre otros. A través de estos conceptos se definen las categorías $\mathfrak{p}(\Lambda)$, $\mathfrak{p}^1(\Lambda)$ y $\mathfrak{p}^2(\Lambda)$ y para la cateoría $\mathfrak{p}(\Lambda)$ se verifica que tiene sucesiones que casi se dividen, así como se proporciona la fórmula para encontrarlas todas.

Capítulo 1

Conceptos y resultados preliminares

1.1 categorías

Es este capitulo se presentaran definiciones y resultados que serán de utlidad en los capitulos posteriores. Se comenzara trabajando con categorías y funtores, posteriormente se presentan las álgebras de artin y se prueba que en la categoría de modulos siempre existen los diagramas de $pull-back$ y $push-out$, se estudiaran los anillos de matrices triangulares así como las sucesiones que casi se dividen y los morfismos irreducibles. Estos conceptos y resultados así como trabajos similares pueden encontrarse en [R1], [Rot1], [M1], [G1] y [ARS1].

1.1.1 *Categorías*

Definición 1.1.1 Una categoría $\mathcal{C}$ consiste de una clase de objetos denotado por $obj\mathcal{C}$, y para cada par de objetos $A, B \in \mathcal{C}$ un conjunto de morfismos $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, así como un mapeo llamado composición

$$\circ : Hom_{\mathcal{C}}(B, C) \times Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \to Hom_{\mathcal{C}}(A, C)$$

de tal forma que se satisfacen los siguientes axiomas:

- $\circ$ es asociativa : si $f \in Hom_{\mathcal{C}}(C,D)$, $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B,C)$ y $h \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$, entonces $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

- Para cada $A \in obj\mathcal{C}$ existe $i_A \in Hom_{\mathcal{C}}(A,A)$ de tal forma que si $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ y $g \in Hom_{\mathcal{C}}(C,A)$ entonces $f \circ i_A = f$ y $g = i_A \circ g$. Este morfismo se conoce como la identidad de A en $\mathcal{C}$.

Ejemplos 1.1.2

- *La categoría **Set** de los conjuntos, cuyos objetos son todos los conjuntos y $Hom_{Set}(A,B)$ son todos los posibles mapeos de A a B.*

- *La categoría **Grp** de los grupos, cuyos objetos son todos los grupos y $Hom_{Grp}(A,B)$ son todos los posibles homomorfismos de grupos entre A y B.*

- *La categoría **Ab** de los grupos abelianos cuyos objetos son todos los grupos abelianos y $Hom_{Ab}(A,B)$ son todos los posibles homomorfismos de grupos abelianos entre A y B.*

- *La categoría **Rng** de los anillos, cuyos objetos son todos los anillos y $Hom_{Rng}(A,B)$ son todos los posibles homomorfismos de anillos entre A y B.*

- *La categoría **Ring** de los anillos unitarios, cuyos objetos son todos los anillos unitarios y $Hom_{Ring}(A,B)$ son todos los homomorfismos de anillos tales que $f(1) = 1$.*

- *La categoría **R-Mod** de los R-módulos izquierdos, cuyos objetos son todos los R-módulos izquierdos y $Hom_{R-Mod}(A,B)$ son todos los posibles R-homomorfismos entre A y B.*

- *La categoría **Mod-R** de los R-módulos derechos, cuyos objetos son todos los R-módulos derechos y $Hom_R(A,B)$ son todoslos posibles R-homomorfismos entre A y B.* ◀

Observación 1.1.3 *Dada una categoría $\mathcal{C}$ se define la categoría $\mathcal{C}^{op}$ como sigue: $obj\mathcal{C}^{op} = obj\mathcal{C}$, $Hom_{\mathcal{C}^{op}}(A,B) = Hom_{\mathcal{C}}(B,A)$ y la función composición $*$ esta dada por $f * g = g \circ f$.* ◀

Definición 1.1.4 Sean $\mathcal{C}$ una categoría y $f \in Hom_{\mathcal{C}}(B, C)$. Decimos que f es un monomorfismo en $\mathcal{C}$ si para cualesquiera $p, q \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ la igualdad $fp = fq$ implica $p = q$. Decimos que f es un epimorfismo en $\mathcal{C}$ si para cualesquiera $p, q \in Hom_{\mathcal{C}}(C, D)$ la igualdad $pf = qf$ implica $p = q$. Decimos que f es un isomorfismo en $\mathcal{C}$ si existe $g \in Hom_{\mathcal{C}}(C, B)$ tal que $fg = i_C$ y $gf = i_B$.

Observación 1.1.5 *Si $h : A \to B$ y $h' : B \to A$ son morfismo tales que $h'h = 1_A$ entonces h es un monomorfismo y h' es un epimorfismo.* ◀

Definición 1.1.6 Un objeto P en $\mathcal{C}$ es proyectivo si para cualquier epimorfismo $f : B \to C$ y morfismo $h : P \to C$ existe un morfismo $s : P \to B$ tal que $fs = h$, es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "s"'] \arrow[d, "h"] \\ B \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd}$$

Definición 1.1.7 Una resolución projectiva $\mathbf{P}$ de $A \in \text{obj}\,\mathcal{C}$ es una sucesión exacta de morfismos $d_i \in Hom_{\mathcal{C}}(P_i, P_{i-1})$, con $i \in \mathbb{N}$, y $\varepsilon : P_0 \to A$.

$$\mathbf{P} = \ldots \to P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0,$$

donde cada P_n es proyectivo.

Definición 1.1.8 Un objeto I en $\mathcal{C}$ es inyectivo si para cualquier monomorfismo $f : B \to C$ y morfismo $h : B \to I$ existe un morfismo $s : C \to I$ tal que $sf = h$, es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & C \arrow[dl, "s"] \\ I & \end{tikzcd}$$

Definición 1.1.9 Una corresolución inyectiva $\mathbf{I}$ de $A \in \text{obj}\,\mathcal{C}$ es una sucesión exacta de morfismos $d_i \in Hom_{\mathcal{C}}(I_{i-1}, I_i)$, con $i \in \mathbb{N}$, y $\varepsilon : A \to I_0$.

$$\mathbf{I} = 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} I_0 \xrightarrow{d_1} I_1 \xrightarrow{d_2} I_2 \to \ldots,$$

donde cada I_n es inyectivo.

Definición 1.1.10 Una categoría $\mathcal{C}$ se dice que tiene suficientes proyectivos si para todo $A \in obj\ \mathcal{C}$ existe un epimorfismo $P \to A$ con P un objeto proyectivo en $\mathcal{C}$.

Definición 1.1.11 Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Decimos que $\mathcal{D}$ es una subcategoría de $\mathcal{C}$ si $obj\mathcal{C} \subset obj\mathcal{D}$, para todo $A, B \in obj\mathcal{D}$ se tiene que $Hom_{\mathcal{D}}(A, B) \subset Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, y si los morfismos identidades en $\mathcal{D}$ coinciden con los morfismos identidades en $\mathcal{C}$.

Ejemplos 1.1.12

- *La categoría **Ab** es subcategoría de la categoría **Grp**.*
- *La categoría **Ring** es subcategoría de la categoría **Rng**.* ◀

Definición 1.1.13 Sea $\mathcal{D}$ una subcategoría de $\mathcal{C}$.

- $\mathcal{D}$ es plena si para todo $A, B \in obj\mathcal{D}$ se tiene que $Hom_{\mathcal{C}}(A, B) = Hom_{\mathcal{D}}(A, B)$.
- $\mathcal{D}$ es cerrada bajo isomorfismos si para todo isomorfismo $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ tal que $A \in \mathcal{D}$ entonces $B \in \mathcal{D}$.
- $\mathcal{D}$ es cerrada bajo sumas directas finitas si para todo $A, B \in \mathcal{D}$ se tiene que $A \amalg B \in \mathcal{D}$.
- $\mathcal{D}$ es cerrado bajo sumandos directos si para todo $A \in \mathcal{D}$ con $A = B \oplus C$ entonces $B \in \mathcal{D}$ y $C \in \mathcal{D}$.

Observación 1.1.14 *Al trabajar mayormente sobre la categoría de los Λ-módulos finitamente generados $\Lambda - mod$, asumiremos, $\mathcal{A}$ cerrada bajo sumas directas finitas cuando se tomen $\mathcal{A}$ cerrada bajo sumas directas.* ◀

Ejemplos 1.1.15

- *La subcategoría $\mathcal{P}$ de **R -Mod**, cuyos objetos son los R-modulos proyectivos; es plena, cerrada bajo isomorfismos, cerrada bajo sumas directas y cerrada bajo sumandos directos.*
- *La subcategoría τ_Λ de $\Lambda - mod$, cuyos objetos son los Λ-módulos de torsión[1]; es plena, cerrada bajo isomorfismos, cerrada bajo sumas directas y cerrada bajo sumandos directos.*

1.1.2 *Funtores*

Definición 1.1.16 Un funtor covariante $\mathcal{F}$ entre las categorias $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ consiste de una correspondencia de $obj\mathcal{C}$ a $obj\mathcal{D}$ y de un mapeo de $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ a $Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(A),\mathcal{F}(B))$ que satisface:

- $\mathcal{F}(i_A) = i_{F(A)}$.
- $\mathcal{F}(\varphi \circ \psi) = \mathcal{F}(\varphi) \circ \mathcal{F}(\psi)$.

Ejemplos 1.1.17

- *Para toda categoría $\mathcal{C}$ se tiene el funtor covariante identidad $1_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ tal que $1_{\mathcal{C}}(A) = A$ para $A \in obj\ \mathcal{C}$ y $1_C(f) = f$ para todo morfismo en $\mathcal{C}$.*
- *Si $\mathcal{C}$ es una subcategoría de $\mathcal{D}$ entonces existe el funtor covariante inclusión $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ que envia cada objeto y cada morfismo de $\mathcal{C}$ en si mismo.*
- *Sea $A \in obj$ **R -Mod** entonces se tiene el funtor covariante $Hom_R(A,\Box) : R - Mod \to Set$ tal que si $M \in R - Mod$ entonces $\Big(Hom_R(A,\Box)\Big)(M) = Hom_R(A,M)$ y si $f \in Hom_R(M,M')$ entonces $\Big(Hom_R(A,\Box)\Big)(f) = f_*$.*
- *Sea $A \in obj$ **Mod-R** entonces se tiene el funtor covariante tensor $A \otimes \Box : R - Mod \to Ab$ tal que si $M \in R - Mod$ entonces $\Big(A \otimes \Box\Big)(M) = A \otimes M$ y si $f \in Hom_R(M,M')$ entonces $\Big(A \otimes \Box\Big)(f) = 1 \otimes f$.* ◀

[1] M es de torsión si $Hom_\Lambda(M,\Lambda) = 0$

Definición 1.1.18 Un funtor contravariante $\mathcal{F}$ entre las categorias $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ consiste de una correspondencia de $obj\mathcal{C}$ a $obj\mathcal{D}$ y de un mapeo de $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ a $Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(B),\mathcal{F}(A))$ que satisface:

- $\mathcal{F}(i_A) = i_{F(A)}$.
- $\mathcal{F}(\varphi \circ \psi) = \mathcal{F}(\psi) \circ \mathcal{F}(\varphi)$.

Ejemplo 1.1.19 *Sea $A \in obj$ **R -Mod** entonces se tiene el funtor contravariante $Hom_R(\Box, A) : R-Mod \to Set$ tal que si $M \in R-Mod$ entonces $\Big(Hom_R(\Box, A)\Big)(M) = Hom_R(M,A)$ y si $f \in Hom_R(M,M')$ entonces $\Big(Hom_R(A,\Box)\Big)(f) = f^*$.* ◀

Dado un funtor contravariante $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, podemos definir el funtor $\overline{\mathcal{F}} : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$ como sigue: en objetos $\overline{\mathcal{F}}(A) = \mathcal{F}(A)$ y en morfismos $\overline{\mathcal{F}}\left(A \xrightarrow{f} B \right) = \mathcal{F}\left(B \xrightarrow{\bar{f}} A \right)$ el cual es un funtor covariante.

Definición 1.1.20 Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ categorías y $\mathcal{F},\mathcal{G} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores covariantes. Una transformación natural entre funtores covariantes η de $\mathcal{F}$ a $\mathcal{G}$ denotado por $\eta : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es una colección de $\mathcal{D}$-mapeos $\eta_A : \mathcal{F}(A) \to \mathcal{G}(A)$, uno para cada $A \in obj\ \mathcal{C}$ tales que el siguiente diagrama conmuta para todo morfismo $f : A \to B$ en la categoria $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] \\ B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{F}(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"'] & \mathcal{G}(A) \arrow[d, "\mathcal{G}(f)"] \\ \mathcal{F}(B) \arrow[r, "\eta_B"] & \mathcal{G}(B) \end{tikzcd}$$

Definición 1.1.21 Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ categorías y $\mathcal{F},\mathcal{G} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores contravariantes. Una transformación natural entre funtores contravariantes η de $\mathcal{F}$ a $\mathcal{G}$ denotado por $\eta : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es una colección de $\mathcal{D}$-mapeos $\eta_A : \mathcal{F}(A) \to \mathcal{G}(A)$, uno para cada $A \in obj\ \mathcal{C}$ tales que el siguiente diagrama conmuta para todo morfismo $f : A \to B$ en la categoria $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] \\ B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{F}(B) \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"'] & \mathcal{G}(B) \arrow[d, "\mathcal{G}(f)"] \\ \mathcal{F}(A) \arrow[r, "\eta_A"] & \mathcal{G}(A) \end{tikzcd}$$

Observación 1.1.22 *Se dice que* η_A *es la componente de* η *correspondiente a* $A \in \mathcal{C}$.

Si todas las componentes de η *son monomorfismos entonces se dice que* η *es un monomorfismo entre funtores covariantes (contravariantes).*

Si todas las componentes de η *son isomorfismos entonces se dice que* η *es un isomorfismo natural y se denota por* $\mathcal{F} \cong \mathcal{G}$. ◀

Definición 1.1.23 Diremos que dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son equivalentes ($\mathcal{C} \cong \mathcal{D}$) si existen funtores $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $\mathcal{G} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tales que $\mathcal{F}\mathcal{G} \cong 1_{\mathcal{D}}$ y $\mathcal{G}\mathcal{F} \cong 1_{\mathcal{C}}$ donde $1_{\mathcal{D}}$ y $1_{\mathcal{C}}$ son los funtores identidad de $\mathcal{D}$ y $\mathcal{C}$ respectivamente. Si $\mathcal{F}$ es un funtor covariante diremos que $\mathcal{F}$ es una equivalencia entre las categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$. Si $\mathcal{F}$ es un funtor contravariante, diremos que $\mathcal{F}$ es una dualidad si $\overline{\mathcal{F}} : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$ es una equivalencia entre las categorías $\mathcal{C}^{op}$ y $\mathcal{D}$.

Definición 1.1.24 Un funtor covariante (contravariante) $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es:

- Fiel, si el morfismo $\mathcal{F}_{A,B} : Hom_{\mathcal{C}}(A,B) \to Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(A),\mathcal{F}(B))$ $\Big(\mathcal{F}_{A,B} : Hom_{\mathcal{C}}(A,B) \to Hom_{\mathcal{D}}\big(\mathcal{F}(B),\mathcal{F}(A)\big)\Big)$ dado por $\mathcal{F}$ es inyectivo para todo $A, B \in obj\mathcal{C}$.
- Pleno, si el morfismo $\mathcal{F}_{A,B} : Hom_{\mathcal{C}}(A,B) \to Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(A),\mathcal{F}(B))$ $\Big(\mathcal{F}_{A,B} : Hom_{\mathcal{C}}(A,B) \to Hom_{\mathcal{D}}\big(\mathcal{F}(B),\mathcal{F}(A)\big)\Big)$ dado por $\mathcal{F}$ es suprayectivo para todo $A, B \in obj\mathcal{C}$.
- Denso, si para cada $M \in \mathcal{D}$, existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $\mathcal{F}(C) \cong M$.

Proposición 1.1.25 ***[Teo. I.1.2 de [ARS1]]*** *Un funtor* $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *es una equivalencia de categorias si y solo si* F *es fiel, pleno y denso.* ■

Proposición 1.1.26 ***[Teo. I.1.4] de [ARS1]]*** *Un funtor* $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *es una dualidad de categorias si y solo si* F *es fiel, pleno y denso.* ■

Definición 1.1.27 Sea $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor covariante (contravariante) se define la subcategoría $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ de $\mathcal{D}$ de la siguiente manera

- $D \in obj\mathcal{F}(\mathcal{C}) \Leftrightarrow$ existe $C \in obj\mathcal{C}$ tal que $\mathcal{F}(C) = D$.
- $g \in Hom_{\mathcal{F}(\mathcal{C})}(\mathcal{F}(C), \mathcal{F}(C') \Leftrightarrow$ existe $g' \in Hom_{\mathcal{C}}(C, C')$ $\Big(g' \in Hom_{\mathcal{C}}(C', C)\Big)$ tal que $\mathcal{F}(g') = g$.
- $\mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(h) = \mathcal{F}(g \circ h)$ $\Big(\mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(h) = \mathcal{F}(h \circ g)\Big)$.
- $1_{\mathcal{F}(C)} = \mathcal{F}(1_C)$.

1.1.3 *R- Categorías*

Definición 1.1.28 Una categoría $\mathcal{C}$ es preaditiva si para cada par de objetos $A, B \in obj\mathcal{C}$ el conjunto $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ es un grupo abeliano y si para $C \in obj\mathcal{C}$, la composición

$$Hom_{\mathcal{C}}(B, C) \times Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \to Hom_{\mathcal{C}}(A, C)$$

es bilineal.

Definición 1.1.29 Una categoría $\mathcal{C}$ es aditiva si es preaditiva y tiene sumas finitas de objetos.

Definición 1.1.30 Sea R un anillo conmutativo artiniano. Una categoría preaditiva $\mathcal{C}$ es una R-categoría si para cada par de objetos $A, B \in obj\mathcal{C}$ el conjunto $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ es un R-módulo y si para $C \in obj\mathcal{C}$, la composición

$$Hom_{\mathcal{C}}(B, C) \times Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \to Hom_{\mathcal{C}}(A, C)$$

es R-bilineal.

Definición 1.1.31 Un funtor covariante (contravariante) $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entre dos categorías preaditivas es aditivo si para cada par de objetos A, B en $\mathcal{C}$, el morfismo inducido

$$Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \to Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B))$$

$$(Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \to Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(B), \mathcal{F}(A)))$$

es un homomorfismo de grupos.

Definición 1.1.32 Un funtor aditivo $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entre dos R-categorías es un R-funtor si el morfismo inducido anteriormente es un R-morfismo de módulos.

Proposición 1.1.33 *Sea $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un R-funtor que es una equivalencia.*

- *Un morfismo $g : B \to C$ en $\mathcal{C}$ es un epimorfismo (monomorfismo) si y solo si $\mathcal{F}(g) : \mathcal{F}(B) \to \mathcal{F}(C)$ es un epimorfismo (monomorfismo) en $\mathcal{D}$.*
- *Un objeto C en $\mathcal{C}$ es proyectivo (inyectivo) si y solo si $\mathcal{F}(C)$ es proyectivo (inyectivo).* ■

Proposición 1.1.34 *Sea $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un R-funtor que es una dualidad.*

- *Un morfismo $g : B \to C$ en $\mathcal{C}$ es un epimorfismo (monomorfismo) si y solo si $\mathcal{F}(g) : \mathcal{F}(C) \to \mathcal{F}(B)$ es un monomorfismo (epimorfismo) en $\mathcal{D}$.*
- *Un objeto C en $\mathcal{C}$ es proyectivo (inyectivo) si y solo si $\mathcal{F}(C)$ es inyectivo (proyectivo).* ■

Definición 1.1.35 Sea $\mathcal{C}$ una R-categoría. Una R-relación $\mathcal{R}$ en $\mathcal{C}$ es una colección de R-submódulos $\mathcal{R}(A,B) \subset Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ para todo $A, B \in obj\ C$ tales que bajo el mapeo composición $Hom_{\mathcal{C}}(B,C) \times Hom_{\mathcal{C}}(A,B) \to Hom_{\mathcal{C}}(A,C)$ se tiene que $Im\left(\mathcal{R}(B,C) \times Hom_{\mathcal{C}}(A,B)\right) \subset \mathcal{R}(A,C)$ y $Im\left(Hom_{\mathcal{C}}(B,C) \times \mathcal{R}(A,B)\right) \subset \mathcal{R}(A,C)$ para todo $A, B, C \in \mathcal{C}$.

1.2 Álgebras de Artin

Definición 1.2.1 Sea R un anillo conmutativo artiniano. Una R-álgebra Λ es un anillo junto con un morfismo de anillos $\phi : R \to \Lambda$ tal que $Im(\phi) \subset Z(\Lambda)$.

Definición 1.2.2 Sea Λ una R-álgebra con R un anillo conmutativo artiniano. Λ es una R-álgebra de Artin o simplemente una álgebra de Artin si Λ es un R-módulo finitamente generado.

Definición 1.2.3

- El radical de un anillo R es la intersección de todos los ideales maximales izquierdos de R.
- Sea M un R-módulo, el radical de M es la intersección de todos los R-submodulos maximales de M.
- Un R-módulo S se dice que es simple si para todo R-submódulo M de S se tiene que $M = 0$ o $M = S$.
- Un R-módulo S se dice qeu es semisimple si es suma directa de R-módulos simples.
- Un R-módulo M se dice que es inescindible si para un par de R-submódulos A, B de M tales que $M = A \oplus B$ se tiene que $A = 0$ o $B = 0$.
- Sea M un R-módulo, el soclo de M es el submódulo de M generado por todos los R-submódulos semisimples de M.

Lema 1.2.4 *Sean k un campo, Λ una k-álgebra, $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ y*

$$0 \longrightarrow L_1 \xrightarrow{f_1} L_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{m-2}} L_{m-1} \xrightarrow{f_{m-1}} L_m \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta de Λ-módulos, entonces

- $\displaystyle\sum_{j=0}^{\frac{m}{2}-1} dim_k\ (L_{1+2j}) = \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}} dim_k\ (L_{2i})$ *si m es par.*
- $\displaystyle\sum_{j=0}^{\frac{m-1}{2}} dim_k\ (L_{1+2j}) = \sum_{i=1}^{\frac{m-1}{2}} dim_k\ (L_{2i})$ *si m es impar.*

Demostración.

La prueba se hará por inducción sobre m.

Para $m = 2$, de la sucesión exacta $0 \longrightarrow L_1 \xrightarrow{f_1} L_2 \longrightarrow 0$ se tiene que f_1 es un isomorfismo y por tanto $dim_k\ (L_1) = dim_k\ (L_2)$.

Para $m = 3$, de la sucesión exacta $0 \longrightarrow L_1 \xrightarrow{f_1} L_2 \xrightarrow{f_2} L_3 \longrightarrow 0$, por el teorema de la dimensión en espacios vectoriales se tiene que:

$$dim_k\ (L_2) = dim_k\ (Im\ f_2) + dim_k\ (ker\ f_2) = dim_k\ (L_3) + dim_k\ (L_1).$$

Supongamos cierto el enunciado para $m = t$.

Sea $0 \longrightarrow L_1 \xrightarrow{f_1} L_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \longrightarrow L_{t-1} \xrightarrow{f_{t-1}} L_t \xrightarrow{f_t} L_{t+1} \longrightarrow 0$ sucesión exacta.

Por lo que de la sucesión exacta $0 \longrightarrow ker\ f_t \longrightarrow L_t \xrightarrow{f_t} L_{t+1} \longrightarrow 0$ se tiene que $dim_k\ (L_t) = dim_k\ (L_{t+1}) + dim_k\ (ker\ f_t)$, de modo que

$$dim_k\ (Im\ f_{t-1}) = dim_k\ (L_t) - dim_k\ (L_{t+1}) \tag{1.2.1}$$

.

- Si t es par, de la sucesión exacta

  $$0 \longrightarrow L_1 \xrightarrow{f_1} L_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \longrightarrow L_{t-1} \xrightarrow{f_{t-1}} Im\ f_{t-1} \longrightarrow 0$$

  se tiene, por hipótesis de inducción,

  $$\sum_{j=0}^{\frac{t}{2}-1} dim_k\ (L_{1+2j}) = \sum_{i=1}^{\frac{t}{2}-1} dim_k\ (L_{2i}) + dim_k\ (Im\ f_{t-1}),$$

  así, al sustituir por 1.2.1, se tiene

  $$\sum_{j=0}^{\frac{t}{2}-1} dim_k\ (L_{1+2j}) = \sum_{i=1}^{\frac{t}{2}-1} dim_k\ (L_{2i}) + dim_k\ (L_t) - dim_k\ (L_{t+1}),$$

  de modo que

  $$\sum_{j=0}^{\frac{t+1-1}{2}} dim_k\ (L_{1+2j}) = \sum_{j=0}^{\frac{t}{2}} dim_k\ (L_{1+2j}) = \sum_{i=1}^{\frac{t}{2}} dim_k\ (L_{2i}) = \sum_{i=1}^{\frac{t+1-1}{2}} dim_k\ (L_{2i}).$$

- Si t es impar, de la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow L_1 \xrightarrow{f_1} L_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \longrightarrow L_{t-1} \xrightarrow{f_{t-1}} Im\ f_{t-1} \longrightarrow 0$$

se tiene, por hipótesis de inducción,

$$\sum_{j=0}^{\frac{t-3}{2}} dim_k\ (L_{1+2j}) + dim_k\ (Im\ f_{t-1}) = \sum_{i=1}^{\frac{t-1}{2}} dim_k\ (L_{2i}),$$

así, al sustituir por 1.2.1, se tiene

$$\sum_{j=0}^{\frac{t-3}{2}} dim_k\ (L_{1+2j}) + dim_k\ (L_t) - dim_k\ (L_{t+1}) = \sum_{i=1}^{\frac{t-1}{2}} dim_k\ (L_{2i}),$$

de modo que

$$\sum_{j=0}^{\frac{t+1}{2}-1} dim_k\ (L_{1+2j}) = \sum_{j=0}^{\frac{t-1}{2}} dim_k\ (L_{1+2j}) = \sum_{i=1}^{\frac{t+1}{2}} dim_k\ (L_{2i}).$$

■

Proposición 1.2.5 *Sea Λ una R-álgebra de Artin entonces la categoría $\Lambda - mod$ tiene suficientes proyectivos.*

Demostración.

Sea $M \in \Lambda - mod$ y sean $m_1, m_2, \ldots, m_s$ un conjunto de generadores de M como Λ-módulo, de esta forma se define el morfismo $f : \Lambda^s \to M$ como $f\Big((\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s)^t\Big) = \lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 + \cdots + \lambda_s m_s$, que, claramente es un epimorfismo, y al ser Λ un Λ-módulo proyectivo se sigue que Λ^s es proyectivo. ■

Lema 1.2.6 ***[Serpiente]*** *Dado el diagrama conmutativo exacto*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha"'] & B_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "\beta"'] & C_1 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_2 \arrow[r, "f_2"] & B_2 \arrow[r, "g_2"] & C_2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

se tiene que la sucesión

$$0 \longrightarrow Ker\ \alpha \xrightarrow{f_{1|}} Ker\ \beta \xrightarrow{g_{1|}} Ker\ \gamma \xrightarrow{\delta} Cok\ \alpha \xrightarrow{f} Cok\ \beta \xrightarrow{g} Cok\ \gamma \longrightarrow 0$$

es exacta, donde f y g son los morfismos inducidos y para $c \in \ker\ \gamma$ se define $\delta(c) = \overline{x}$ donde $f_2(x) = \beta(y)$ con $g_1(y) = c$.

Demostración.

- Sean $y_1, y_2 \in B_2$ tales que $g_1(y_1) = g_1(y_2)$ entonces $\delta(y_2 - y_1) = \overline{0}$ y así δ esta bien definida.

- Claramente $f_{1|}$ es un monomorfismo y g es un epimorfismo.

- Sea $x \in Ker\ \alpha$, entonces $g_{1|}f_{1|}(x) = g_{1|}f_1(x) = g_1f_1(x) = 0$, de modo que $Im\ f_{1|} \subset Ker\ g_{1|}$. Por otro lado, para $y \in Ker\ g_{1|}$, existe $a \in A_1$ tal que $f_1(a) = y$, de modo que $f_2\alpha(a) = 0$ y as´Ã $\alpha(a) = 0$, es decir $a \in Ker\ \alpha$. Luego $Im\ f_{1|} = Ker\ g_{1|}$.

- Sea $x \in Ker\ \beta$, entonces $\delta g_{1|}(x) = \overline{y}$ donde $f_2(y) = \beta(x) = 0$ de modo que $y = 0$ y así $Im\ g_{1|} \subset Ker\delta$. Por otro lado, para $y \in Ker\ \delta$ se tiene que $\overline{0} = \delta(y) = \overline{x}$ donde $f_2(x) = \beta(z)$ con $g_1(z) = y$, así, existe $a \in A_1$ tal que $\alpha(a) = x$, luego $f_1(a) - z \in Ker\ \beta$ y $g_{1|}\Big(f_1(a) - z\Big) = g_1(z) = y$, es decir $Im\ g_{1|} = Ker\ \delta$.

- Sea $x \in Ker\ \gamma$, entonces $f\delta(x) = f(\overline{y})$ donde $f_2(y) = \beta(z)$ con $g_1(z) = x$, es decir $f\delta(x) = \overline{f_2(y)} = \overline{\beta(z)} = \overline{0}$, es decir $Im\ \delta \subset Ker\ f$. Por otro lado, para $\overline{y} \in Ker\ f$ existe $b \in B_1$ tal que $f_2(y) = \beta(b)$, Así $g_1(b) \in Ker\ \gamma$ y $\delta\Big(g_1(b)\Big) = \overline{y}$. Luego $Im\ \delta = Ker\ f$.

- Sea $\overline{x} \in Cok\alpha$, entonces $gf(\overline{x}) = g\overline{f_2(x)} = \overline{g_2f_2(x)} = \overline{0}$, es decir $Im\ f \subset Ker\ g$. Por otro lado, para $\overline{y} \in Ker\ g$ existe $c \in C_1$ tal que $\gamma(c) = g_2(y)$, así existe $b \in B_1$ tal que $\beta(b) - y \in Ker\ g_2$ y existe $a \in A_2$ tal que $f\overline{a} = \overline{f_2(a)} = \overline{\beta(b) - y} = \overline{y}$. De modo que $Im\ f = Ker\ g$. ∎

Lema 1.2.7 ***[Herradura]*** *Sea* $0 \longrightarrow L \xrightarrow{i} M \xrightarrow{d} N \longrightarrow 0$ *sucesión exacta en* $\Lambda - mod$ *y sean* $\ldots \to P_1 \xrightarrow{\rho_1} P_0 \xrightarrow{\pi_L} L$ *,* $\ldots \to Q_1 \xrightarrow{\delta_1} Q_0 \xrightarrow{\pi_N} N$ *resoluciones proyectivas de* L *y* N *respectivamente entonces existe resolución proyectiva* $\ldots \to M_1 \xrightarrow{\varepsilon_1} M_0 \xrightarrow{\pi_M} M$ *de* M *tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "\rho_1"'] & M_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "\varepsilon_1"'] & Q_1 \arrow[r] \arrow[d, "\delta_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_0 \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "\pi_L"'] & M_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "\pi_M"'] & Q_0 \arrow[r] \arrow[d, "\pi_N"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "i"] & M \arrow[r, "d"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Demostración.

Considere el diagrama exacto conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_0 \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, "\pi_L"'] & P_0 \amalg Q_0 \arrow[r, "(0,1)"] \arrow[d, "(i\pi_L,t)"'] & Q_0 \arrow[r] \arrow[d, "\pi_N"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "i"] & M \arrow[r, "d"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde $t : Q_0 \to M$ es tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
 & Q_0 \arrow[dl, "t"'] \arrow[d, "\pi_N"] \\
M \arrow[r, "d"] & N.
\end{tikzcd}$$

Luego, por el lema de la serpiente 1.2.6, se tiene la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Ker\ \pi_L \xrightarrow{\binom{1}{0}|} Ker\ (i\pi_L, t) \xrightarrow{(0,1)|} Ker\ \pi_N \xrightarrow{\delta} 0 \xrightarrow{f} Cok\ (i\pi_L, t) \xrightarrow{g} 0 \longrightarrow 0$$

Así, $Ker\ \pi_L \xrightarrow{\binom{1}{0}_{|}} Ker\ (i\pi_L, t) \xrightarrow{(0,1)_{|}} Ker\ \pi_N$ es sucesión exacta corta y $(i\pi_L, t)$ es un epimorfismo. Luego se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, "\rho_1"'] & P_1 \amalg Q_1 \arrow[r, "(0,1)"] \arrow[d, "\left(\binom{1}{0}_{|}\rho_1, t_1\right)"'] & Q_1 \arrow[r] \arrow[d, "\delta_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Ker\ \pi_L \arrow[r, "\binom{1}{0}_{|}"'] & Ker\ (i\pi_L, t) \arrow[r, "(0,1)_{|}"'] & Ker\ \pi_N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde $t_1 : Q_1 \to Ker\ (i\pi_L, t)$ es tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
 & Q_1 \arrow[dl, "t_1"'] \arrow[d, "\delta_1"] \\
Ker\ (i\pi_L, t) \arrow[r, "(0,1)_{|}"'] & Ker\ \pi_N.
\end{tikzcd}$$

Luego, por el lema de la serpiente 1.2.6, se tiene la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Ker\ \rho_1 \xrightarrow{\binom{1}{0}_{|}} Ker\ \left(\binom{1}{0}_{|}\rho_1, t_1\right) \xrightarrow{(0,1)_{|}} Ker\ \delta_1 \xrightarrow{\delta} 0 \xrightarrow{f} Cok\ \left(\binom{1}{0}_{|}\rho_1, t_1\right) \xrightarrow{g} 0 \longrightarrow 0.$$

Así, $Ker\ \rho_1 \xrightarrow{\binom{1}{0}_{|}} Ker\ \left(\binom{1}{0}_{|}\rho_1, t_1\right) \xrightarrow{(0,1)_{|}} Ker\ \delta_1$ es sucesión exacta corta y $\left(\binom{1}{0}_{|}\rho_1, t_1\right)$ es un epimorfismo.

Continuando recursivamente se obtiene el resultado. ∎

Definición 1.2.8 Sea Λ un anillo y $f \in Hom_\Lambda(A, B)$

- f es un morfismo minimal derecho si para todo morfismo $g \in End_\Lambda(A)$ tal que $fg = f$ es un isomorfismo.
- f es un morfismo minimal izquierdo si para todo morfismo $g \in End_\Lambda(B)$ tal que $gf = f$ es un isomorfismo.
- f es epimorfismo esencial si f es un epimorfismo y para todo morfismo g tal que fg es un epimorfismo se tiene que g es un epimorfismo.

- f es monomorfismo esencial si f es un monomorfismo y para todo morfismo g tal que gf es un monomorfismo se tiene que g es un monomorfismo.
- f es cubierta proyectiva de B si f es un epimorfismo esencial y A es un Λ-módulo proyectivo.
- f es envolvente inyectiva de A si f es un monomorfismo esencial y B es un Λ-módulo inyectivo.

Definición 1.2.9

- Una resolución proyectiva de M

$$\ldots \to P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

  se dice que es minimal si ε es cubierta proyectiva de M, d_1 es cubierta proyectiva de $Ker\ \varepsilon$ y d_i es cubierta proyectiva de $Ker\ d_{i-1}$.

- Una corresolución inyectiva de M

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varepsilon} I_0 \xrightarrow{d_1} I_1 \xrightarrow{d_2} I_2 \to \ldots$$

  se dice que es minimal si ε es envolvente inyectiva de M, d_1 es envolvente inyectiva de $Cok\ \varepsilon$ y d_i es envolvente inyectiva de $Cok\ d_{i-1}$.

Proposición 1.2.10 ***(4.1 de [ARS1])*** *Sea $M \in \Lambda - mod$ con Λ una R-álgebra de Artin y sea $f : P \to M$ un epimorfismo con P un Λ-módulo proyectivo. Entonces f es cubierta proyectiva de M si y solo si f es morfismo minimal derecho.* ■

Proposición 1.2.11 *Sean Λ una R-álgebra de Artin y $M \in \Lambda - mod$ entonces*

- *M tiene cubierta proyectiva.*
- *M tiene envolvente inyectiva.*

Demostración.

Se sigue de las proposiciones 6.3 y 7.6 de [CCJP1] y del teorema 4.2 de [ARS1]. ■

Corolario 1.2.12 *Sean Λ una R-álgebra de Artin y M un Λ-modulo entonces*

- *M tiene una resolución proyectiva minimal.*
- *M tiene una corresolución inyectiva minimal.* ■

Observaciones 1.2.13

- *La resolución proyectiva minimal es única salvo isomorfía.*
- *Se dice que A tiene dimensión proyectiva n denotado por $dim_P(A) = n$, si en la resolución proyectiva minimal de A se tiene que $P_i \neq 0$ para $i \leq n$ y $P_i = 0$ para $i > n$. Si no existe n con esta propiedad entonces se dice que A tiene dimensión proyectiva infinita.*
- *La corresolución inyectiva minimal es única salvo isomorfía.*
- *Se dice que A tiene dimensión inyectiva n denotado por $dim_I(A) = n$, si en la corresolución inyectiva minimal de A se tiene que $I_i \neq 0$ para $i \leq n$ y $I_i = 0$ para $i > n$. Si no existe n con esta propiedad entonces se dice que A tiene dimensión inyectiva infinita.*
- *$dim_P(A) = m$ si y solo si $Ext^n_\Lambda(A, X) = 0$ para $m > n$ y $Ext^n_\Lambda(A, X) \neq 0$ para $m \leq n$ para todo Λ-módulo X.* ◀

Lema 1.2.14 *Sea $A \to B \to C$ una sucesión exacta corta. Entonces*

- $dim_P(A) \leq max\{dim_P(B), dim_P(C)\}$
- $dim_P(B) \leq max\{dim_P(A), dim_P(C)\}$
- $dim_P(C) \leq max\{dim_P(A), dim_P(B)\} + 1$

Demostración.

Se sigue de la observación 1.2.13 y de la sucesión exacta larga

$$
\begin{array}{l}
0 \longrightarrow Hom_\Lambda(C,X) \longrightarrow Hom_\Lambda(B,X) \longrightarrow Hom_\Lambda(A,X) \\
\longrightarrow Ext^1_\Lambda(C,X) \longrightarrow Ext^1_\Lambda(B,X) \longrightarrow Ext^1_\Lambda(A,X) \\
\longrightarrow Ext^2_\Lambda(C,X) \longrightarrow Ext^2_\Lambda(B,X) \longrightarrow Ext^2_\Lambda(A,X) \\
\longrightarrow \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
\longrightarrow Ext^n_\Lambda(C,X) \longrightarrow Ext^n_\Lambda(B,X) \longrightarrow Ext^n_\Lambda(A,X) \\
\longrightarrow \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots
\end{array}
$$

■

Definición 1.2.15

- Para $n \in \mathbb{N}$ se define pd_n la subcategoría plena de $\Lambda - Mod$ cuyos objetos son los Λ-módulos de dimensión proyectiva menor o igual a n.
- fpd es la subcategoría plena de $\Lambda - Mod$ cuyos objetos son los Λ-módulos de dimensión proyectiva finita.

Proposición 1.2.16

- pd_n *es cerrada bajo extensiones, cerrada bajo sumandos directos y cerrada bajo sumas directas.*
- fpd *es cerrada bajo extensiones, cerrada bajo sumandos directos y cerrada bajo sumas directas.*

Demostración.

De acuerdo con la prueba del lema de la herradura 1.2.7 se tiene que si $A \to B \to C$ es una sucesión exacta corta entonces $dim_P(B) \leq max\{dim_P(A), dim_P(C)\}$, de modo que pd_n y fpd son cerradas bajo extensiones y por lo tanto cerradas bajo sumas directas. Ahora bien, si $M = M' \oplus M''$ con $M \in pd_n$,

$$\ldots \to P_2' \xrightarrow{d_2'} P_1' \xrightarrow{d_1'} P_0' \xrightarrow{\varepsilon'} M' \longrightarrow 0$$

y

$$\ldots \to P_2'' \xrightarrow{d_2''} P_1'' \xrightarrow{d_1''} P_0'' \xrightarrow{\varepsilon''} M'' \longrightarrow 0$$

resoluciones proyectivas minimales de M' y M'' respectivamente entonces

$$\ldots \to P_2' \oplus P_2'' \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} d_2' & 0 \\ 0 & d_2'' \end{smallmatrix}\right)} P_1' \oplus P_1'' \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} d_1' & 0 \\ 0 & d_1'' \end{smallmatrix}\right)} P_0' \oplus P_0'' \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} \varepsilon' & 0 \\ 0 & \varepsilon'' \end{smallmatrix}\right)} M \longrightarrow 0$$

es resolución proyectiva minimal de M. De modo que existe $m \leq n$ tal que $P_i' \oplus P_i'' \neq m$ y $P_i' \oplus P_i'' = 0$ para $i > m$, luego M' y M'' son objetos de pd_n, es decir, pd_n es cerrada bajo sumandos directos. Análogamente fpd es cerrada bajo sumandos directos. ∎

1.3 PULL - BACK Y PUSH - OUT

Lema 1.3.1 *Sean $A, B, C \in \Lambda-mod$, $f \in Hom_\Lambda(A, B)$ y $Hom_\Lambda(B, C)$ entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

i) $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ *es sucesión exacta.*

ii) g *es un epimorfismo,* $gf = 0$ *y para todo morfismo* $h : X \to B$ *tal que* $gh = 0$ *existe un morfismo* $h' : X \to A$ *tal que* $fh' = h$.

iii) f *es un monomorfismo,* $gf = 0$ *y para todo morfismo* $h : X \to B$ *tal que* $hf = 0$ *existe un morfismo* $h' : C \to X$ *tal que* $h'g = h$.

Demostración.

i) $\Rightarrow$ **ii)** Sea $h : X \to B$ un morfismo tal que $gh = 0$, de modo que si $x \in X$ entonces existe un único $a \in A$ tal que $f(a) = h(x)$, así el morfismo $h' : X \to A$ definido por $h'(x) = a$ tal que $f(a) = h(x)$ esta bien definido y es tal que $fh' = h$.

i) $\Rightarrow$ **iii)** Sea $h : B \to X$ un morfismo tal que $hf = 0$, de modo que si $c \in C$ entonces existe $b \in B$ tal que $g(b) = c$. Definimos $h' : C \to X$ como $h'(c) = h(b)$, donde $g(b) = c$. Sean $b, b' \in B$ tales que $g(b) = c = g(b')$ entonces existe $a \in A$ tal que $f(a) = b - b'$, así $h(b) - h(b') = h(b - b') = hf(a) = 0$, luego $h(b) = h(b')$, es decir h' esta bien definida y es tal que $h'g = h$.

ii) $\Rightarrow$ **i)** Sea $\alpha : Y \to A$ un morfismo tal que $f\alpha = 0$, de modo que $gf\alpha = 0$ y así existe un único morfismo $\alpha' : Y \to A$ tal que $f\alpha' = f\alpha$, luego, $\alpha' = \alpha = 0$, es decir f es un monomorfismo. Por otro lado considere el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} Ker\ g \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, "0"] & \\ B \arrow[r, "g"] & C, \end{tikzcd}$$

donde, i es la inclusión canónica, luego, existe un único morfismo $i' : Ker_g \to A$ tal que $fi' = i$, así si $b \in Ker\ g$ entonces $b = i(b) = fi'(b) \in Imf$. Luego $Im\ f = Ker\ g$.

iii) $\Rightarrow$ **i)** Sea $\beta : C \to Y$ un morfismo tal que $\beta g = 0$, de modo que $\beta gf = 0$ y así existe un único morfismo $\beta' : C \to Y$ tal que $\beta' g = \beta g$, luego $\beta' = \beta = 0$, es decir, g es un epimorfismo. Por otro lado considere el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "0"'] & B \arrow[d, "\pi"] \\ & Cok\ f, \end{tikzcd}$$

donde, π es la proyección canónica, luego, existe un único morfismo $\pi' : C \to Cok\ f$ tal que $\pi' g = \pi$, así si $b \in Ker\ g$ entonces $\overline{b} = \pi' g(b) = \pi'(0) = \overline{0}$, es decir $b \in Im\ f$. Luego $Im\ f = Ker\ g$. ∎

Definición 1.3.2 Sean $f : A \to B$ y $g : A \to C$ morfismos en la categoría $\mathcal{C}$, se dice que los morfismos $u : B \to D$ y $v : C \to D$ son un $push - out$ de f y g si $uf = vg$ y para cualesquiera morfismos $u' : B \to D'$ y $v' : C \to D'$ tales que $u'f = v'g$ existe un único morfismo $h : D \to D'$ tal que $hu = u'$ y $hv = v'$.

Definición 1.3.3 Sean $f : A \to B$ y $g : C \to B$ morfismos en la categoría $\mathcal{C}$, se dice que los morfismos $u : D \to A$ y $v : D \to C$ son un $pull - back$ de f y g si $fu = gv$ y para cualesquiera morfismos $u' : D' \to A$ y $v' : D' \to C$ tales que $fu' = gv'$ existe un único morfismo $h : D' \to D$ tal que $uh = u'$ y $vh = v'$.

Proposición 1.3.4 *Sean* $u \in Hom_{\mathcal{C}}(B, D)$, $v \in Hom_{\mathcal{C}}(C, D)$, $u' \in Hom_{\mathcal{C}}(B, D')$, $v' \in Hom_{\mathcal{C}}(C, D')$ *tales que las parejas* (u, v) *y* (u', v') *son* $push - out$ *de los morfismos* $f : A \to B$ *y* $g : A \to C$ *entonces* D *es isomorfo a* D'*.*

Demostración.

De acuerdo a la definición 1.3.2 se tienen diagramas conmutativos

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "u"] \arrow[ddr, bend left, "u'"] & \\
C \arrow[r, "v"] \arrow[drr, bend right, "v'"'] & D \arrow[dr, dashed, "h"] & \\
& & D'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "u'"] \arrow[ddr, bend left, "u"] & \\
C \arrow[r, "v'"] \arrow[drr, bend right, "v"'] & D' \arrow[dr, dashed, "h'"] & \\
& & D
\end{tikzcd}
$$

de modo que $hh'u' = u'$, $hh'v' = v'$, $h'hu = u$ y $h'hv = v$ y de los diagramas conmutativos

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "u"] \arrow[ddr, bend left, "u"] & \\
C \arrow[r, "v"] \arrow[drr, bend right, "v"'] & D \arrow[dr, dashed, "h'h"] & \\
& & D
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "u'"] \arrow[ddr, bend left, "u'"] & \\
C \arrow[r, "v'"] \arrow[drr, bend right, "v'"'] & D' \arrow[dr, dashed, "hh'"] & \\
& & D'
\end{tikzcd}
$$

se tiene que $hh' = 1_{D'}$ y $h'h = 1_D$, así, h es un isomorfismo, por la observación 1.1.5. ■

Proposición 1.3.5 *Sean $u \in Hom_{\mathcal{C}}(D, A)$, $v \in Hom_{\mathcal{C}}(D, C)$, $u' \in Hom_{\mathcal{C}}(D', A)$, $v' \in Hom_{\mathcal{C}}(D', C)$ tales que las parejas (u, v) y (u', v') son $pull - back$ de los morfismos $f : A \to B$ y $g : C \to B$ entonces D es isomorfo a D'.*

Demostración.

De acuerdo a la definición 1.3.3 se tienen diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd}
D' \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[drr, bend left, "u'"] \arrow[ddr, bend right, "v'"'] & & \\
& D \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & A \arrow[d, "f"] \\
& C \arrow[r, "g"] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, dashed, "h'"] \arrow[drr, bend left, "u"] \arrow[ddr, bend right, "v"'] & & \\
& D' \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "v'"'] & A \arrow[d, "f"] \\
& C \arrow[r, "g"] & B
\end{tikzcd}$$

de modo que $u'h'h = u'$, $v'h'h = v'$, $uhh' = u$ y $vhh' = v$ y de los diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, dashed, "hh'"] \arrow[drr, bend left, "u"] \arrow[ddr, bend right, "v"'] & & \\
& D \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & A \arrow[d, "f"] \\
& C \arrow[r, "g"] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
D' \arrow[dr, dashed, "h'h"] \arrow[drr, bend left, "u'"] \arrow[ddr, bend right, "v'"'] & & \\
& D' \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "v'"'] & A \arrow[d, "f"] \\
& C \arrow[r, "g"] & B
\end{tikzcd}$$

se tiene que $hh' = 1_D$ y $h'h = 1_{D'}$, así, h es un isomorfismo, por la observación 1.1.5. ■

Lema 1.3.6 ***[Lemas 2.2.5 y 2.2.6 de [G1]]*** *Considere el diagrama exacto conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "g'"] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

- *Existe $s : B \to A'$ tal que $sf = \alpha$ si y solo si existe $t : C \to B'$ tal que $f't = \gamma$.*
- *Si $\gamma = 1_C$ entonces los morfismos f y α son un $pull - back$ de β y f'.*
- *Si $\alpha = 1_A$ entonces los morfismos g' y γ son un $push - out$ de β y g.* ■

Lema 1.3.7 *Sean $f : A \to B$ y $g : A \to C$ morfismos de R-módulos entonces existen morfismos $u : B \to D$ y $v : C \to D$ tales que u y v son $push - out$ de f y g. Más aún si f es un monomorfismo entonces v es un monomorfismo.*

Demostración.

Considere el submódulo S de $B \oplus C$ definido por $S = \{\big(f(a), -g(a)\big) \in B \oplus C | a \in A\}$ y se definen $D = B \oplus C/S$, $u : B \to D$ y $v : C \to D$ como $u(b) = \overline{(b,0)}$ y $v(c) = \overline{(0,c)}$. Sea $a \in A$, entonces $uf(a) = \overline{\big(f(a),0\big)} = \overline{\big(f(a),0\big)} + \overline{\big(-f(a), g(a)\big)} = \overline{\big(0, g(a)\big)} = vg(a)$, es decir el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "u"] \\ C \arrow[r, "v"] & D \end{tikzcd}$$

conmuta. Ahora, sean $u' : B \to D'$ y $v' : C \to D'$ morfismos tales que $u'f = v'g$. Considere el mapeo $h : D \to D'$ definido por $h\Big(\overline{(b,c)}\Big) = u'(b) + v'(c)$. Sean $\overline{(b,c)} = \overline{(b',c')}$ entonces $(b-b', c-c') \in S$, de modo que existe $a \in A$ tal que $b - b' = f(a)$ y $c - c' = -g(a)$ luego $h\Big(\overline{(b-b', c-c')}\Big) = u'(b-b') + v'(c-c') = u'f(a) + v'(-g(a)) = v'g(a) - v'g(a) = 0$, es decir h esta bien definida y claramente es un R-morfismo tal que $hu = u'$ y $hv = v'$. Sea $h' : D \to D'$ tal que $h'u = u'$ y $h'v = v'$ entonces para $\overline{(b,c)} \in D$ se tiene que $h'\Big(\overline{(b,c)}\Big) = h'\Big(\overline{(b,0)}\Big) + h'\Big(\overline{(0,c)}\Big) = h'u(b) + h'v(c) = u'(b) + v'(c) = h\Big(\overline{(b,c)}\Big)$.

Ahora suponga que f es un monomorfismo y sea $c \in C$ tal que $v(c) = 0$ entonces $(0,c) \in S$, y así, existe $a \in A$ tal que $c = -g(a)$ y $0 = f(a)$, de modo que al ser f un monomorfismo se tiene que $a = 0$, luego $c = 0$, es decir, v es un monomorfismo. ■

Lema 1.3.8 *Sean $f : A \to B$ y $g : C \to B$ morfismos de R-módulos entonces existen morfismos $u : D \to A$ y $v : D \to C$ tales que u y v son $pull-back$ de f y g. Más aún si g es un epimorfismo entonces u es un epimorfismo.*

Demostración.

Considere el submódulo D de $A \oplus C$ definido por $D = \{(a,c) \in A \oplus C | f(a) = g(c)\}$ y sean $\pi_1 : A \oplus C \to A$, $\pi_2 : A \oplus C \to C$ la proyecciones canónicas y $j : D \to A \oplus C$ la inclusión canónica. De esta forma se define $u = \pi_1 j$ y $v = \pi_2 j$, así para $(a,c) \in D$ se tiene que $fu\big((a,c)\big) = f\pi_1 j\big((a,c)\big) = f\pi_1\big((a,c)\big) = f(a) = f(c) = g\pi_2 j\big((a,c)\big) = gv\big((a,c)\big)$, es decir el diagrama

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"'] & C \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

conmuta. Ahora sean $u' : D' \to A$ y $v' : D' \to C$ tales que $fu' = gv'$. Sea define $h : D' \to D$ como $h(d) = \big(u'(d), v'(d)\big)$ y claramente h es un morfismo de R-módulos tal que $uh = u'$ y $vh = v'$. Sea $h' : D' \to D$ tal que $uh' = u'$ y $vh' = v'$ entonces para $d \in D'$ se tiene que $h'(d) = (a, c)$ y así $u'(d) = uh'(d) = u\big((a, c)\big) = \pi_1 j(a, c) = a$, análogamente $v'(d) = c$, luego $h'(d) = \big(u'(d), v'(d)\big) = h(d)$.

Ahora suponga que g es un epimorfismo y sea $a \in A$, de modo que existe $c \in C$ tal que $g(c) = f(a)$. Luego $(a, c) \in D$ y $u\big((a, c)\big) = a$, es decir, u es un epimorfismo. ■

Proposición 1.3.9 *Sea* $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ *una sucesión exacta corta.*

a) Para todo morfismo $h : Z \to C$ se tiene un diagrama exacto conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

donde β y γ son $pull - back$ de g y h, más aún, g y h son $push - out$ de β y γ.

b) Para todo morfismo $h : A \to X$ se tiene un diagrama exacto conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\gamma"'] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\alpha"] & Y \arrow[r, "\beta"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

donde α y γ son $push - out$ de f y h, más aún, f y g son $pull - back$ de α y γ.

Demostración.

a) Sea $h : Z \to C$ entonces por el lema 1.3.8 existen morfismos $\beta : Y \to Z$ y $\gamma : Y \to B$ que son $pull - back$ de h y g con β un epimorfismo. Luego del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[drr, bend left, "0"] \arrow[ddr, bend right, "f"'] & & \\
& Y \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"'] & Z \arrow[d, "h"] \\
& B \arrow[r, "g"] & C
\end{tikzcd}$$

existe un único morfismo $\alpha : A \to Y$ tal que $\beta\alpha = 0$ y $\gamma\alpha = f$. Ahora bien, sea $\varphi : X \to Y$ un morfismo tal que $\beta\varphi = 0$ entonces $g\gamma\varphi = h\beta\varphi = 0$ y por el lema 1.3.1 existe un único morfismo $\varphi' : X \to A$ tal que $f\varphi' = \gamma\varphi$ y del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[drr, bend left, "0"] \arrow[dr, "\varphi - \alpha\varphi'"] \arrow[ddr, bend right, "0"'] & & \\
& Y \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"'] & Z \arrow[d, "h"] \\
& B \arrow[r, "g"] & C
\end{tikzcd}$$

se tiene que $\varphi = \alpha\varphi'$ y así, $A \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z$ es sucesión exacta corta por el lema 1.3.1. Luego por el lema 1.3.6 el diagrama conmutativo exacto

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

cumple con lo requerido.

b) Sea $h : A \to X$ entonces por el lema 1.3.7 existen morfismos $\alpha : X \to Y$ y $\gamma : B \to Y$ que son $push - out$ de h y f con α un monomorfismo. Luego del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "\gamma"] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\
X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[drr, bend right, "0"'] & Y & \\
& & C
\end{tikzcd}$$

existe un único morfismo $\beta : Y \to C$ tal que $\beta\alpha = 0$ y $\beta\gamma = g$. Ahora bien, sea $\varphi : Y \to Z$ un morfismo tal que $\varphi\alpha = 0$ entonces $\varphi\gamma f = \varphi\alpha h = 0$ y por el lema 1.3.1 existe un único morfismo $\varphi' : C \to Z$ tal que $\varphi' g = \varphi\gamma$ y del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "\gamma"] \arrow[ddr, bend left, "0"] & \\
X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[drr, bend right, "0"'] & Y \arrow[dr, "\varphi-\varphi'\beta"'] & \\
 & & Z
\end{tikzcd}$$

se tiene que $\varphi = \varphi'\beta$ y así, $X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} C$ es sucesión exacta corta por el lema 1.3.1. Luego por el lema 1.3.6 el diagrama conmutativo exacto

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\gamma"'] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\alpha"] & Y \arrow[r, "\beta"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

cumple con lo requerido.

1.4 ANILLOS DE MATRICES TRIANGULARES

Sean T, U anillos y ${}_UM_T$ un U-T-bimódulo. Se contruye el anillo de matrices triangular $\Lambda = \begin{pmatrix} T & 0 \\ M & U \end{pmatrix}$ como sigue:

- Los elementos de Λ son matrices de 2×2 de la forma $\begin{pmatrix} t & 0 \\ m & u \end{pmatrix}$ con $t \in T$, $m \in M$ y $u \in U$.

- La suma y la multiplicación estan dadas por las operaciones usuales de matrices:

$$\begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ m_1 & u_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_2 & 0 \\ m_2 & u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 + t_2 & 0 \\ m_1 + m_2 & u_1 + u_2 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ m_1 & u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_2 & 0 \\ m_2 & u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1t_2 & 0 \\ m_1t_2 + u_1m_2 & u_1u_2 \end{pmatrix}$$

Observación 1.4.1 $\Lambda^{op} = \begin{pmatrix} U^{op} & 0 \\ {}_{T^{op}}M_{U^{op}} & T^{op} \end{pmatrix}$. ◀

Proposición 1.4.2 ***(III, 2.1 de [ARS1])*** *Sea* $\Lambda = \begin{pmatrix} T & 0 \\ {}_UM_T & U \end{pmatrix}$ *donde* T, U *son anillos y* ${}_UM_T$ *es un* U-T*-bimódulo.*

a) Λ *es anillo artiniano izquierdo si y solo si* T *y* U *son anillos artinianos izquierdos y* M *es finitamente generado como* U*-módulo.*

b) Λ *es anillo artiniano derecho si y solo si* T *y* U *son anillos artinianos derechos y* M *es finitamente generado como* T*-módulo.*

c) Λ *es una álgebra de Artin si y solo si existe un anillo conmutativo* R *tal que* T *y* U *son* R*-álgebras de Artin, y* M *es finitamente generado sobre* R*, el cual actúa centralmente en* M*, esto es,* $rm = mr$ *para todo* $r \in R$ *y para todo* $m \in M$*.* ■

Observación 1.4.3 *De ahora en adelante a lo largo de esta sección asumiremos que* $\Lambda = \begin{pmatrix} T & 0 \\ M & U \end{pmatrix}$ *es una álgebra de Artin. Si* C *es un módulo sobre una álgebra de Artin* $\Lambda = \begin{pmatrix} T & 0 \\ M & U \end{pmatrix}$ *entonces los idempotentes* $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *y* $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *nos proporcionan una descomposición* $C = e_1C \oplus e_2C$ *en una suma de grupos abelianos; además* e_1C *tiene una estructura de* T*-módulo y* e_2C *tiene una estructura de* U*-módulo. Se define* $\psi_C : M \times e_1C \to e_2C$ *como* $\psi_C(m, e_1c) = e_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ m & 0 \end{pmatrix} c$. ◀

Proposición 1.4.4 *Sean* $C \in \Lambda - mod$*, entonces* ψ_C *es* T*-bilineal y, en consecuencia, se tiene un* U*-morfismo* $\overline{\psi_C} : M \otimes_T e_1C \to e_2C$*.*

Demostración.

De acuerdo a la definición de Ψ_C se tiene que:

$$\begin{aligned}
\psi_C\left(m, e_1c_1 + e_1c_2\right) &= \psi_C\left(m, e_1(c_1 + c_2)\right) \\
&= e_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ m & 0 \end{pmatrix} (c_1 + c_2) \\
&= e_2 \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ m & 0 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ m & 0 \end{pmatrix} c_2 \right) \\
&= e_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ m & 0 \end{pmatrix} c_1 + e_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ m & 0 \end{pmatrix} c_2 \\
&= \psi_C(m, e_1c_1) + \psi_C(m, e_1c_2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_C(m_1 + m_2, e_1c) &= e_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ m_1 + m_2 & 0 \end{pmatrix} c \\
&= e_2 \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ m_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ m_2 & 0 \end{pmatrix} \right) c \\
&= e_2 \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ m_1 & 0 \end{pmatrix} c + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ m_2 & 0 \end{pmatrix} c \right) \\
&= e_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ m_1 & 0 \end{pmatrix} c + e_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ m_2 & 0 \end{pmatrix} c \\
&= \psi_C(m_1, e_1c) + \psi_C(m_2, e_1c),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\psi_C(mt, e_1c) &= e_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ mt & 0 \end{pmatrix} c \\
&= e_2 \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) c \\
&= e_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ m & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} c \right) \\
&= \psi_C \left(m, e_1 \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} c \right) \\
&= \psi_C \left(m, t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} c \right) \\
&= \psi_C(m, te_1c).
\end{aligned}
$$

Así ψ_C es T-bilineal y, por la propiedad universal del producto tensorial, existe un único morfismo de grupos abelianos $\overline{\psi_C} : M \otimes_T e_1C \to e_2C$ definido por:

$$
\overline{\psi_C} \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \otimes e_1c_i \right) = \sum_{i}^{n} \psi_C(m_i, e_1c_i)
$$

tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$
\begin{tikzcd}
M \times e_1C \arrow[r, "\psi_C"] \arrow[d, "\pi"'] & e_2C \\
M \otimes_T e_1C \arrow[ur, "\overline{\psi_C}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Luego se tiene que

$$\begin{aligned}
\overline{\psi_C}\left(u\sum_{i=1}^{n} m_i\otimes e_1c_i\right) &= \overline{\psi_C}\left(\sum_{i=1}^{n} um_i\otimes e_1c_i\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\psi_C(um_i, e_1c_i)\\
&= \sum_{i=1}^{n} e_2\begin{pmatrix} 0 & 0\\ um_i & 0\end{pmatrix} c_i\\
&= \sum_{i=1}^{n} e_2\left(\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & u\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0\\ m_i & 0\end{pmatrix}\right) c_i\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(e_2\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & u\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 0 & 0\\ m_i & 0\end{pmatrix} c_i\\
&= \sum_{i=1}^{n}\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & u\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0\\ m_i & 0\end{pmatrix} c_i\\
&= \sum_{i=1}^{n} ue_2\begin{pmatrix} 0 & 0\\ m_i & 0\end{pmatrix} c_i\\
&= u\sum_{i=1}^{n} e_2\begin{pmatrix} 0 & 0\\ m_i & 0\end{pmatrix} c_i\\
&= u\sum_{i=1}^{n}\psi(m_i, e_1c_i)\\
&= u\overline{\psi_C}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\otimes e_1c_i\right),
\end{aligned}$$

es decir $\overline{\psi_C}$ es un morfismo de U-módulos izquierdos. ■

Esto nos proporciona una forma de visualizar a los módulos sobre un anillo de matrices triangulares Λ de una forma más conveniente, para esto se define la siguiente categoría.

Definición 1.4.5 Sea $\Lambda = \begin{pmatrix} T & 0\\ M & U\end{pmatrix}$ una R-álgebra de matrices triangulares, se define la categoría ${}_{\Lambda}\mathcal{C}$ en objetos, como las ternas (A, B, f), donde $A\in T-mod$, $B\in U-mod$ y $f: M\otimes_T A\to B$ es un U-morfismo.

Un morfismo $(\alpha, \beta) : (A, B, f) \to (A', B', f')$ en ${}_{\Lambda}\mathcal{C}$ es una pareja α , β, donde $\alpha : A \to A'$ es un T-morfismo, $\beta : B \to B'$ es un U-morfismo y tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \otimes_T A \arrow[r, "1\otimes\alpha"] \arrow[d, "f"'] & M \otimes_T A' \arrow[d, "f'"] \\ B \arrow[r, "\beta"] & B' \end{tikzcd}$$

conmuta.

Proposición 1.4.6 *${}_{\Lambda}\mathcal{C}$ es una R-categoría.*

Demostración.

Sean $C = (A, B, f),\ C' = (A', B', f') \in obj\mathcal{C}$ y sean (α, β) , $(\gamma, \delta) \in Hom\ _{{}_{\Lambda}\mathcal{C}}(C, C')$. Se define la suma de (α, β) y (γ, δ) como el morfismo $(\alpha + \gamma, \beta + \delta)$. Esta operación está bien definida ya que

$$\begin{aligned} \Big(f' \circ \Big(1 \otimes (\alpha + \gamma)\Big)\Big)(m \otimes a) &= f'\Big(m \otimes \Big(\alpha(a) + \gamma(a)\Big)\Big) \\ &= \Big(f' \circ \Big(1 \otimes \alpha\Big)\Big)(m \otimes a) + \Big(f' \circ \Big(1 \otimes \gamma\Big)\Big)(m \otimes a) \\ &= \Big(\beta \circ f\Big)(m \otimes a) + \Big(\delta \circ f\Big)(m \otimes a) \\ &= \Big((\beta + \delta) \circ f\Big)(m \otimes a). \end{aligned}$$

Claramente $Hom\ _{{}_{\Lambda}\mathcal{C}}(C, C')$ es un grupo abeliano y así ${}_{\Lambda}\mathcal{C}$ es categoría preaditiva.

Si $(A, B, f),\ (A', B', f) \in obj\ {}_{\Lambda}\mathcal{C}$ se define el objeto suma como la terna $(A \amalg A', B \amalg B', (f, f')\varphi)$ donde φ es el isomorfismo entre $M \otimes_T (A \amalg A')$ y $(M \otimes_T A) \amalg (M \otimes_T A')$, luego ${}_{\Lambda}\mathcal{C}$ es categoría aditiva.

Sea $r \in R$, $C = (A, B, f),\ C' = (A', B', f') \in obj\mathcal{C}$ y $(\alpha, \beta) \in Hom\ _{{}_{\Lambda}\mathcal{C}}(C, C')$, se define el producto de (α, β) por r como $(r\alpha, r\beta)$. Este producto escalar por elementos de R, le da a $Hom\ _{{}_{\Lambda}\mathcal{C}}(C, C')$ una estructura de R-módulo y por lo tanto ${}_{\Lambda}\mathcal{C}$ es una R-categoría. ■

Observación 1.4.7 *La relación entre ${}_{\Lambda}\mathcal{C}$ y $\Lambda - mod$ es a través del funtor $\mathcal{F} : {}_{\Lambda}\mathcal{C} \to \Lambda - mod$ que se define de la siguiente manera:*

- *En objetos: Si* $(A,B,f) \in obj\ {}_{\Lambda}\mathcal{C}$ *se define* $\mathcal{F}\Big((A,B,f)\Big) = A \amalg B$ *como grupo abeliano, y la estructura de* Λ*-módulo está dada a través del producto* $\begin{pmatrix} t & 0 \\ m & u \end{pmatrix}(a,b) = \Big(ta, f(m \otimes a) + ub\Big)$ *para* $t \in T$, $u \in U$, $m \in M$, $a \in A$ *y* $b \in B$.

- *En morfismos: Si* $(\alpha,\beta) : (A,B,f) \to (A',B',f') \in {}_{\Lambda}\mathcal{C}$ *se define* $\mathcal{F}\Big((\alpha,\beta)\Big) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} :$ $A \amalg B \to A' \amalg B'$. ◀

Proposición 1.4.8 *Sea* $\Lambda = \begin{pmatrix} T & 0 \\ M & U \end{pmatrix}$ *una álgebra de matrices triangulares. Entonces el funtor* $\mathcal{F} : {}_{\Lambda}\mathcal{C} \to \Lambda - mod$ *es un* R*-funtor, más aún* $\mathcal{F}$ *es una equivalencia de categorías.*

Demostración. Sean $C = (A,B,f)$, $C' = (A',B',f') \in {}_{\Lambda}\mathcal{C}$, $(\alpha,\beta),(\gamma,\delta) \in Hom_{\ {}_{\Lambda}\mathcal{C}}(C,C')$ y $r \in R$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\Big(r(\alpha,\beta) + (\gamma,\delta)\Big) &= \mathcal{F}\Big((r\alpha, r\beta) + (\gamma,\delta)\Big) \\
&= \mathcal{F}\Big((r\alpha + \gamma, r\beta + \delta)\Big) \\
&= \begin{pmatrix} r\alpha + \gamma & 0 \\ 0 & r\beta + \delta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} r\alpha & 0 \\ 0 & r\beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \\
&= r\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \\
&= r\mathcal{F}\Big((\alpha,\beta)\Big) + \mathcal{F}\Big((\gamma,\delta)\Big)
\end{aligned}$$

de modo que $\mathcal{F}$ es un R-funtor.

Sea $(\alpha,\beta) : (A,B,f) \to (A',B',f') \in {}_{\Lambda}\mathcal{C}$ tal que $0 = \mathcal{F}\Big((\alpha,\beta)\Big) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, entonces $\alpha = 0$ y $\beta = 0$. Luego $\mathcal{F}$ es fiel.

Sean $C = (A, B, f), C' = (A', B', f') \in obj\ {}_\Lambda\mathcal{C}$ y $s \in Hom_\Lambda\Big(\mathcal{F}(C), \mathcal{F}(C')\Big)$, así se tiene un mapeo $s = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_3 & s_4 \end{pmatrix} : A \amalg B \to A' \amalg B'$, sea $(a', b') = s(a, b)$ para $a \in A$ y $b \in B$ de modo que $(s_1(a), s_3(a)) = s(a, 0) = s(e_1(a, b)) = e_1 s(a, b) = e_1(a', b') = (a', 0)$, así $s_3(a) = 0$ para toda $a \in A$; de forma análoga $s_2(b) = 0$ para todo $b \in B$ es decir $s = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_4 \end{pmatrix}$. Para $m \in M$ sea $\tilde{m} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ m & 0 \end{pmatrix}$, entonces

$$\begin{aligned} s(\tilde{m}(a, 0)) &= s(0, f(m \otimes a)) \\ &= (0, s_4 f(m \otimes a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{m}s(a, 0) &= \tilde{m}(s_1(a), 0) \\ &= (0, f'(m \otimes s_1(a))) \end{aligned}$$

de modo que $f' \circ (1 \otimes s_1) = s_4 f$, es decir, el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \otimes_T A \arrow[r, "1\otimes s_1"] \arrow[d, "f"'] & M \otimes A' \arrow[d, "f'"] \\ B \arrow[r, "s_4"'] & B' \end{tikzcd}$$

conmuta, luego $(s_1, s_4) \in Hom\ {}_\Lambda\mathcal{C}(C, C')$ y $\mathcal{F}\Big((s_1, s_4)\Big) = s$. Por lo tanto $\mathcal{F}$ es pleno.

Sea $C \in \Lambda - mod$, entonces $(e_1 C, e_2 C, \overline{\psi_C}) \in obj\ {}_\Lambda\mathcal{C}$. Considere el mapeo

$$\varphi : \mathcal{F}\Big((e_1 C, e_2 C, \overline{\psi_C})\Big) \to C$$

definido por $\varphi\left(e_1c_1, e_2c_2\right) = e_1c_1 + e_2c_2$ de modo que

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\begin{pmatrix} t & 0 \\ m & u \end{pmatrix}(e_1c_1, e_2c_2)\right) &= \varphi\Big(\big(te_1c_1, \overline{\psi_C}(m \otimes e_1c_1) + ue_2c_2\big)\Big) \\
&= \varphi\Big(\big(te_1c_1, e_2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ m & 0 \end{pmatrix}c_1 + ue_2c_2\big)\Big) \\
&= \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}c_1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ m & 0 \end{pmatrix}c_1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}c_2 \\
&= \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}c_1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ m & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}c_1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}c_2 \\
&= \begin{pmatrix} t & 0 \\ m & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}c_1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}c_1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}c_2 \\
&= \begin{pmatrix} t & 0 \\ m & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}c_1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}c_2 + \begin{pmatrix} t & 0 \\ m & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}c_2 \\
&= \begin{pmatrix} t & 0 \\ m & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}c_1 + \begin{pmatrix} t & 0 \\ m & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}c_2 \\
&= \begin{pmatrix} t & 0 \\ m & u \end{pmatrix}(e_1c_1 + e_2c_2) \\
&= \begin{pmatrix} t & 0 \\ m & u \end{pmatrix}\varphi\Big((e_1c_1, e_2c_2)\Big),
\end{aligned}$$

es decir, φ es un morfismo de Λ-módulos y claramente φ es un isomorfismo, de modo que $\mathcal{F}$ es denso.

Así, por la proposición 1.1.25, $\mathcal{F}$ es una equivalencia entre las categorías ${}_{\Lambda}\mathcal{C}$ y $\Lambda - mod$. ■

Proposición 1.4.9 *Sean A, R, S, T anillos unitarios, M un $S - A$-bimódulo, N un $R - S$-bimódulo y U un $R - T$-bimódulo. Entonces $Hom_R(N \otimes_S M, U) \cong Hom_S(M, Hom_R(N, U))$ como $A - T$-bimódulos.*

Demostración.

Se define $\tau : Hom_R(N \otimes_S M, U) \to Hom_S(M, Hom_R(N, U))$ como $\Big(\tau(f)[m]\Big)(n) = f(n \otimes m)$.

Sean $f \in Hom_R(N \otimes_S M, U)$, $r \in R$, $m \in M$ y $n_1, n_2 \in N$ entonces

$$\begin{aligned}
\Big(\tau(f)[m]\Big)(rn_1 + n_2) &= f((rn_1 + n_2) \otimes m) \\
&= f(rn_1 \otimes m + n_2 \otimes m) \\
&= f(r(n_1 \otimes m)) + f(n_2 \otimes m) \\
&= rf(n_1 \otimes m) + f(n_2 \otimes m) \\
&= r\Big(\tau(f)[m]\Big)(n_1) + \Big(\tau(f)[m]\Big)(n_2)
\end{aligned}$$

de modo que $\tau(f)[m] \in Hom_R(N, U)$.

Sean $f \in Hom_R(N \otimes_S M, U)$, $s \in S$, $n \in N$ y $m_1, m_2 \in M$ entonces

$$\begin{aligned}
\Big(\tau(f)[sm_1 + m_2]\Big)(n) &= f(n \otimes (sm_1 + m_2)) \\
&= f(n \otimes sm_1 + n \otimes m_2) \\
&= f(n \otimes sm_1) + f(n \otimes m_2) \\
&= f(ns \otimes m_1) + f(n \otimes m_2) \\
&= \Big(\tau(f)[m_1]\Big)(ns) + \Big(\tau(f)[m_2](n) \\
&= s\Big(\tau(f)[m_1]\Big)(n) + \Big(\tau(f)[m_2](n) \\
&= \bigg(s\Big(\tau(f)[m_1]\Big) + \tau(f)[m_2]\bigg)(n)
\end{aligned}$$

Como la identidad es cierta para cada $n \in N$ se sigue que $\tau(f)[sm_1 + m_2] = s\Big(\tau(f)[m_1] + \tau(f)[m_2]$ y así $\tau(f) \in Hom_S(M, Hom_R(N, U))$.

Por lo tanto τ está bien definida.

Sean $a \in A$, $t \in T$, $m \in M$, $n \in N$ y $f_1, f_2 \in Hom_R(N \otimes_S M, U)$ entonces

$$\begin{aligned}
\Big(\tau(af_1 + f_2t)[m]\Big)(n) &= (af_1 + f_2t)(n \otimes m) \\
&= af_1(n \otimes m) + f_2t(n \otimes m) \\
&= f_1((n \otimes m)a) + (f_2(n \otimes m))t \\
&= f_1(n \otimes ma) + \Big(\Big(\tau(f_2)[m]\Big)(n)\Big)t \\
&= \Big(\tau(f_1)[ma]\Big)(n) + \Big(\Big(\tau(f_2)[m]\Big)t\Big)(n) \\
&= \Big(\tau(f_1)[m]\Big)(n) + \Big(\tau(f_2)t[m]\Big)(n),
\end{aligned}$$

de modo que $a\tau(f_1)[m] + \tau(f_2)t[m] = \tau(af_1 + f_2t)[m]$ y así $a\tau(f_1) + \tau(f_2)t = \tau(af_1 + f_2t)$. Por lo tanto τ es morfismo de $A-T$-bimódulos.

Sea $g \in Hom_S(M, Hom_R(N, U))$, se define $g_0 : N \times M \to U$ como $g_0\Big((n, m)\Big) = g[m](n)$. Entonces

$$\begin{aligned}
g_0\Big((n_1 + n_2, m)\Big) &= g[m](n_1 + n_2) \\
&= g[m](n_1) + g[m](n_2) \\
&= g_0\Big((n_1, m)\Big) + g_0\Big((n_2, m)\Big),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_0\Big((n, m_1 + m_2)\Big) &= g[m_1 + m_2](n) \\
&= \Big(g[m_1] + g[m_2]\Big)(n) \\
&= g[m_1](n) + g[m_2](n) \\
&= g_0\Big((n, m_1)\Big) + \Big((n, m_2)\Big),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_0\Big((ns, m)\Big) &= g[m](ns) \\
&= \Big(sg[m]\Big)(n) \\
&= g[sm](n) \\
&= g_0\Big((n, sm)\Big).
\end{aligned}$$

Se sigue que g_0 es S-biaditiva y por la propiedad universal del producto tensorial existe un único morfismo $\eta(g) : N \otimes_S M \to U$ que se define en elementos homogéneos como $\eta[g](n \otimes m) = g_0\Big((n,m)\Big) = g[m](n)$.

Se define $\eta : Hom_S(M, Hom_R(N,U)) \to Hom_R(N \otimes_S M, U)$ como $\eta(g) = \eta[g]$. Sea $n \in N$, $m \in M$, $r \in R$ y $g \in Hom_S(M, Hom_R(N,U))$ entonces

$$\begin{aligned}
\eta(g)(rn \otimes m) &= \eta[g](rn \otimes m) \\
&= g[m](rn) \\
&= r\Big(g[m](n)\Big) \\
&= r\Big(\eta[g](n \otimes m)\Big) \\
&= r\Big(\eta(g)(n \otimes m)\Big),
\end{aligned}$$

de modo que $\eta(g) \in Hom_R(N \otimes_S M, U)$ y así η está bien definido. Por otro lado

$$\begin{aligned}
\Big(\tau\eta(g)[m]\Big)(n) &= \eta(g)(n \otimes m) \\
&= g[m](n)
\end{aligned}$$

por lo tanto $\tau\eta(g) = g$, además

$$\begin{aligned}
\Big(\eta\tau(f)\Big)(n \otimes m) &= \Big(\tau(f)[m]\Big)(n) \\
&= f(n \otimes m)
\end{aligned}$$

por lo tanto $\eta\tau(f) = f$.

Luego τ es un isomorfismo de $A - T$-bimódulos. ■

Proposición 1.4.10 *Sean A, R, S, T anillos unitarios, M un $S - A$-bimódulo, N un $R - S$-bimódulo y U un $R - T$-bimódulo entonces:*

a) Los funtores covariantes $Hom_S(M, Hom_R(N, \Box))$ y $Hom_R(N \otimes_S M, \Box)$ son naturalmente isomorfos.

b) Los funtores contravariantes $Hom_S(M, Hom_R(\Box, U))$ y $Hom_R(\Box \otimes_S M, U)$ son naturalmente isomorfos.

c) *Los funtores contravariantes* $Hom_S(\square, Hom_R(N,U))$ *y* $Hom_R(N\otimes_S \square, U)$ *son naturalmente isomorfos.*

Demostración.

a)

Sea U' un $R-T$-bimódulo. Se define $\eta_{U'} : Hom_S(M, Hom_R(N,U')) \to Hom_R(N\otimes_S M, U')$ como en la proposición 1.4.9. De esta forma se debe verificar que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
Hom_S(M, Hom_R(N,U_1)) \arrow[r, "\eta_{U_1}"] \arrow[d, "h_{**}"'] & Hom_R(N\otimes_S M, U_1) \arrow[d, "h_*"] \\
Hom_S(M, Hom_R(N,U_2)) \arrow[r, "\eta_{U_2}"] & Hom_R(N\otimes_S M, U_2)
\end{tikzcd}$$

conmuta para todo $h : U_1 \to U_2$ morfismo de $R-T$-bimódulos.

Sean $g \in Hom_S(M, Hom_R(N,U_1)$, $n\in N$ y $m \in M$, entonces

$$\begin{aligned}
\Big(h_*\Big(\eta_{U_1}(g)\Big)\Big)[n\otimes m] &= h\Big(\eta(g)[n\otimes m]\Big) \\
&= h\Big(g[m](n)\Big) \\
&= \Big(h\circ g[m]\Big)(n) \\
&= \Big(h_*(g[m])\Big)(n) \\
&= \Big((h_*\circ g)[m]\Big)(n) \\
&= \Big(h_{**}(g)[m]\Big)(n) \\
&= \Big(\eta_{U_2}\Big(h_{**}(g)\Big)\Big)[n\otimes m].
\end{aligned}$$

b)

Sea M' un $S-A$-bimódulo. Se define $\eta_{M'} : Hom_S(M', Hom_R(N,U)) \to Hom_R(N\otimes_S M', U)$ como en la proposición 1.4.9. De esta forma se debe verificar que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
Hom_S(M_1, Hom_R(N,U)) \arrow[r, "\eta_{M_1}"] & Hom_R(N\otimes_S M_1, U) \\
Hom_S(M_2, Hom_R(N,U)) \arrow[r, "\eta_{M_2}"] \arrow[u, "h^*"] & Hom_R(N\otimes_S M_2, U) \arrow[u, "(1\otimes_S h)^*"']
\end{tikzcd}$$

conmuta para todo $h : M_1 \to M_2$ morfismo de $S - A$-bimódulos.

Sean $g \in Hom_S(M_2, Hom_R(N, U))$, $n \in N$, $m \in M_2$, entonces

$$\begin{aligned}\Big(\eta_{M_1}\big(h^*(g)\big)\Big)[n \otimes m] &= \big(\eta_{M_1}(gh)\big)[n \otimes m] \\ &= \big(g \circ h[m]\big)(n) \\ &= \big(g[h(m)]\big)(n) \\ &= \eta_{M_2}(g)[n \otimes h(m)] \\ &= (\eta_{M_2} g) \circ (1 \otimes_S h)[n \otimes m] \\ &= (1 \otimes_S h)^*\big(\eta_{M_2}(g)\big)[n \otimes m].\end{aligned}$$

c)

Sea N' un $R - T$-bimódulo. Sea define $\eta_{N'} : Hom_S(M, Hom_R(N', U)) \to Hom_R(N' \otimes_S M, U)$ como en la proposición 1.4.9. De esta forma se debe verificar que el diagrama

$$\begin{tikzcd} Hom_S(M, Hom_R(N_1, U)) \arrow[r, "\eta_{N_1}"] & Hom_R(N_1 \otimes_S M, U) \\ Hom_S(M, Hom_R(N_2, U)) \arrow[u, "(h^*)_*"] \arrow[r, "\eta_{N_2}"] & Hom_R(N_2 \otimes_S M, U) \arrow[u, "(h \otimes_S 1)^*"'] \end{tikzcd}$$

conmuta para todo $h : N_1 \to N_2$ morfismo de $R - T$-bimódulos.

Sean $g \in Hom_S(M, Hom_R(N_2, U))$, $n \in N_2$ y $m \in M$, entonces

$$\begin{aligned}\Big(\eta_{N_1}\big((h^*)_*(g)\big)\Big)[n \otimes m] &= \Big(\big((h^*)_*(g)\big)[m]\Big)(n) \\ &= \Big(\big(h^* \circ g\big)[m]\Big)(n) \\ &= \big(h^*(g[m])\big)(n) \\ &= \big(g[m] \circ h\big)(n) \\ &= g[m]\big((h(n)\big) \\ &= \big(\eta_{N_2}(g)\big)[h(n) \otimes m] \\ &= \big(\eta_{N_2}(g) \circ (h \otimes_S 1)\big)[n \otimes m] \\ &= \Big((h \otimes_S 1)^*\big(\eta_{N_2}(g)\big)\Big)[n \otimes m].\end{aligned}$$

■

Definición 1.4.11 Sea $\Lambda = \begin{pmatrix} T & 0 \\ M & U \end{pmatrix}$ una R-álgebra de matrices triangulares, se define la categoría ${}_{\Lambda}\tilde{\mathcal{C}}$ en objetos, como las ternas (A, B, f), con $A \in T - mod$, $B \in U - mod$ y $f : A \to Hom_U(M, B)$ es un T-morfismo. Un morfismo $(\alpha, \beta) : (A, B, f) \to (A', B', f')$ en ${}_{\Lambda}\tilde{\mathcal{C}}$ es una pareja α , β, donde $\alpha : A \to A'$ es un T-morfismo, $\beta : B \to B'$ es un U-morfismo y tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & A' \arrow[d, "f'"] \\ Hom_U(M,B) \arrow[r, "\beta_*"] & Hom_U(M,B') \end{tikzcd}$$

conmuta.

Proposición 1.4.12 *${}_{\Lambda}\tilde{\mathcal{C}}$ es una R-categoría.*

Demostración.

Sean $C = (A, B, f)$, $C' = (A', B', f') \in obj\mathcal{C}$ y sean (α, β) , $(\gamma, \delta) \in Hom\ {}_{\Lambda}\mathcal{C}(C, C')$. Se define la suma de (α, β) y (γ, δ) como el morfismo $(\alpha + \gamma, \beta + \delta)$. Esta operación está bien definida ya que

$$\begin{aligned} \Big(f' \circ (\alpha + \gamma)\Big)(a) &= f'\Big(\alpha(a) + \gamma(a)\Big) \\ &= \Big(f' \circ \alpha\Big)(a) + \Big(f' \circ \gamma\Big)(a) \\ &= \Big(\beta_* \circ f\Big)(a) + \Big(\delta_* \circ f\Big)(a) \\ &= \Big((\beta + \delta)_* \circ f\Big)(a). \end{aligned}$$

Claramente $Hom\ {}_{\Lambda}\tilde{\mathcal{C}}(C, C')$ es un grupo abeliano y así ${}_{\Lambda}\tilde{\mathcal{C}}$ es una categoría preaditiva.

Si (A, B, f), $(A', B', f) \in obj\ {}_{\Lambda}\tilde{\mathcal{C}}$ se define el objeto suma como la terna $(A \amalg A', B \amalg B', \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f' \end{pmatrix})$, así ${}_{\Lambda}\tilde{\mathcal{C}}$ es categoría aditiva.

Sea $r \in R$, $C = (A, B, f)$, $C' = (A', B', f') \in obj\tilde{\mathcal{C}}$ y $(\alpha, \beta) \in Hom\ {}_{\Lambda}\tilde{\mathcal{C}}(C, C')$, se define el producto de (α, β) por r como $(r\alpha, r\beta)$. Este producto escalar por elementos de R, le da a $Hom\ {}_{\Lambda}\tilde{\mathcal{C}}(C, C')$ una estructura de R-módulo y por lo tanto ${}_{\Lambda}\tilde{\mathcal{C}}$ es una R-categoría. ■

Se definen los funtores $\mathcal{G} : {}_\Lambda\mathcal{C} \to {}_\Lambda\tilde{\mathcal{C}}$ y $\mathcal{H} : {}_\Lambda\tilde{\mathcal{C}} \to {}_\Lambda\mathcal{C}$ de la siguiente manera:

- En objetos:
  - Si $(A, B, f) \in obj\ {}_\Lambda\mathcal{C}$ se define $\mathcal{G}\Big((A, B, f)\Big) = (A, B, \tau(f))$ con τ como en la proposición 1.4.9.
  - Si $(A, B, f) \in obj\ {}_\Lambda\tilde{\mathcal{C}}$ se define $\mathcal{H}\Big((A, B, f)\Big) = (A, B, \eta(f))$ con η como en la proposición 1.4.9.
- En morfismos:
  - Si $(\alpha, \beta) : (A, B, f) \to (A', B', f') \in {}_\Lambda\mathcal{C}$ se define $\mathcal{G}\Big((\alpha, \beta)\Big) = (\alpha, \beta)$.
  - Si $(\alpha, \beta) : (A, B, f) \to (A', B', f') \in {}_\Lambda\tilde{\mathcal{C}}$ se define $\mathcal{H}\Big((\alpha, \beta)\Big) = (\alpha, \beta)$.

Proposición 1.4.13 *El funtor $\mathcal{G}$ es un R-isomorfismo entre las categorías ${}_\Lambda\mathcal{C}$ y ${}_\Lambda\tilde{\mathcal{C}}$ con inversa $\mathcal{H}$.*

Demostración.

Es suficiente probar que $\mathcal{G}$ es un R-funtor, ya que claramente $\mathcal{GH} = 1_{\,{}_\Lambda\tilde{\mathcal{C}}}$ y $\mathcal{HG} = 1_{\,{}_\Lambda\mathcal{C}}$.

Sean $C = (A, B, f)$, $C' = (A', B', f') \in {}_\Lambda\mathcal{C}$, $(\alpha, \beta), (\gamma, \delta) \in Hom_{\,{}_\Lambda\mathcal{C}}(C, C')$ y $r \in R$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}\Big(r(\alpha, \beta) + (\gamma, \delta)\Big) &= \mathcal{G}\Big((r\alpha, r\beta) + (\gamma, \delta)\Big) \\
&= \mathcal{G}\Big((r\alpha + \gamma, r\beta + \delta)\Big) \\
&= (r\alpha + \gamma, r\beta + \delta) \\
&= r(\alpha, \beta) + (\gamma, \delta) \\
&= r\mathcal{G}\Big((\alpha, \beta)\Big) + \mathcal{G}\Big((\gamma, \delta)\Big)
\end{aligned}$$

de modo que $\mathcal{G}$ es un R-funtor. ■

1.5 SUCESIONES QUE CASI SE DIVIDEN Y MORFISMOS IRREDUCIBLES.

1.5.1 *Sucesiones que casi se dividen.*

Lema 1.5.1 *Sean $f : A \to B$ y $g : B \to A$ tales que $gf = 1_A$ entonces $B = Im\ f \oplus Ker\ g$.*

Demostración.

Sea $b \in B$, entonces $g(b) = gfg(b)$ de modo que $b - fg(b) \in Ker\ g$ y así $B = Im\ f + Ker\ g$. Si $b \in Im\ f \cap Ker\ g$ entonces $0 = g(b) = gf(a) = a$ y así $b = 0$, luego $B = Im\ f \oplus Ker\ g$. ■

Definición 1.5.2

- $f : A \to B$ se dice que es una sección si existe morfismo $g : B \to A$ tal que $gf = 1_A$.
- $g : B \to C$ se dice que es una retracción si existe morfismo $f : C \to B$ tal que $gf = 1_C$.

Observación 1.5.3 *Si $A \xrightarrow{f} B$ no es sección, entonces la composición $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ tampoco lo es (si lo fuese existe $h : C \to A$ tal que $(hg)f = h(gf) = 1_A$, lo que contradice la definición de f). Similarmente si $B \xrightarrow{g} C$ no es retracción, entonces la composición $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ tampoco lo es.* ◀

Proposición 1.5.4 *Sea $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{d} C$ una sucesión exacta corta entonces los siguientes enunciados son equivalentes*

i) i es sección.

ii) d es retracción.

iii) Existe isomorfismo $\varphi : A \amalg C \to B$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, equal] & A \amalg C \arrow[r, "(0,1)"] \arrow[d, "\varphi"'] & C \arrow[d, equal] \\
A \arrow[r, "i"] & B \arrow[r, "d"] & C
\end{tikzcd}$$

.

Demostración.

i) $\Rightarrow$ iii) se sigue del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\binom{i'}{d}"'] & C \arrow[d, equal] \\
A \arrow[r, "\binom{1}{0}"] & A \amalg C \arrow[r, "(0,1)"] & C
\end{tikzcd}$$

donde i' es tal que $i'i = 1_A$.

ii) $\Rightarrow$ iii) se sigue del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, equal] & A \amalg C \arrow[r, "(0,1)"] \arrow[d, "(i{,}d')"'] & C \arrow[d, equal] \\
A \arrow[r, "i"] & B \arrow[r, "d"] & C
\end{tikzcd}$$

donde d' es tal que $dd' = 1_C$.

iii) $\Rightarrow$ i) y ii) se sigue del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & & C \arrow[dl, "\binom{0}{1}"'] \arrow[d, equal] \\
A \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, equal] & A \amalg C \arrow[r, "(0,1)"] \arrow[d, "\varphi"'] & C \arrow[d, equal] \\
A \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\varphi^{-1}"'] & C \arrow[d, equal] \\
A \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, equal] & A \amalg C \arrow[r, "(0,1)"] \arrow[dl, "(1{,}0)"] & C \\
A & &
\end{tikzcd}$$

■

Observación 1.5.5 *Si la sucesión exacta corta* $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{d} C$ *cumple con alguna de las equivalencias de la proposición 1.5.4 se dice que la sucesión se divide, se encinde o que es divisible.*

◄

Lema 1.5.6 *Sea* $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ *una sucesión exacta corta que no se divide*

a) Si A *es inescindible entonces* g *es morfismo minimal derecho.*

b) Si C *es inescindible entonces* f *es morfismo minimal izquierdo.*

Demostración.

a) Por el teorema I.2.2 de [ARS1] se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed, "\varphi"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\psi"', "\cong"] & C \arrow[d, equal] \\ K \arrow[r, "j"] & B_1 \oplus B_2 \arrow[r, "(g_1,0)"] & C \end{tikzcd}$$

donde g_1 es la versión minimal de g y $K = Ker\ g_1 \oplus B_2$, así φ es un isomorfismo y por tanto K es inescindible. Si $Ker\ g_1 = 0$ entonces la sucesión exacta corta $B_2 \xrightarrow{\binom{0}{1}} B_1 \oplus B_2 \xrightarrow{(g_1,0)} C$ se divide de modo que η se divide lo que es una contradicción. Por lo tanto $B_2 = 0$ y g es morfismo minimal derecho.

b) Es análogo. ■

Definición 1.5.7 Sea $\mathcal{A}$ subcategoría plena de $\Lambda - mod$ cerrada bajo sumas directas, cerrada bajo isomorfismos y cerrada bajo sumandos directos

- $f : A \to B$ con A y $B \in \mathcal{A}$ se dice que es morfismo izquierdo que casi se divide en $\mathcal{A}$ si no es sección y para todo morfismo $g : A \to C$, con $C \in A$, que no es sección, existe un morfismo $\tilde{g} : B \to C$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[dl, dashed, "\tilde{g}"] \\ C & \end{tikzcd}$$

Si f es un morfismo minimal izquierdo se dice que es un morfismo minimal izquierdo que casi se divide en $\mathcal{A}$.

- Se dice que $\mathcal{A}$ tiene morfismos izquierdos que casi se dividen si para cada $A \in \mathcal{A}$ existe un morfismo izquierdo que casi se divide que comienza en A.

- $g : B \to C$ se dice que es morfismo derecho que casi se divide en $\mathcal{A}$ si no es retracción y para todo morfismo $f : A \to C$, con $A \in \mathcal{A}$, que no es retracción, existe un morfismo $\tilde{f} : A \to B$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, dashed, "\tilde{f}"'] \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

  Si g es un morfismo minimal derecho se dice que es un morfismo minimal derecho que casi se divide en $\mathcal{A}$.

- Se dice que $\mathcal{A}$ tiene morfismos derechos que casi se dividen si para todo $A \in \mathcal{A}$ existe un morfismo derecho que casi se divide que termina en A.

- $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ es sucesión que casi se divide en $\mathcal{A}$ si es sucesión exacta corta, f es morfismo izquierdo que casi se divide en $\mathcal{A}$ y g es morfismo derecho que casi se divide en $\mathcal{A}$.

Observación 1.5.8 *Si $\mathcal{A} = \Lambda - mod$ entonces en las definiciones de 1.5.7 se omitira la referencia a la categoría.* ◀

Proposición 1.5.9 *Sean S un Λ-módulo simple no inyectivo y $j : S \to I(S)$ la envolvente inyectiva de S entonces la proyección $\pi : I(S) \to Cok\ j$ es un morfismo minimal izquierdo que casi se divide.*

Demostración.

Sea $h : Cok\ j \to Cok\ j$ tal que $h\pi = \pi$, entonces h es epimorfismo ya que π es epimorfismo y claramente h es un monomorfismo, es decir, h es un isomorfismo y así π es un morfismo minimal izquierdo. Por otro lado π no es sección (de otra forma π es monomorfismo y S es cero lo que contradice la definición de S)y para $g : I(S) \to L$ un Λ-morfismo que no es sección se tiene que si $Ker\ g = 0$ entonces g es monomorfismo y se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} I(S) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "1_{I(S)}"'] & L \arrow[dl, dashed] \\ I(S) & \end{tikzcd}$$

lo que contradice la definición de g, así $Ker\ g \neq 0$. Ahora bien si $j(S) \cap Ker\ g = 0$, considere el morfismo $\rho : I(S) \to I(S)/Ker\ g$ y sea $n \in Ker\ \rho \circ j$, entonces $j(n) \in Ker \rho = Ker\ g$ por lo que $j(n) = 0$ y así $n = 0$, es decir $\rho \circ j$ es un monomorfismo y al ser j un monomorfismo esencial se tiene que ρ es un monomorfismo lo que contradice $Ker\ g \neq 0$, de modo que $j(S) \cap Ker\ g \neq 0$. Luego $j(S) < Ker\ g$ y por el primer teorema de isomorfía para módulos existe $h : Cok\ j \to L$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} I(S) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi"'] & L \\ Cok\ j \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

■

Proposición 1.5.10 *Sean $\mathcal{A}$ como antes (no necesariamente cerrada bajo extensiones) y $g : B \to C$ un morfismo derecho que casi se divide en $\mathcal{A}$ entonces C es inescindible.*

Demostración.

Sea $C = C_1 \oplus C_2 \oplus \ldots \oplus C_l$ la descomposición de C en inescindibles y sea s_i con $i \leq l$ la i-esima inclusión canonica. Si $l > 1$ entonces s_i no es retracción para cada $i \leq l$ y al ser $\mathcal{A}$ cerrada bajo sumandos directos se tiene que $C_i \in \mathcal{A}$ de modo que existen morfismos $t_i : C_i \to B$ tales que se tienen diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} & C_i \arrow[dl, dashed, "t_i"'] \arrow[d, "s_i"] \\ B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

Así del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & C = C_1 \oplus \ldots \oplus C_l \arrow[dl, "(t_1,\ldots,t_l)"'] \arrow[d, "1_C=(s_1,\ldots,s_l)"] \\ B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

se tiene que g es retracción lo que contradice que g sea morfismo derecho que casi se divide en $\mathcal{A}$, luego $l = 1$, es decir C es inescindible. ■

Proposición 1.5.11 *Sean $\mathcal{A}$ como antes (no necesariamente cerrada bajo extensiones) y $f : A \to B$ un morfismo izquierdo que casi se divide en $\mathcal{A}$ entonces A es inescindible.*

Demostración.

Sea $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_l$ la descomposición de A en inescindibles y sean r_i y s_i con $i \leq l$ la i-esima proyección canónica y la i-esima inclusión canónica. Si $l > 1$ entonces r_i no es sección para cada $i \leq l$ y al ser $\mathcal{A}$ cerrada bajo sumandos directos se tiene que $A_i \in \mathcal{A}$ de modo que existen morfismos $t_i : B \to A_i$ tales que se tienen diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r_i"'] & B \arrow[dl, dashed, "t_i"] \\ A_i & \end{tikzcd}$$

de modo que $1_A = \Sigma s_i r_i = \Sigma s_i(t_i f) = \Sigma(s_i t_i) f = (\Sigma s_i t_i)\, f$, y así se tiene que f es sección lo que contradice que f sea morfismo izquierdo que casi se divide en $\mathcal{A}$, luego $l = 1$, es decir A es inescindible. ■

Lema 1.5.12 *Sean $\mathcal{A}$ como antes (no necesariamente cerrada bajo extensiones) y $\eta :\ A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ conflación en $\mathcal{A}$.*

a) Si g es un morfismo minimal derecho que casi se divide en A entonces η es una sucesión que casi se divide en A.

b) Si f es un morfismo minimal izquierdo que casi se divide en A entonces η es una sucesión que casi se divide en A.

Demostración.

a) Probaremos que todo morfismo $h : A \to X$ con $X \in \mathcal{A}$ que no se factoriza a través de f es una sección.

Sea $h : A \to X$ algún morfismo que no se factoriza a través de f con $X \in \mathcal{A}$, de modo que por la proposición 1.3.9 se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"] & C \arrow[d, equal] \\ X \arrow[r, "r"] & Y \arrow[r, "t"] & C \end{tikzcd} .$$

Si t es retracción entonces por la proposición 1.5.4 r es sección, es decir, existe $\hat{r} : Y \to X$ tal que $1_X = \hat{r}r$, luego $(\hat{r}i)f = \hat{r}(if) = \hat{r}(rh) = (\hat{r}r)h = h$ lo que contradice la hipótesis de h, de modo que t no es retracción y así existe $v : Y \to B$ tal que $gv = t$ ya que g es morfismo derecho que casi se divide en $\mathcal{A}$, luego, por el lema 1.3.1 se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"] & C \arrow[d, equal] \\ X \arrow[r, "r"] \arrow[d, dashed, "u"'] & Y \arrow[r, "t"] \arrow[d, "v"] & C \arrow[d, equal] \\ A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

Como g es minimal, de la igualdad $gvi = g$ se tiene que vi es isomorfismo, así que por el lema de tres uh es isomorfismo, luego h es sección.

b) Es análogo. ■

Proposición 1.5.13 *Sean $\mathcal{A}$ como antes (no necesariamente cerrada bajo extensiones) y η : $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ sucesión exacta corta en $\mathcal{A}$ entonces los siguientes son equivalentes*

i) η es sucesión que casi se divide en $\mathcal{A}$.

ii) f es morfismo minimal izquierdo que casi se divide en $\mathcal{A}$.

iii) g es morfismo minimal derecho que casi se divide en $\mathcal{A}$.

iv) C es inescindible y f es morfismo izquierdo que casi se divide en $\mathcal{A}$.

v) A es inescindible y g es morfismo derecho que casi se divide en $\mathcal{A}$.

Demostración.

i) $\Rightarrow$ **iv)** y **i)** $\Rightarrow$ **v)** se sigue de las proposiciones 1.5.10 y 1.5.11, **iv)** $\Rightarrow$ **ii)** y **v)** $\Rightarrow$ **iii)** se siguen del lema 1.5.6 y finalmente **ii)** $\Rightarrow$ **i)** y **iii)** $\Rightarrow$ **i)** se deben al lema 1.5.12. ■

Corolario 1.5.14 *Sean $\mathcal{A}$ como antes (no necesariamente cerrada bajo extensiones) y*

$$\eta : X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{d} Z$$

$$\eta' : X \xrightarrow{i'} Y' \xrightarrow{d'} Z'$$

sucesiones que casi se dividen en $\mathcal{A}$ entonces η y η' son isomorfas.

Demostración.

Como i' no es sección existe morfismo $\alpha : Y \to Y'$ tal que $\alpha i = i'$ de modo que se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\alpha"'] & Z \arrow[d, "\beta"] \\
X \arrow[r, "i'"] & Y' \arrow[r, "d'"] & Z'
\end{tikzcd}$$

Por otro lado como i no es sección existe morfismo $\alpha' : Y' \to Y$ tal que $\alpha' i' = i$, y así, se tiene que $\alpha\alpha' i' = i'$, de modo que $\alpha\alpha'$ es un isomorfismo ya que, por la proposición 1.5.13, se tiene que i' es morfismo minimal izquierdo, luego α es epimorfismo. Análogamente α es monomorfismo ya que $\alpha'\alpha i = i$ y i es morfismo minimal izquierdo, de modo que α es un isomorfismo y por el lema de tres β también lo es. ■

Corolario 1.5.15 *Sean $\mathcal{A}$ como antes (no necesariamente cerrada bajo extensiones) y*

$$\eta : X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{d} Z$$

$$\eta' : X' \xrightarrow{i'} Y' \xrightarrow{d'} Z$$

sucesiones que casi se dividen en $\mathcal{A}$ entonces η y η' son isomorfas.

Demostración.

Análoga a la del corolario 1.5.14. ■

1.5.2 *Morfismos irreducibles.*

Definición 1.5.16 Un morfismo $M \xrightarrow{h} N$ es irreducible si no es sección, no es retracción, y si $h = rs$ para morfismos $s : M \to X$ y $r : X \to N$, entonces s es sección o r es retracción.

Observación 1.5.17 *Si $h : M \to N$ es un morfismo irreducible entonces $M \neq 0$, $N \neq 0$ y h no es isomorfismo.* ◀

Lema 1.5.18 *Sea $h : M \to N$ irreducible.*

i.- h es monomorfismo o es epimorfismo.

ii.- Si h es monomorfismo entonces M es un sumando de cada submódulo propio de N que contiene a $h(M)$.

iii.- Si h es epimorfismo entonces N es sumando directo de M/I para cada submódulo I de N tal que $0 \neq I \subset kerh$

Demostración

i)

Del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\pi"'] & N \\ M/kerh \arrow[ur, "\widehat{h}"'] & \end{tikzcd}$$

si h es suprayectivo, ya acabamos. si suponemos que h no es suprayectivo entonces $\widehat{h}$ no es retracción, luego π es una sección, así que h es inyectivo.

ii)

Sea $L \lneq N$ tal que $h(M) \leq L$, entonces se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "h"] \arrow[d, "h"'] & N \\ L \arrow[ur, hook, "j"'] & \end{tikzcd}$$

donde j es la inclusión canónica, que al no ser suprayectiva implica que $h : M \to L$ es una sección.

iii)

Del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\pi_I"'] & N \\ M/I \arrow[ur, "\widehat{h}"'] & \end{tikzcd}$$

se tiene que $\widehat{h}$ es retracción ya que π_I no es inyectivo. ■

Lema 1.5.19 $h : M \to N$ *irreducible, entonces* h *es un morfismo minimal derecho y un morfismo minimal izquierdo.*

Demostración

Comencemos probando que h es minimal derecho. Sea $\alpha : M \to M$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\alpha"'] & N \\ M \arrow[ur, "h"'] & . \end{tikzcd}$$

Como h no es retracción entonces α es sección, luego α es un isomorfismo.

Ahora probemos que h es minimal izquierdo. Sea $\beta : N \to N$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "h"'] & N \arrow[d, "\beta"] \\ & N. \end{tikzcd}$$

Como h no es sección se tiene que β es retracción, luego β es un isomorfismo. ■

Teorema 1.5.20 *Sea C un Λ-módulo inescindible. Un morfismo $g : B \to C$ es irreducible si y solo si existe algún morfismo $g' : B' \to C$ tal que $(g, g') : B \amalg B' \to C$ es un morfismo minimal derecho que casi se divide.*

Demostración.

$\Rightarrow$)

Por el corolario v,1,17 existe un morfismo minimal derecho que casi se divide $u : E \to C$. Como g no es retracción existe $s : B \to E$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$
\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dl, "s"'] \arrow[d, "g"] \\
E \arrow[r, "u"] & C
\end{tikzcd}
$$

como u no es retracción se sigue que s es sección, así, tomando $B' = E/Im\ s$, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "s"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\binom{r}{\pi}"] & B' \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\binom{1}{0}"] & B \oplus B' \arrow[r, "(0,1)"] & B' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

de modo que $\binom{r}{\pi}$ es un isomorfismo. Ahora sean $u_1 : B \to C$ y $u_2 : B' \to C$ morfismos tales que $(u_1, u_2) = u\binom{r}{\pi}^{-1}$ y sea $h : X \to C$ un morfismo que no es retracción, entonces existe $h' : X \to E$ tal que $uh' = h$, luego $(u_1, u_2)\binom{r}{\pi}h' = uh' = h$, es decir (u_1, u_2) es morfismo derecho que casi se divide y claramente es minimal, además, $g = us = (u_1, u_2)\binom{r}{\pi}s = u_1rs + u_2\pi s = u_1$.

$\Leftarrow$)

Sean $r : X \to C$ y $s : B \to X$ tales que $g = rs$, entonces se tiene un diagrama conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
B \amalg B' \arrow[r, "\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}"] \arrow[dr, "(g,g')"'] & X \amalg B' \arrow[d, "(r,g')"] \\
 & C
\end{tikzcd}
$$

Ahora bien, si r es retracción, hemos terminado. De otro modo, existe $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : X \to B \amalg B'$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\binom{u}{v}"'] \arrow[d, "r"] \\ B \amalg B' \arrow[r, "(g,g')"'] & C \end{tikzcd}$$

Así, se tiene la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} B \amalg B' \arrow[r, "\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}"] \arrow[dr, "(g,g')"'] & X \amalg B' \arrow[r, "\begin{pmatrix} u & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix}"] \arrow[d, "(r,g')"] & B \amalg B' \arrow[dl, "(g,g')"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

luego $\begin{pmatrix} u & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es un isomorfismo, así que existe $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} : X \amalg B' \to B \amalg B'$ tal que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha s & \beta \\ \gamma s & \delta \end{pmatrix}$, por lo tanto s es sección. ■

Teorema 1.5.21 *Sea A un Λ-módulo inescindible. Un morfismo $f : A \to B$ es irreducible si y solo si existe algún morfismo $f' : A \to B'$ tal que $\begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix} : A \to B \amalg B'$ es un morfismo minimal izquierdo que casi se divide.*

Demostración.

$\Rightarrow)$

Por el corolario V,1,17 de [ARS1] existe un morfismo minimal izquierdo que casi se divide $v : A \to E$. Como f no es sección existe $t : E \to B$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "v"] \arrow[d, "f"'] & E \arrow[dl, "r"] \\ B & \end{tikzcd}$$

como v no es sección se sigue que r es retracción, así, tomando $B' = Ker\ r$, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[d, equal] & B \oplus B' \arrow[r, "(1{,}0)"] \arrow[d, "(s{,}i)"'] & B \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "i"] & E \arrow[r, "r"] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

de modo que (s,i) es un isomorfismo. Ahora sean $v_1 : A \to B$ y $v_2 : A \to B'$ morfismos tales que $\binom{v_1}{v_2} = (s,i)^{-1}v$ y sea $h : A \to X$ un morfismo que no es sección, entonces existe $h' : E \to X$ tal que $h'v = h$, luego $h'(s,i)\binom{v_1}{v_2} = h'v = h$, es decir, $\binom{v_1}{v_2}$ es morfismo izquierdo que casi se divide y claramente es minimal, además, $f = rv = r(s,i)\binom{v_1}{v_2} = rsv_1 + riv_2 = v_1$.

$\Leftarrow)$

Sean $s : A \to X$ y $r : X \to B$ tales que $f = rs$, entonces se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "\binom{s}{f'}"'] \arrow[d, "\binom{f}{f'}"] \\
X \amalg B' \arrow[r, "\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}"'] & B \amalg B'
\end{tikzcd}$$

ahora bien, si s es sección, hemos terminado. De otro modo, existe $(u,v) : B \amalg B' \to X$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\binom{f}{f'}"] \arrow[d, "s"'] & B \amalg B' \arrow[dl, "(u{,}v)"] \\
X &
\end{tikzcd}$$

Así, se tiene la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "\binom{f}{f'}"'] \arrow[d, "\binom{s}{f'}"] \arrow[dr, "\binom{f}{f'}"] & \\
B \amalg B' \arrow[r, "\begin{pmatrix} u & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}"'] & X \amalg B' \arrow[r, "\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}"'] & B \amalg B'
\end{tikzcd}$$

luego $\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es un isomorfismo, así que existe $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} : B \amalg B' \to X \amalg B'$ tal que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\alpha & r\beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, por lo tanto r es retracción. ■

Lema 1.5.22 *Considere el diagrama exacto conmutativo*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "g'"] & C' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

entonces

a) *Si α y γ son monomorfismos entonces β es un monomorfismo.*

b) *Si α y γ son epimorfismos entonces β es un epimorfismo.*

c) *Existe un morfismo $s : B \to A'$ tal que $sf = \alpha$ si y solo si existe un morfismo $t : C \to B'$ tal que $g't = \gamma$.*

Demostración.

a) Sea $b \in B$ tal que $\beta(b) = 0$, entonces $\gamma g(b) = 0$ de modo que existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$, luego $f'\alpha(a) = \beta f(a) = \beta(b) = 0$ entonces $a = 0$ y así $b = 0$.

b) Sea $b' \in B'$ entonces existe $b \in B$ tal que $g'(b') = \gamma g(b)$ de modo que $g'(\beta(b) - b') = 0$, así existe $a \in A$ tal que $\beta(b) - b' = f'\alpha(a) = \beta f(a)$, luego $b' = \beta\big(b - f(a)\big)$.

c)

$\Rightarrow$) Sea $c \in C$, considere el mapeo $t : C \to B'$ definido por $t(c) = \beta(b) - f's(b)$ con $g(b) = c$. Sean $b, b' \ inB$ tales que $g(b) = g(b') = c$ entonces existe $a \ inA$ tal que $f(a) = b - b'$ y así $t(b-b') = \beta f(a) - f'sf(a) = \beta f(a) - f'\alpha(a) = 0$, es decir t es un morfismo. Ahora bien, para $c \in C$ se tiene que $g't(c) = g'(\beta(b) - f's(b))$ para $g(b) = c$, luego $g't(c) = g'\beta(b) - g'f's(b) = g'\beta(b) = \gamma g(b) = \gamma(c)$.

$\Leftarrow$) Sea $b \in B$, luego $g'\Big(\beta(b) - tg(b)\Big) = g'\beta(b) - g'tg(b) = g'\beta(b) - \gamma g(b) = 0$ y así existe un único $a' \in A$ tal que $f'(a) = \beta(b) - tg(b)$ y se define el morfismo $s : B \to A'$ como $s(b) = a'$ con $f(a') = \beta(b) - tg(b)$ de modo que para $a\ inA$ se tiene que $\beta f(a) - tgf(a) = \beta f(a) = f'\alpha(a)$ y así $tf(a) = \alpha(a)$. ■

Proposición 1.5.23 *Sea* $\delta :\ 0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ *una sucesión exacta.*

a) f *es un morfismo irreducible si y solo si* δ *no se divide y para cualquier morfismo* $h : X \to C$ *o hay un morfismo* $t : X \to B$ *con* $h = gt$ *o hay un morfismo* $s : B \to X$ *con* $g = hs$*.*

b) Si f *es morfismo irreducible, entonces* $End_\Lambda(C)$ *es un anillo local, por lo tanto* C *es inescindible.*

c) g *es un morfismo irreducible si y solo si* δ *no se divide y para todo morfismo* $h : A \to X$ *o hay un morfismo* $t : B \to X$ *tal que* $h = tf$ *o hay un morfismo* $s : X \to B$ *con* $f = sh$*.*

d) Si g *es un morfismo irreducible, entonces* $End_\Lambda(A)$ *es un anillo local, por lo tanto* A *es inescindible.*

Demostración.

a)

$\Rightarrow$) δ no se divide (pues de otro modo f seria una sección). Sea $h : X \to C$ un morfismo arbitrario, luego, por la proposición 1.3.9 se tiene el siguiente diagrama exacto conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "j"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"] & X \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 . \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Como f es irreducible u es retracción o j es sección.

Si j es sección, entonces v es retracción, es decir existe $\hat{v} : X \to Y$ tal que $1_X = v\hat{v}$. Sea $t = u\hat{v}$, entonces $gt = gu\hat{v} = hv\hat{v} = h$.

Si u es retracción existe $\hat{u} : B \to YX$ tal que $1_B = u\hat{u}$. Sea $s = v\hat{u}$, entonces $hs = hv\hat{u} = gu\hat{u} = g$.

$\Leftarrow$) f no es sección ni retracción ya que δ no se divide. Sean $u : A \to Y$, $v : Y \to B$ morfismos tales que $f = vu$, luego se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "v"] & Coku \arrow[r] \arrow[d, dashed, "h"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Por hipótesis existe $t : Coku \to B$ con $h = gt$ o existe $s : B \to Coku$ con $g = hs$.

En el primer caso se tiene que u es sección por el lema 1.5.22. Para el segundo caso como g es epimorfismo entonces h es epimorfismo y por el lema 1.5.22 también v es un epimorfismo.

En el primer caso se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} Coku \arrow[dr, dashed, "\alpha"] \arrow[drr, bend left, "1_{Coku}"] \arrow[ddr, bend right, "t"'] & & \\ & Y \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "v"'] & Coku \arrow[d, "h"] \\ & B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

de donde π es retracción y por lo tanto u es sección.

Para el segundo caso se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} B \arrow[dr, dashed, "\alpha"] \arrow[drr, bend left, "s"] \arrow[ddr, bend right, "1_B"'] & & \\ & Y \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "v"'] & Coku \arrow[d, "h"] \\ & B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

de donde v es retracción.

b)

Si $h \in End_\Lambda(C)$ no es un isomorfismo, entonces h no es un epimorfismo, de modo que por el inciso **a)** existe algún morfismo $t : C \to B$ tal que $h = gt$, es decir h se factoriza a través de g.

Ahora supongamos que h es un Λ-isomorfismo que se factoriza a través de g, es decir $h = gt$ para algún $t : C \to B$ de modo que $1_C = hh^{-1} = (gt)h^{-1} = g(th^{-1})$, luego g es retracción lo que contradice que δ no se divide, por lo tanto todo morfismo $h : C \to C$ que se factoriza a través de g no es un isomorfismo. Así El conjunto de no unidades de $End_\Lambda(C)$ es $Im\ Hom_\Lambda(C, g)$.

Sea $s \in End_\Lambda(C)$ y $h \in Im\ Hom_\Lambda(C, g)$ entonces h no es monomorfismo y así sh no es monomorfismo, de modo que $sh \in Im\ Hom_\Lambda(C, g)$ y claramente $hs \in Hom_\Lambda(C, g)$. Luego el conjunto de no unidades de $End_\Lambda(C)$ es un ideal de $End_\Lambda(C)$, es decir, $End_\Lambda(C)$ es un anillo local, y, por lo tanto C es inescindible.

c)

$\Rightarrow$) δ no se divide (pues de otro modo g seria una retracción). Sea $h : A \to X$ un morfismo arbitrario, luego, por la proposición 1.3.9 se tiene el siguiente diagrama exacto conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0\ . \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "r"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Como g es irreducible v es sección o r es retracción.

Si r es retracción, entonces u es sección, es decir existe $\hat{u} : Y \to X$ tal que $1_X = u\hat{u}$. Sea $t = \hat{u}v$, entonces $tf = \hat{u}vf = \hat{u}uh = h$.

Si v es sección existe $\hat{v} : Y \to B$ tal que $1_B = \hat{v}v$. Sea $s = \hat{v}u$, entonces $sh = \hat{v}uh = \hat{v}vf = f$.

$\Leftarrow$) f no es sección ni retracción ya que δ no se divide. Sean $u : B \to Y$, $v : Y \to C$ morfismos tales que $g = vu$, luego se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed, "h"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "u"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & ker\ v \arrow[r, "\sigma"] & Y \arrow[r, "v"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Por hipótesis existe $t : B \to ker\ v$ con $h = tf$ o existe $s : Ker\ v \to B$ con $f = sh$.

En el primer caso se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "u"] \arrow[ddr, bend left, "t"] & \\
ker\ v \arrow[r, "\sigma"] \arrow[drr, bend right, "1_{ker\ v}"'] & Y \arrow[dr, dashed, "\alpha"] & \\
 & & ker\ v
\end{tikzcd}$$

de donde σ es sección y por lo tanto v es retracción.

Para el segundo caso se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "u"] \arrow[ddr, bend left, "1_B"] & \\
ker\ v \arrow[r, "\sigma"] \arrow[drr, bend right, "s"'] & Y \arrow[dr, dashed, "\alpha"] & \\
 & & B
\end{tikzcd}$$

de donde u es sección.

d)

Si $h \in End_\Lambda(A)$ no es un isomorfismo, entonces h no es un monomorfismo, de modo que por el inciso **a)** existe algún morfismo $t : B \to A$ tal que $h = tf$, es decir h se factoriza a través de f.

Ahora supongamos que h es un Λ-isomorfismo que se factoriza a través de f, es decir $h = tf$ para algún $t : B \to A$ de modo que $1_A = h^{-1}h = h^{-1}tf = (h^{-1}t)f$, luego f es sección lo que contradice que δ no se divide, por lo tanto todo morfismo $h : A \to A$ que se factoriza a través de f no es un isomorfismo. Así El conjunto de no unidades de $End_\Lambda(A)$ es $Im\ Hom_\Lambda(f, A)$.

Sea $s \in End_\Lambda(A)$ y $h \in Im\ Hom_\Lambda(f, A)$ entonces h no es epimorfismo y así hs no es epimorfismo, de modo que $hs \in Im\ Hom_\Lambda(f, A)$ y claramente $sh \in Hom_\Lambda(f, A)$. Luego el conjunto de no unidades de $End_\Lambda(A)$ es un ideal de $End_\Lambda(A)$, es decir, $End_\Lambda(A)$ es un anillo local, y, por lo tanto A es inescindible. ■

Corolario 1.5.24

a) Si $f : A \to B$ es un monomorfismo irreducible con B inescindible, entonces cada morfismo irreducible $h : X \to Cokf$ es un epimorfismo.

b) Si $g : B \to C$ es un epimorfismo irreducible con B inescindible, entonces cada morfismo irreducible $h : kerg \to Y$ es un monomorfismo.

Demostración.

a)

Al ser f irreducible por la proposición 1.5.23 se tiene alguno de los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} & & & X \arrow[d, "h"] & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[ur, dashed, "t"] \arrow[r, "\pi"] & cok f \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & & & X \arrow[d, "h"] \arrow[dl, dashed, "s"'] & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "\pi"] & cok f \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

En el prime caso h es suprayectiva al ser π suprayectiva.

En el segundo caso al ser h morfismo irreducible, se tiene que s es sección, de modo que $Im\ f$ es sumando directo de B y así s es suprayectivo, luego h es suprayectivo.

b)

Al ser g irreducible, por la proposición 1.5.23 se tiene alguno de los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & ker\ g \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & 0 \\ & Y \arrow[ur, dashed, "s"'] & & & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & ker\ g \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[dl, dashed, "t"] & C \arrow[r] & 0 \\ & Y & & & \end{tikzcd}$$

En el primer caso h es inyectivo al ser σ inyectivo.

En el segundo caso al ser h un morfismo irreducible, se tiene que t es retracción, de modo que existe $\hat{t} : Y \to B$ con $1_Y = t\hat{t}$, luego $Im\ \hat{t}$ es sumando directo de B, así $\hat{t}$ es un isomorfismo, por lo tanto t es inyectivo, luego h es inyectivo. ■

Capítulo 2

Subcategorías covariantemente finitas y contravariantemente finitas

En esta sección Λ es una k álgebra de Artin, $\mathcal{A}$ es una subcategoria plena de $\Lambda - mod$ que es cerrada bajo sumandos directos, cerrada bajo isomorfismos y a menos que se diga lo contrario cerrada bajo extensiones. A lo largo de esta sección se definiran las subcategorías covariantemente finitas y contravariantemente finitas que se utilizan para establecer en el capitulo cinco una condición suficiente para que una subcategoría tenga sucesiones que casi se dividen, también se daran las nociones de subcategorías funtorialmente finitas y homológicamente finitas para concluir la sección con la construcción de la álgebra de Kronecker.

2.1 SUBCATEGORÍAS COVARIANTEMENTE FINITAS Y CONTRAVARIANTEMENTE FINITAS

Definición 2.1.1 Dado $M \in \Lambda - mod$, una $\mathcal{A}$-aproximación derecha de M, es un morfismo $g_M : r_{\mathcal{A}}M \to M$, con $r_{\mathcal{A}}M \in \mathcal{A}$, y tal que, para cada morfismo $f : X \to M$, con $X \in \mathcal{A}$, se factoriza a través de g_M, es decir, existe algún morfismo $h : X \to r_{\mathcal{A}}M$ tal que $g_M h = f$.
Se dice que g_M es una $\mathcal{A}$-aproximación derecha minimal de M si g_M es una $\mathcal{A}$-aproximación

derecha y es un morfismo minimal derecho.

Definición 2.1.2 Sean $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ subcategorías plenas de $\Lambda - mod$ cerradas bajo sumandos directos, cerradas bajo isomorfia y cerradas bajo sumas directas se dice que $\mathcal{A}$ es contravariantemente finita en $\mathcal{C}$, si todo objeto de $\mathcal{C}$ tiene una $\mathcal{A}$-aproximación derecha.

Ejemplo 2.1.3 *La categória τ_Λ, definida en el capitulo uno; es contravariantemente finita en $\Lambda - mod$ de acuerdo con la proposición $4{,}6$ de [AS1] ya que τ_Λ es cerrada bajo módulos factor*[1]. ◀

Definición 2.1.4 Dado $M \in \Lambda - mod$, una $\mathcal{A}$-aproximación izquierda de M, es un morfismo $f^M : M \to l_{\mathcal{A}}M$, con $l_{\mathcal{A}}M \in \mathcal{A}$, y tal que para cada morfismo $f : M \to Y$ con $Y \in \mathcal{A}$ se factoriza a través de f^M, es decir, existe algún morfismo $h : l_{\mathcal{A}}M \to Y$ tal que $hg_M = f$.
Se dice que g_M es una $\mathcal{A}$-aproximación izquierda minimal de M si g_M es una $\mathcal{A}$-aproximación izquierda y es un morfismo minimal izquierdo.

Definición 2.1.5 Sean $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ subcategorías plenas de $\Lambda - mod$ cerradas bajo sumandos directos, cerradas bajo isomorfia y cerradas bajo sumas directas se dice que $\mathcal{A}$ es covariantemente finita en $\mathcal{C}$, si todo objeto de $\mathcal{C}$ tiene una $\mathcal{A}$-aproximación izquierda.

Ejemplo 2.1.6 *La categoria pd_1, definida en el capitulo uno; es covariantemente finita en $\Lambda - mod$ de acuerdo con la proposición 4.2 de [AR1].*

Lema 2.1.7 *Sea $M \in \Lambda - mod$ con $g_1 : L_1 \to M$ y $g_2 : L_2 \to M$ $\mathcal{A}$-aproximaciones derechas minimales de M. Entonces L_1 y L_2 son isomorfos.*

Demostración Como g_1 y g_2 son $\mathcal{A}$-aproximaciones, existen morfismos $u : L_1 \to L_2$ y $t : L_2 \to L_1$ tales que $ug_2 = g_1$ y $tg_1 = g_2$ luego, como g_1 y g_2 son minimales, del diagrama

[1] $\mathcal{C} \subset \Lambda - mod$ es cerrada bajo módulos factor si todo epimorfismo $f : M \to N$ con $M \in \mathcal{C}$ implica que $N \in \mathcal{C}$.

conmutativo

$$\begin{tikzcd}
L_1 \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, "g_1"] & \\
L_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "t"'] & M \\
L_1 \arrow[ur, "g_1"] \arrow[d, "u"'] & \\
L_2 \arrow[uur, "g_2"'] &
\end{tikzcd}$$

ut y tu son automorfismos, y así u y t son isomorfismos. ■

Lema 2.1.8 *Sea $M \in \Lambda - mod$ con $f_1 : M \to L_1$ y $g_2 : M \to L_2$ $\mathcal{A}$-aproximaciones izquierdas minimales de M. Entonces L_1 y L_2 son isomorfos.*

Demostración Análogo al lema anterior. ■

Lema 2.1.9 *Sean $\mathcal{A}$ como antes (no necesariamente cerrada bajo extensiones) y $M \in \Lambda - mod.$ Entonces:*

- *M tiene una $\mathcal{A}$-aproximación derecha si y solo si tiene una $\mathcal{A}$-aproximación derecha minimal.*
- *M tiene una $\mathcal{A}$-aproximación izquierda si y solo si tiene una $\mathcal{A}$-aproximación izquierda minimal.*

Demostración.

Sea $g_M : r_{\mathcal{A}}M \to M$ una $\mathcal{A}$-aproximación derecha de M, por el teorema I.2.2 de [ARS1] existe un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
r_{\mathcal{A}}M \arrow[r, "g_M"] \arrow[d, equal] & M \\
L \oplus N \arrow[ur, "{(g,0)}"'] &
\end{tikzcd}$$

donde g, además de ser minimal, es la restricción de g_M a L. Luego $L, N \in \mathcal{A}$ por ser $\mathcal{A}$ cerrada bajo sumandos directos. Probaremos que g es una $\mathcal{A}$-aproximación minimal derecha de M.

Sea $f : X \to M$ con $X \in \mathcal{A}$, de modo que se tiene el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "f"] \\
r_{\mathcal{A}}M \arrow[r, "g_M"] \arrow[dr, "\pi_L"'] & M \\
& L \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}$$

así $f = g_M h = g\pi_L h$, y por lo tanto g es una $\mathcal{A}$-aproximación derecha minimal de M.

La segunda parte es análoga. ■

En base al lema 2.1.9 siempre que exista una $\mathcal{A}$-aproximación derecha (izquierda) de M, existirá una $\mathcal{A}$-aproximación derecha (izquierda) minimal que, por el lema 2.1.7 (2.1.8) esta determinada de forma única para M. Así a partir de ahora $r_{\mathcal{A}}M \xrightarrow{g_M} M$ ($M \xrightarrow{f^M} l_{\mathcal{A}}M$) denotará una $\mathcal{A}$-aproximación derecha (izquierda) minimal de M.

Lema 2.1.10 *Considere el diagrama conmutativo exacto en $\Lambda - mod$*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "t"'] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "u"] & M \arrow[r, "v"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

a) Si s es morfismo minimal derecho entonces t también lo es.

b) Si s es una $\mathcal{A}$-aproximación derecha de L, g es morfismo derecho que casi se divide en $\mathcal{A}$ y la sucesión inferior no se divide entonces t es una $\mathcal{A}$-aproximación derecha de M.

c) Para $X \in \Lambda - mod$, Si todo morfismo $X \to M$ se factoriza a través de t entonces todo morfismo $X \to L$ se factoriza a través de s.

Demostración.

a) Sea $j : B \to B$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "t"] \arrow[d, "j"'] & M \\
B \arrow[ur, "t"'] &
\end{tikzcd}$$

entonces $gj = vtj = vt = g$, así existe morfismo $h : A \to A$ tal que se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "j"'] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "t"'] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "u"] & M \arrow[r, "v"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

de donde $sh = s$ de modo que h es isomorfismo ya que s es minimal y por el lema de tres j es isomorfismo.

b) Como C y A pertenecen a $\mathcal{A}$ se tiene que $B \in \mathcal{A}$ ya que $\mathcal{A}$ es cerrada bajo extensiones. Sea $k : X \to M$ morfismo con $X \in \mathcal{A}$, como v no es retraccion, tampoco lo es vk y así existe morfismo $q : X \to B$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "q"'] \arrow[d, "vk"] \\
B \arrow[r, "g"] & C
\end{tikzcd}$$

conmuta, de modo que $v(k - tq) = vk - vtq = 0$ y existe morfismo $p : X \to L$ tal que $up = k - tq$, luego existe $l : X \to A$ tal que $sl = p$ ya que s es $\mathcal{A}$-aproximación de L, además $k = up + tq = tq + usl = tq + tfl = t(q + fl)$, es decir, k se factoriza a través de t.

c) Sea $p : X \to L$ un morfismo en $\Lambda - mod$ entonces se tiene diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[ddl, dashed, "q"'] \arrow[d, "p"] \\
& L \arrow[d, "u"] \\
B \arrow[r, "t"] & M
\end{tikzcd}$$

y así del diagrama de $pull - back$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[drr, bend left, "q"] \arrow[ddr, bend right, "p"'] & & \\
& A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & B \arrow[d, "t"] \\
& L \arrow[r, "u"] & M
\end{tikzcd}$$

se tiene que existe $k : X \to A$ tal que $p = sk$, es decir p se factoriza a través de s. ■

Proposición 2.1.11 *Sean $M, N \in \Lambda{-}mod$. Si $r_{\mathcal{A}}M \xrightarrow{g_M} M$, $r_{\mathcal{A}}N \xrightarrow{g_N} N$ son $\mathcal{A}$-aproximaciones derechas minimales de M y N respectivamente, entonces*

$$r_{\mathcal{A}}M \amalg r_{\mathcal{A}}N \xrightarrow{\begin{pmatrix} g_M & 0 \\ 0 & g_N \end{pmatrix}} M \amalg N$$

es una $\mathcal{A}$-aproximación derecha minimal de $M \amalg N$.

Demostración. Sea $X \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}} M \amalg N$ un morfismo con $X \in \mathcal{A}$, luego existen $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ tales que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} r_{\mathcal{A}}M \arrow[r, "g_M"] & M \\ X \arrow[u, dashed, "\overline{\alpha}"] \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} r_{\mathcal{A}}N \arrow[r, "g_N"] & N \\ X \arrow[u, dashed, "\overline{\beta}"] \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

de modo que se tiene la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} r_{\mathcal{A}}M \amalg r_{\mathcal{A}}N \arrow[r, "\begin{pmatrix} g_M & 0 \\ 0 & g_N \end{pmatrix}"] & M \amalg N \\ X \arrow[u, "\begin{pmatrix} \overline{\alpha} \\ \overline{\beta} \end{pmatrix}"] \arrow[ur, "\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}"'] & \end{tikzcd}$$

así $r_{\mathcal{A}}M \amalg r_{\mathcal{A}}N \xrightarrow{\begin{pmatrix} g_M & 0 \\ 0 & g_N \end{pmatrix}} M \amalg N$ es una $\mathcal{A}$-aproximación derecha de $M \amalg N$ y por el corolario II. 2.4 de [ARS1] es una $\mathcal{A}$-aproximación derecha minimal de $M \amalg N$. ■

Corolario 2.1.12 *Sea $\mathcal{A}$ como antes(no necesariamente cerrada bajo extensiones) y todo Λ -módulo inescindible tiene una $\mathcal{A}$-aproximación derecha entonces $\mathcal{A}$ es contravariantemente finita.*

Demostración.

Se sigue del teorema de Krull-Schmidt (ver teorema 12.9 de [AF1]) y la proposición 2.1.11. ■

Proposición 2.1.13 *Sean $M, N \in \Lambda{-}mod$. Si $M \xrightarrow{f^M} l_{\mathcal{A}}M$, $N \xrightarrow{f^N} l_{\mathcal{A}}N$ son $\mathcal{A}$-aproximaciones izquierdas minimales de M y N respectivamente, entonces*

$$M \amalg N \xrightarrow{\begin{pmatrix} f^M & 0 \\ 0 & f^N \end{pmatrix}} l_{\mathcal{A}}M \amalg l_{\mathcal{A}}N$$

es una $\mathcal{A}$-aproximación izquierda minimal de $M \amalg N$.

Demostración.

Sea $M \amalg N \xrightarrow{(\alpha,\beta)} X$ un morfismo con $X \in \mathcal{A}$, luego existen $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ tales que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f^M"] \arrow[d, "\alpha"'] & l_{\mathcal{A}}M \arrow[dl, dashed, "\overline{\alpha}"] \\ X & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} N \arrow[r, "f^N"] \arrow[d, "\beta"'] & l_{\mathcal{A}}N \arrow[dl, dashed, "\overline{\beta}"] \\ X & \end{tikzcd}$$

de modo que se tiene la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} M \amalg N \arrow[r, "\begin{pmatrix} f^M & 0 \\ 0 & f^N \end{pmatrix}"] \arrow[d, "(\alpha,\beta)"'] & l_{\mathcal{A}}M \amalg l_{\mathcal{A}}N \arrow[dl, "(\overline{\alpha},\overline{\beta})"] \\ X & \end{tikzcd}$$

así $M \amalg N \xrightarrow{\begin{pmatrix} f^M & 0 \\ 0 & f^N \end{pmatrix}} l_{\mathcal{A}}M \amalg l_{\mathcal{A}}N$ es una $\mathcal{A}$-aproximación izquierda de $M \amalg N$.

Por el teorema II. 3. 3 de [ARS1] existe una dualidad $\mathcal{D} : \Lambda - mod \to (\Lambda)^{op} - mod$ al ser Λ una álgebra de Artin. De modo que

$$\mathcal{D}\left(l_{\mathcal{A}}M \amalg l_{\mathcal{A}}N\right) \xrightarrow{\mathcal{D}\left(\begin{pmatrix} f^M & 0 \\ 0 & f^N \end{pmatrix}\right)} \mathcal{D}\left(M \amalg N\right)$$

$$= \mathcal{D}\left(l_{\mathcal{A}}M\right) \amalg \mathcal{D}\left(l_{\mathcal{A}}N\right) \xrightarrow{\begin{pmatrix} \mathcal{D}(f^M) & 0 \\ 0 & \mathcal{D}(f^N) \end{pmatrix}} \mathcal{D}(M) \amalg \mathcal{D}(N)$$

es minimal derecho por el corolario II.2.4 de [ARS1], luego $M \amalg N \xrightarrow{\begin{pmatrix} f^M & 0 \\ 0 & f^N \end{pmatrix}} l_{\mathcal{A}}M \amalg l_{\mathcal{A}}N$ es una $\mathcal{A}$-aproximación izquierda minimal de $M \amalg N$. ■

Corolario 2.1.14 *Sea $\mathcal{A}$ como antes(no necesariamente cerrada bajo extensiones) y todo Λ - módulo inescindible tiene una $\mathcal{A}$-aproximación izquierda entonces $\mathcal{A}$ es covariantemente finita.*

Demostración.

Se sigue del teorema de Krull-Schmidt (ver teorema 12.9 de [AF1]) y la proposición 2.1.13. ■

Lema 2.1.15 *Sea $\mathcal{A}$ como antes (no necesariamente cerrada bajo extensiones) y $\mathcal{D} : \Lambda - mod \to (\Lambda)^{op} - mod$ la dualidad presentada en el teorema II. 3. 3 de [ARS1] entonces*

- *$\mathcal{A}$ es contravariantemente finita en $\Lambda - mod$ si y solo si $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ es covariantemente finita en $(\Lambda)^{op} - mod$.*

- *$\mathcal{A}$ es covariantemente finita en $\Lambda - mod$ si y solo si $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ es contravariantemente finita en $(\Lambda)^{op} - mod$.*

Demostración.

Sea $Z \in (\Lambda)^{op} - mod$ luego existe $Z' \in \Lambda - mod$ tal que $\mathcal{D}(Z') \cong Z$. Sea $g_{Z'} : r_{\mathcal{A}}Z' \to Z'$ $\mathcal{A}$-aproximación derecha de Z' de modo que para todo morfismo $f : \mathcal{D}(Z') \to \mathcal{D}(Y)$ con $\mathcal{D}(Y) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ existe morfismo $h : \mathcal{D}(r_{\mathcal{A}}Z') \to \mathcal{D}(Y)$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}(Z') \arrow[r, "\mathcal{D}(g_{Z'})"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{D}(r_{\mathcal{A}}Z') \arrow[dl, dashed, "h"] \\ \mathcal{D}(Y) & \end{tikzcd}$$

ya que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} r_{\mathcal{A}}Z' \arrow[r, "g_{Z'}"] & Z' \\ Y \arrow[u, dashed, "h'"] \arrow[ur, "\mathcal{D}(f)"'] & \end{tikzcd}$$

es decir $\mathcal{D}(g_{Z'}) : \mathcal{D}(Z') \to \mathcal{D}(r_{\mathcal{A}}Z')$ es $\mathcal{A}$-aproximación izquierda de $\mathcal{D}(Z')$. Luego para todo morfismo $\alpha : Z \to \mathcal{D}(Y)$ con $\mathcal{D}(Y) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ existe $\beta : \mathcal{D}(r_{\mathcal{A}}Z') \to \mathcal{D}(Y)$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}(Z') \arrow[r, "\mathcal{D}(g_{Z'})"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathcal{D}(r_{\mathcal{A}}Z') \arrow[ddl, dashed, "\beta"] \\ Z \arrow[d, "\alpha"'] & \\ \mathcal{D}(Y) & \end{tikzcd}$$

donde φ es isomorfismo, de modo que $\mathcal{D}(g_{Z'})\varphi^{-1} : Z \to \mathcal{D}(r_{\mathcal{A}}Z')$ es $\mathcal{A}$-aproximación izquierda de Z.

La segunda parte es análoga. ∎

Proposición 2.1.16 *Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ subcategorías plenas de $\Lambda - mod$ con $\mathcal{A}$ contravariantemente finita en $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}$ contravariantemente finita en $\mathcal{D}$ entonces $\mathcal{A}$ es contravariantemente finita en $\mathcal{D}$*

Demostración.

Sean $D \in \mathcal{D}$, $g_D : r_{\mathcal{C}}D \to D$ $\mathcal{C}$-aproximación derecha de D y $g_{r_{\mathcal{C}}D} : r_{\mathcal{A}}r_{\mathcal{C}}D \to r_{\mathcal{C}}D$ $\mathcal{A}$-aproximación derecha de $r_{\mathcal{C}}D$. Sea $h : X \to D$ morfismo con $X \in \mathcal{A}$ entonces existe $\tilde{h} : X \to r_{\mathcal{C}}D$

tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} r_{\mathcal{C}}D \arrow[r, "g_D"] & D \\ X \arrow[u, dashed, "\tilde{h}"] \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

ya que $X \in \mathcal{C}$ luego existe morfismo $\widehat{h} : X \to r_{\mathcal{A}}r_{\mathcal{C}}D$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} r_{\mathcal{A}}r_{\mathcal{C}}D \arrow[r, "g_{r_{\mathcal{C}}D}"] & r_{\mathcal{C}}D \\ X \arrow[u, dashed, "\widehat{h}"] \arrow[ur, "\tilde{h}"'] & \end{tikzcd}$$

así el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} r_{\mathcal{A}}r_{\mathcal{C}}D \arrow[r, "g_D g_{r_{\mathcal{C}}D}"] & D \\ X \arrow[u, "\widehat{h}"] \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

de modo que $g_D g_{r_{\mathcal{C}}D} : r_{\mathcal{A}}r_{\mathcal{C}}D \to D$ es $\mathcal{A}$-aproximación derecha de D. ■

Proposición 2.1.17 *Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ subcategorías plenas de $\Lambda - mod$ con $\mathcal{A}$ covariantemente finita en $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}$ covariantemente finita en $\mathcal{D}$ entonces $\mathcal{A}$ es covariantemente finita en $\mathcal{D}$*

Demostración.

Es análogo a la proposición 2.1.16. ■

Definición 2.1.18 Sean $\Lambda = \begin{pmatrix} T & 0 \\ M & U \end{pmatrix}$ una R-álgebra de matrices triangulares, Γ subcategoría plena de $T - mod$ y Υ subcategoría plena de $U - mod$.

$\Lambda_{\Gamma}^{\Upsilon}$ es la subcategoría plena de $\Lambda - mod$ de las ternas (U, V, f) tales que $U \in \Upsilon$ y $V \in \Gamma$.

Teorema 2.1.19 *Sea $\Lambda = \begin{pmatrix} T & 0 \\ M & U \end{pmatrix}$ una R-álgebra de Artin de matrices triangulares entonces*

a) $\Lambda_{\Gamma}^{\Upsilon}$ es contravariantemente finita si y solo si Υ y Γ son contravariantemente finitas.

b) $\Lambda_{\Upsilon}^{\Gamma}$ *es covariantemente finita si y solo si* Υ *y* Γ *son covariantemente finitas.*

Demostración.

a)

$\Rightarrow$) Sea $X \in T - mod$ y $h : A \to X$ con $A \in \Gamma$, considere los Λ-módulos $(X, 0, 0)$ y $(A, 0, 0)$. Sea $(\alpha, \beta) : (X', Y', f) \to (X, 0, 0)$ una $\Lambda_{\Gamma}^{\Upsilon}$-aproximación derecha de $(X, 0, 0)$, así existe un morfismo (γ, δ) tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & (A,0,0) \arrow[dl, "(\gamma,\delta)"'] \arrow[d, "(h,0)"] \\ (X',Y',f) \arrow[r, "(\alpha,\beta)"] & (X,0,0) \end{tikzcd}$$

de modo que $h = \alpha\gamma$. Luego α es una Γ-aproximación derecha de X. Luego Γ es contravariantemente finito.

Sea $Y \in U$ y $h : B \to Y$ con $B \in \Upsilon$, considere los Λ-módulos $(0, Y, 0)$ y $(0, B, 0)$. Sea $(\alpha, \beta) : (X', Y', f) \to (0, Y, 0)$ una $\Lambda_{\Gamma}^{\Upsilon}$-aproximación derecha de $(0, Y, 0)$ así existe morfismo (γ, δ) tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & (0,B,0) \arrow[dl, "(\gamma,\delta)"'] \arrow[d, "(0,h)"] \\ (X',Y',f) \arrow[r, "(\alpha,\beta)"] & (0,Y,0) \end{tikzcd}$$

de modo que $h = \beta\delta$. Luego β es una Υ-aproximación derecha de Y. Luego Υ es contravariantemente finito.

$\Leftarrow$) Sea $(X, Y, g) \in \Lambda - mod$, de modo que $X \in T - mod$, $Y \in U - mod$ y $g : X \to Hom_U(M, Y)$ es un U-morfismo. Sea $t_Y : Y_{\Upsilon} \to Y$ una Υ-aproximación derecha de Y, ahora considere el diagrama de $pull - back$

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "\theta"] & X \arrow[d, "g"] \\ Hom_U(M,Y_{\Upsilon}) \arrow[r, "t_{Y_*}"] & Hom_U(M,Y) \end{tikzcd} .$$

Sea $s_Z : Z_{\Gamma} \to Z$ una Γ-aproximación derecha de Z. Se probara que $(\omega s_Z, t_Y) : (Z_{\Gamma}, Y_{\Upsilon}, \theta s_Z) \to (X, Y, g)$ es una $\Lambda_{\Gamma}^{\Upsilon}$-aproximación derecha de (X, Y, g).

Sea $(\alpha,\beta):(A,B,f)\to(X,Y,g)$ morfismo con $(A,B,f)\in\Lambda_\Gamma^\Upsilon$, así existe $\gamma:B\to Y_\Upsilon$ tal que $t_Y\gamma=\beta$ ya que $B\in\Upsilon$ y t_Y es una Υ-aproximación. De modo que se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rrr, bend left, "\alpha"] \arrow[dr, bend right, "\gamma_* f"'] & & & \\
& Z \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "\theta"'] & X \arrow[d, "g"] \\
& Hom_U(M,Y_\Upsilon) \arrow[r, "t_{Y_*}"'] & Hom_U(M,Y)
\end{tikzcd}$$

entonces existe un único $\delta:A\to Z$ tal que $\omega\delta=\alpha$ y $\theta\delta=\gamma_*f$, así existe $\eta:A\to Z_\Gamma$ tal que $s_Z\eta=\delta$ ya que $A\in\Gamma$ y s_Z es una Γ-aproximación. Luego del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "f"'] & Z_\Gamma \arrow[d, "\theta s_Z"] \\
Hom_U(M,B) \arrow[r, "\gamma_*"'] & Hom_U(M,Y_\Upsilon)
\end{tikzcd}$$

se tiene que $(\eta,\gamma)\in Hom_{\Lambda_\Gamma^\Upsilon}\Big((A,B,f),(Z_\Gamma,Y_\Upsilon,\theta s_Z)\Big)$, además el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
(Z_\Gamma,Y_\Upsilon,\theta s_Z) \arrow[rr, "(\omega s_Z, t_Y)"] & & (X,Y,g) \\
& (A,B,f) \arrow[ul, "(\eta,\gamma)"] \arrow[ur, "(\alpha,\beta)"'] &
\end{tikzcd}$$

b)

$\Rightarrow$) Sea $X\in T$ y $h:X\to A$ con $A\in\Gamma$, considere los Λ-módulos $(X,0,0)$ y $(A,0,0)$. Sea $(\alpha,\beta):(X,0,0)\to(X',Y',f)$ una Λ_Γ^Υ-aproximación izquierda de $(X,0,0)$ así existe morfismo (γ,δ) tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
(X,0,0) \arrow[r, "(\alpha,\beta)"] \arrow[d, "(h,0)"'] & (X',Y',f) \arrow[dl, "(\gamma,\delta)"] \\
(A,0,0) &
\end{tikzcd}$$

de modo que $h=\gamma\alpha$. Luego α es una Γ-aproximación izquierda de X. Luego Γ es covariantemente finito.

Sea $Y \in U$ y $h : Y \to B$ con $B \in \Upsilon$, considere los Λ-módulos $(0, Y, 0)$ y $(0, B, 0)$. Sea $(\alpha, \beta) : (0, Y, 0) \to (X', Y', f)$ una Λ_Γ^Υ-aproximación izquierda de $(0, Y, 0)$ así existe morfismo (γ, δ) tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
(0,Y,0) \arrow[r, "(\alpha,\beta)"] \arrow[d, "(0,h)"'] & (X',Y',f) \arrow[dl, "(\gamma,\delta)"'] \\
(0,B,0) &
\end{tikzcd}$$

de modo que $h = \delta\beta$. Luego β es una Υ-aproximación izquierda de Y. Luego Υ es covariantemente finito.

$\Leftarrow$) Sea $(X, Y, g) \in \Lambda - mod$, de modo que $X \in T - mod$, $Y \in U - mod$ y $g : M \otimes_T X \to Y$ es un U-morfismo. Sea $s_X : X \to X_\Gamma$ una Γ-aproximación izquierda de X, ahora considere el diagrama de $push - out$

$$\begin{tikzcd}
M \otimes_T X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "1\otimes s_X"'] & Y \arrow[d, "\omega"] \\
M \otimes_T X_\Gamma \arrow[r, "\theta"] & E\ .
\end{tikzcd}$$

Sea $t_E : E \to E_\Upsilon$ una Υ-aproximación izquierda de E. Se probara que $(s_X, t_E\omega) : (X, Y, g) \to (X_\Gamma, E_\Upsilon, t_E\theta)$ es una Λ_Γ^Υ-aproximación izquierda de (X, Y, g).

Sea $(\alpha, \beta) : (X, Y, g) \to (A, B, f)$ morfismo con $(A, B, f) \in \Lambda_\Gamma^\Upsilon$, así existe $\gamma : X_\Gamma \to A$ tal que $\gamma s_X = \alpha$ ya que $A \in \Gamma$ y s_X es una Γ-aproximación. De modo que se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
M \otimes_T X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "1\otimes s_X"'] & Y \arrow[d, "\omega"] \arrow[ddr, bend left, "\beta"] & \\
M \otimes_T X_\Gamma \arrow[r, "\theta"] \arrow[drr, bend right, "f\circ(1\otimes\gamma)"'] & E & \\
& & B
\end{tikzcd}$$

entonces existe un único $\delta : E \to B$ tal que $\delta\omega = \beta$ y $\delta\theta = f \circ (1 \otimes \gamma)$, así existe $\eta : E_\Upsilon \to B$ tal que $\eta t_E = \delta$ ya que $B \in \Upsilon$ y t_E es una Υ-aproximación. Luego del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
M \otimes_T X_\Gamma \arrow[r, "t_E\theta"] \arrow[d, "1\otimes\gamma"'] & E_\Upsilon \arrow[d, "\eta"] \\
M \otimes_T A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

se tiene que $(\gamma, \eta) \in Hom_{\Lambda_\Gamma^\Upsilon}\Big((X_\Gamma, E_\Upsilon, t_E\theta), (A, B, f)\Big)$, además el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
(X, Y, g) \arrow[rr, "(s_X, t_E\omega)"] \arrow[dr, "(\alpha,\beta)"'] & & (X_\Gamma, E_\Upsilon, t_E\theta) \arrow[dl, "(\gamma,\eta)"] \\
& (A, B, f) &
\end{tikzcd}$$

■

Proposición 2.1.20 *Sea $\mathcal{A}$ como antes (no necesariamente cerrada bajo extensiones).*

- *Si $\mathcal{A}$ es contravariantemente finita, entonces $\mathcal{A}$ tiene morfismos derechos que casi se dividen.*
- *Si $\mathcal{A}$ es covariantemente finita, entonces $\mathcal{A}$ tiene morfismos izquierdos que casi se dividen.*

Demostración.

Por el corolario V.1.17 de [ARS1] existe un morfismo minimal derecho que casi de divide $B \xrightarrow{d} C$ en $\Lambda - mod$ con $C \in \mathcal{A}$.

- Si $B \in \mathcal{A}$ hemos terminado.
- Si $B \notin \mathcal{A}$, entonces al ser $\mathcal{A}$ contravariantemente finita, B tiene una $\mathcal{A}$-aproximación derecha minimal $r_\mathcal{A}B \xrightarrow{g_B} B$. Probaremos que dg_B es un morfismo derecho que casi se divide.

  dg_B no es un epimorfismo que se divide, pues si lo fuese existiría $s : C \to r_\mathcal{A}B$ tal que $(dg_B)s = 1_C$ lo que contradice que d es un morfismo derecho que casi se divide.

  Ahora consideremos un morfismo $f : X \to C$ tal que $X \in \mathcal{A}$ y f no es un epimorfismo que se divide, entonces tenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
& & X \arrow[dll, dashed, "t"'] \arrow[dl, dashed, "s"'] \arrow[d, "f"] \\
r_\mathcal{A}B \arrow[r, "g_B"] & B \arrow[r, "d"] & C
\end{tikzcd}$$

  lo que muestra que dg_B es un morfismo derecho que casi se divide.

La segunda parte es análoga. ■

2.2 SUBCATEGORÍAS HOMOLÓGICAMENTE FINITAS Y FUNTORIALMENTE FINITAS

Definición 2.2.1 Sea $\mathcal{A}$ subcategoría plena de $\mathcal{C}$ como antes (no necesariamente cerrada bajo extensiones).

- Se dice que $\mathcal{A}$ es funtorialmente finita en $\mathcal{C}$ si $\mathcal{A}$ es contravariantemente finita en $\mathcal{C}$ y covariantemente finita en $\mathcal{C}$.

- Se dice que $\mathcal{A}$ es homológicamente finita en $\mathcal{C}$ si $\mathcal{A}$ es contravariantemente finita en $\mathcal{C}$ o si $\mathcal{A}$ es covariantemente finita en $\mathcal{C}$.

Proposición 2.2.2 *Sea $\mathcal{A}$ subcategoria plena, cerrada bajo sumas directas, cerrada bajo isomorfismos y cerrada bajo sumandos directos de $\Lambda - mod$. Si las clases de isomorfía de inescindibles de $\mathcal{A}$ conforman un conjunto finito. Entonces $\mathcal{A}$ es funtorialmente finita.*

Demostración.

Sea $\{X_1, X_2, \ldots X_n\}$ una lista completa (sin repeticiones) de representantes de clases de isomorfía de inescindibles de $\mathcal{A}$. Sea $Z \in \Lambda - mod$ inescindible. Recordemos que $Hom_\Lambda(X_i, Z)$ es finitamente generado como R-módulo y es finitamente generado como $End_\Lambda(X_i)^{op}$-módulo. [ARS1]

Sean $\{f_1, \ldots, f_{s_i}\}$ un conjunto de generadores de $Hom_\Lambda(X_i, Z)$ como $End_\Lambda(X_i)^{op}$-módulo y sea g_i el morfismo $X_i \coprod \ldots \coprod X_i \xrightarrow{(f_1,\ldots,f_{s_i})} Z$

Sea $f \in Hom_\Lambda(X_i, Z)$ y $f = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_{s_i} f_{s_i}$ con $\alpha_j \in End_\Lambda(X_i)$, para $j \in \{1, \ldots, s_i\}$. Entonces tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & X_i \arrow[dl, "\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_{s_i}\end{pmatrix}"'] \arrow[d, "f"] \\ \coprod\limits_{j=1}^{s_i} X_i \arrow[r, "(f_1,\ldots,f_{s_i})", "g_i"'] & Z \end{tikzcd}$$

Ahora sean $h_1, h_2, \ldots, h_l \in Hom_\Lambda(X_i, Z)$, y sean $\beta_1, \ldots, \beta_l \in Hom_\Lambda(X_i, \coprod\limits_{i=1}^{s_i} X_i)$ tales que $g_i \beta_s = h_s$ para cada s ($s \in \{1, \ldots l\}$). Entonces tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & \coprod\limits_{s=1}^{l} X_i \arrow[dl, "(\beta_1,\ldots,\beta_l)"'] \arrow[d, "(h_1,\ldots,h_l)"] \\ \coprod\limits_{j=1}^{s_i} X_i \arrow[r, "g_i"'] & Z \end{tikzcd}$$

Sea $\theta \in Hom_\Lambda(X, Z)$ con $X \in \mathcal{A}$, de modo que hay un isomorfismo

$$\varphi : X \to m_1 X_1 \coprod m_2 X_2 \coprod \cdots \coprod m_n X_n$$

. Consideremos ahora la siguiente composición

$$\gamma_i : m_i X_i \xrightarrow{\mu_i} m_1 X_1 \coprod \cdots \coprod m_n X_n \xrightarrow{\varphi^{-1}} X \xrightarrow{\theta} Z$$

donde μ_i es la inclusión canónica.

Luego, existen morfismos $\widehat{\beta}_i : m_i X_i \to \coprod\limits_{j=1}^{s_i} X_i$ tales que $\gamma_i = g_i \widehat{\beta}_i$. Luego tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} m_1 X_1 \coprod \cdots \coprod m_n X_n \arrow[d, "\widehat{\beta}_1 \coprod \cdots \coprod \widehat{\beta}_n"'] \arrow[dr, "(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)"] & X \arrow[l, "\varphi"'] \arrow[d, "\theta"] \\ s_1 X_1 \coprod \cdots \coprod s_n X_n \arrow[r, "(g_1,\ldots g_n)"'] & Z \end{tikzcd}$$

En otras palabras $(g_1, \ldots, g_n)$ es una $\mathcal{A}$-aproximación derecha de Z. De esta forma $\mathcal{A}$ es contravariantemente finita en $\mathcal{A}$.

Para la segunda parte considere $\mathcal{D} : \Lambda - mod \to \Lambda^{op} - mod$ la dualidad presentada en el teorema II.3.3 de [ARS1]. Luego las clases de isomorfia de inescindibles de $D(\mathcal{A})$ conforman un conjunto finito y así $D(\mathcal{A})$ es contravariantemente finito en $(\Lambda)^{op} - mod$, entonces por el lema 2.1.15 se tiene que $\mathcal{A}$ es covariantemente finito en $\Lambda - mod$. ■

Proposición 2.2.3 *Si la dimensión proyectiva de la envolvente inyectiva de Λ como Λ-módulo izquierdo es menor o igual a 1 entonces pd_1 es funtorialmente finita en $\Lambda - mod$.*

Demostración.

Sea $I_0(\Lambda)$ la envolvente inyectiva de Λ como Λ-módulo izquierdo y supongamos la hipótesis.

Sean $X \in \Lambda{-}mod$, $P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} X$ una presentación proyectiva de X y $0 \longrightarrow P_1 \xrightarrow{g_1} I$ la envolvente inyectiva de P_1, así se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "\binom{f_1}{g_1}"] \arrow[d, equal] & P_0 \amalg I \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "{(1,0)}"] & Y \arrow[r] \arrow[d, dashed, "h"] & 0 \\
 & P_1 \arrow[r, "f_1"] & P_0 \arrow[r, "f_0"] & X \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

donde h es el morfismo inducido, $\binom{f_1}{g_1}$ es inyectivo ya que g_1 es inyectivo y Y es el cokernel de $\binom{f_1}{g_1}$. Además h es suprayectivo ya que $(f_0, 0)$ es suprayectivo. Por otro lado, sea $Q_1 \oplus Q_2 \oplus \cdots \oplus Q_n = P_1$ la descomposición de P_1 en inescindibles. Luego $I = I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_n$, donde I_j es la envolvente inyectiva de Q_j, de modo que I_j es sumando directo de I_0, la envolvente inyectiva de Λ ya que Q_j es sumando directo de Λ. Así $I \in pd_1$.

Luego, por la proposición 1.2.16 y el lema 1.2.14 se tiene que $Y \in pd_1$. Por otro lado, existe morfismo $\alpha : I \to K$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
 & I \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[d, "{\pi(0,1)}"] \arrow[dr, "0"] & \\
K \arrow[r, "i"] & Y \arrow[r, "h"] & X,
\end{tikzcd}$$

donde $K = Ker\ h$. Ahora, sean $c \in K$ y $\binom{p}{a} \in P_0 \amalg I$ tal que $\pi\left(\binom{p}{a}\right) = c$, de modo que $0 = h(c) = h\pi\left(\binom{p}{a}\right) = f_0(1,0)\left(\binom{p}{a}\right) = f_0(p)$, así existe $p' \in P_1$ tal que $f_1(p') = p$, luego $\pi\left(\binom{p}{a} - \binom{f_1}{g_1}(p')\right) = c$ y $\alpha(a - g_1(p)) = c$, es decir α es epimorfismo. Luego de la sucesión exacta $0 \longrightarrow K_0 \longrightarrow I \xrightarrow{\alpha} K \longrightarrow 0$ se tiene la sucesión exacta

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Hom_\Lambda(Z,K_0) \arrow[r] & Hom_\Lambda(Z,I) \arrow[r] & Hom_\Lambda(Z,K) \arrow[dll, out=-90, in=180] \\
& Ext^1_\Lambda(Z,K_0) \arrow[r] & Ext^1_\Lambda(Z,I) = 0 \arrow[r] & Ext^1_\Lambda(Z,K) \arrow[dll, out=-90, in=180] \\
& Ext^2_\Lambda(Z,X) = 0, & &
\end{tikzcd}$$

para $Z \in pd_1$, de modo que $Ext_\Lambda(Z,K) = 0$ y de la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Hom_\Lambda(Z,K) \longrightarrow Hom_\Lambda(Z,Y) \xrightarrow{h_*} Hom_\Lambda(Z,X) \longrightarrow Ext^1_\Lambda(Z,K)$$

se concluye que h es una pd_1-aproximación derecha de X. Luego pd_1 es contravariantemente finito y por el ejemplo 2.1.6 se tiene que pd_1 es funtorialmente finita. ■

Observación 2.2.4 *Si Λ en un álgebra hereditaria entonces cumple con las hipótesis de la proposición 2.2.3.* ◀

2.2.1 *El álgebra de Kronecker*

Sea k un campo algebraicamente cerrado. La k-álgebra de Kronecker es la k álgebra de dimensión finita asociada al carcaj:

$$Q: \begin{tikzcd} \cdot & \cdot \arrow[l, bend right, "\beta"'] \arrow[l, bend left, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

Este es un ejemplo de una k-álgebra de Artin y la denotaremos por Γ. Todo Γ-módulo puede ser representado por

$$\begin{tikzcd} U & V \arrow[l, bend right, "T_\beta"'] \arrow[l, bend left, "T_\alpha"] \end{tikzcd}$$

donde U y V son k-espacios vectoriales, T_α y T_β son transformaciones lineales. Todo morfismo de Γ-módulos puede ser representado como transformaciones lineales T_1 y T_2 que hacen conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} U \arrow[d, "T_1"'] & V \arrow[l, bend right, "T_\beta"'] \arrow[l, bend left, "T_\alpha"] \arrow[d, "T_2"] \\ U' & V' \arrow[l, bend right, "T'_\beta"'] \arrow[l, bend left, "T'_\alpha"] \end{tikzcd}$$

Ahora, para $n \in \mathbb{N}$ se definen los siguientes módulos

$$Q_n : \begin{tikzcd} k^{n+1} & k^n \arrow[l, bend right, "f_\beta"'] \arrow[l, bend left, "f_\alpha"] \end{tikzcd}$$

$$J_n : \begin{tikzcd} k^{n} & k^{n+1} \arrow[l, bend right, "g_\beta"'] \arrow[l, bend left, "g_\alpha"] \end{tikzcd}$$

$$M_c^n : \begin{tikzcd} k^{n} & k^n \arrow[l, bend right, "J_c^n"'] \arrow[l, bend left, "I"] \end{tikzcd}$$

$$M_\infty^n : \begin{tikzcd} k^{n} & k^n \arrow[l, bend right, "I"'] \arrow[l, bend left, "J_0^n"] \end{tikzcd}$$

donde $f_\alpha = \binom{0}{I}$, $f_\beta = \binom{I}{0}$, $g_\alpha = (0, I)$, $g_\beta = (I, 0)$ y J_c^n es la matriz de Jordan de dimensión n y eigenvalor c.

Lema 2.2.5 *Sea $n \in \mathbb{N}$,*

a) Q_n es inescindible.

b) J_n es inescindible.

c) M_∞^n *es inescindible.*

d) M_c^n *es inescindible para todo* $c \in k$.

Demostración.

a) Sean $\{a_{ij}\}$ y $\{b_{ij}\}$ matrices tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
k^{n+1} \arrow[d, "\{a_{ij}\}"'] & k^n \arrow[l, bend right, "f_\beta"'] \arrow[l, bend left, "f_\alpha"] \arrow[d, "\{b_{ij}\}"] \\
k^{n+1} & k^n \arrow[l, bend right, "f_\beta"'] \arrow[l, bend left, "f_\alpha"]
\end{tikzcd}$$

De modo que

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n+11} & a_{n+12} & \cdots & a_{n+1n} \end{pmatrix} = \{a_{ij}\} f_\beta = f_\beta \{b_{ij}\} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n+1} \\ a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n+12} & a_{n+13} & \cdots & a_{n+1n+1} \end{pmatrix} = \{a_{ij}\} f_\alpha = f_\alpha \{b_{ij}\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Así, $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = b_{11} = b_{22} = \cdots = b_{nn}$, $a_{ij} = b_{ij} = 0$ para $i \neq j$ y $a_{n+1j} = a_{jn+1} = 0$ para $1 \leq j \leq n+1$. De esta forma $End_\Gamma(Q_n) \cong k$, luego $End_\Gamma(Q_n)$ es un anillo local, es decir, Q_n es un Γ-módulo inescindible.

La parte **b)** es análoga.

c) Sean $\{a_{ij}\}$ y $\{b_{ij}\}$ matrices tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} k^n \arrow[d, "\{a_{ij}\}"'] & k^n \arrow[l, bend right, "I"'] \arrow[l, bend left, "J_0^n"] \arrow[d, "\{b_{ij}\}"] \\ k^{n+1} & k^n, \arrow[l, bend right, "I"'] \arrow[l, bend left, "J_0^n"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix};$$

es decir, la pareja de transformaciones lineales $(\{a_{ij}\}, \{b_{ij}\})$ es un idempotente en el anillo $End_\Gamma(M_\infty^n)$. De modo que $\{a_{ij}\} = \{b_{ij}\}$ y

$$\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 \end{pmatrix} = \{a_{ij}\}J_0^n = \{b_{ij}\}J_0^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \end{pmatrix}$$

Así, $a_{ij} = 0$ para $i \leq j$ y $a_{ij} = a_{i-1j-1}$. Luego de la igualdad $a_{11}^2 = a_{11}$ se tiene que $a_{11} = 0$ o $a_{11} = 1$ ya que k es un campo; por otro lado, de la igualdad $a_{21}a_{11} + a_{11}a_{21}$ se tiene que $a_{21} = 0$, de la misma forma $a_{i1} = 0$ para $2 \leq i \leq n$. Entonces $\{a_{ij}\} = I_{n\times n}$ o $\{a_{ij}\} = 0$, es decir $End_\Gamma(M_\infty^n)$ es un anillo local y por el teorema II.2.2 de [ARS1] se tiene que M_∞^n es inescindible.

La parte **d)** es análoga. ■

Teorema 2.2.6 ***[Teorema VIII.7.5 de [ARS1]]***

a) Los conjuntos $\{Q_n | n \in \mathbb{N}\}$, $\{J_n | n \in \mathbb{N}\}$ y $\{M_c^n | n \in N, c \in k$ o $c = \infty\}$ constituye un conjunto completo de Γ-módulos inescindibles no isomorfos.

b)

$$
\begin{aligned}
max\{0, n-m+1\} &= dim_k Hom_\Gamma(Q_m, Q_n),\\
max\{0, m-1-n\} &= dim_k Ext^1_\Gamma(Q_m, Q_n),\\
max\{0, m-n+1\} &= dim_k Hom_\Gamma(J_m, J_n),\\
max\{0, n-1-m\} &= dim_k Ext^1_\Gamma(J_m, J_n),\\
n &= dim_k Hom_\Gamma(Q_m, M_c^n) = dim_k Hom_\Gamma(M_c^n, J_m),\\
&= dim_k Ext^1_\Gamma(M_c^n, Q_m) = dim_k Ext^1_\Gamma(J_m, M_c^n),\\
0 &= Hom_\gamma(J_m, Q_m) = Hom_\Gamma(J_m, M_c^n) = Hom_\Gamma(M_c^n, Q_m)\\
&= Ext^1_\Gamma(Q_m, j_m) = Ext^1_\Gamma(Q_m, M_c^n) = Ext^1_\Gamma(M_c^n, J_m),\\
\delta_{c,d}\ min\{m, n\} &= dim_k Hom_\Gamma(M_c^n, M_d^m)\\
&= dim_k Ext^1_\Gamma(M_c^n, M_d^n),
\end{aligned}
$$

donde $\delta_{c,d}$ es la delta de Kronecker. ■

Definición 2.2.7

- Se dice que $M \in \Lambda - Mod$ es preproyectivo si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(D\ Tr)^n(M)$ es un objeto proyectivo distinto de cero.
- Se dice que $M \in \Lambda - Mod$ es preinyectivo si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(Tr\ D)^n(M)$ es un objeto inyectivo distinto de cero.

Observación 2.2.8 *Lo generado por el conjunto $\{Q_n | n \in \mathbb{N}\}$ son los objetos preproyectivos de $\Gamma - mod$, lo que genera el conjunto $\{J_n | n \in \mathbb{N}\}$ son los objetos preinyectivos de $\gamma - mod$ y lo que se genera del conjunto $\{M_c^n | n \in \mathbb{N}, c \in k$ o $c = \infty\}$ son los objetos conocidos como módulos regulares. (ver capitulo VIII de [ARS1])* ◀

Definición 2.2.9

- $\mathcal{R}$ es la subcategoría plena de $\Gamma - mod$ cuyos objetos son las sumas finitas de módulos regulares.
- $\mathcal{RI}$ es la subcategoría plena de $\Gamma - mod$ cuyos objetos son las sumas finitas de módulos regular y módulos preinyectivos.
- $\mathcal{PR}$ es la subcategoría plena de $\Gamma - mod$ cuyos objetos son las sumas finitas de módulos regulares y módulos preproyectivos.

Observación 2.2.10 *Las subcategorías $\mathcal{R}$, $\mathcal{RI}$ y $\mathcal{PR}$ son cerradas bajo isomorfía, cerradas bajo sumas directas y cerradas bajo sumandos directos(Ver [A1]).* ◀

Proposición 2.2.11

a) La categoría $\mathcal{R}$ es cerrada bajo extensiones.

b) La categoría $\mathcal{RI}$ es cerrada bajo extensiones.

c) La categoría $\mathcal{PR}$ es cerrada bajo extensiones.

Demostración.

a) Sea $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ una sucesión exacta corta con A y C regulares. Supongamos que B no es regular, de modo que existe B' submodulo inescindible de B que no es regular.

Caso I. B' es preproyectivo. Entonces, por el teorema 2.2.6, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "0"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi"] & C \\ & B_i & \end{tikzcd}$$

donde π es la proyección canónica, así, por el lema 1.3.1 existe un único morfismo $\alpha : C \to B'$ tal que $\pi = \alpha g$ y por el teorema 2.2.6 $\alpha = 0$. Luego $B' = 0$, lo que contradice la definición de B'.

Caso II. B' es preinyectivo. Entonces, por el teorema 2.2.6, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & B' \arrow[d, "\sigma"] \arrow[dr, "0"] & \\ A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

donde σ es la inclusión canónica, así, por el lema 1.3.1 existe un único morfismo $\alpha : B' \to A$ tal que $\sigma = f\alpha$ y por el teorema 2.2.6 $\alpha = 0$. Luego $B' = 0$, lo que contradice la definición de B'.

De esta forma B es regular.

b) y **c)** son análogos. ■

Proposición 2.2.12 *En la categoría $\mathcal{R}$ hay sucesiones que casi se dividen.*

Demostración.

Sea M un inescindible no Ext-proyectivo en R, entonces no es proyectivo en Γ-mod y por el teorema 1.15 de [ARS1] existe una sucesión que casi se divide $\eta :\ D\ Tr\ M \longrightarrow E \longrightarrow M$. Si $D\ Tr\ M$ es preinyectivo entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(Tr\ D)^n(D\ Tr\ M)$ es un módulo inyectivo, es decir, $(Tr\ D)^{n-1}(M)$ es inyectivo lo que contradice que M es regular. Así $D\ Tr\ M$ no es preinyectivo. Si $D\ Tr\ M$ es preproyectivo etonces existe $n \in N$ tal que $(D\ Tr)^n(D\ Tr\ M)$ es un módulo proyectivo, es decir $(D\ Tr)^{n+1}(M)$ es proyectivo, lo que contradice que M es regular. Así $D\ Tr\ M$ es un módulo regular y por la proposición 2.2.11 E es regular y así η es sucesión que casi se divide en $\mathcal{R}$. De forma análoga se prueba que existe sucesión que casi se divide $M \to N \to Tr\ D\ M$. ■

Lema 2.2.13 *Sean $n, m \in \mathbb{N}$, $c \in k$ y $f \in Hom_\Gamma(M_c^n, M_c^m)$ entonces f puede identificarse con la tranformación lineal asociada a la matriz*

- $c_1 I_n + c_2 J_0^n + c_3 (J_0^n)^2 + \cdots + c_n (J_0^n)^{n-1}$ *si* $n = m$.
- $\Big(c_1 I_m + c_2 J_0^m + c_3 (J_0^m)^2 + \cdots + c_m (J_0^m)^{m-1}\Big)(I_m|0)$ *si* $n > m$.
- $\binom{0}{I_n}\Big(c_1 I_n + c_2 J_0^n + c_3 (J_0^n)^2 + \cdots + c_n (J_0^n)^{n-1}\Big)$ *si* $n < m$.

Demostración.

Si n = m. Supongamos que el morfismo f se puede identificar con las matrices $\{a_{ij}\}$ y $\{b_{ij}\}$ tales que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd}
k^n \arrow[d, "\{a_{ij}\}"'] & k^n \arrow[l, bend right, "J_c^n"'] \arrow[l, bend left, "I_n"] \arrow[d, "\{b_{ij}\}"] \\
k^n & K^n \arrow[l, bend right, "J_c^n"'] \arrow[l, bend left, "I_n"]
\end{tikzcd}$$

Así $\{a_{ij}\} = \{b_{ij}\}$. Luego, de la igualdad

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & c & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & c & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

se obtiene que

$$a_{1j}c + a_{1j+1} = a_{ij}c$$

$$a_{in}c = a_{i-1n} + a_{in}c$$

$$a_{ij}c + a_{ij+1} = a_{i-1j} + a_{ij}c$$

para $1 < i \leq n$ y $1 \leq j < n$, de modo que

$$a_{ij+1} = a_{i-1j}$$

$$a_{ij+1} = 0$$

$$0 = a_{i-1n}$$

para $1 < i \leq n$ y $1 \leq j < n$ luego $a_{ij} = 0$ para $i < j$ y así

$$\{a_{ij}\} = a_{11}I_n + a_{21}J_0^n + a_{31}(J_0^n)^2 + \cdots + a_{n1}(J_0^n)^{n-1}.$$

La prueba para los otros dos casos es análoga. ∎

Observación 2.2.14 $0 \longrightarrow M_c^1 \xrightarrow{(\binom{0}{1},\binom{0}{1})} M_c^2 \xrightarrow{((1,0),(1,0))} M_c^1 \longrightarrow 0$ *es sucesión que casi se divide en $\mathcal{R}$.*

Proposición 2.2.15 *Sean $c \in k$ y $n \in \mathbb{N} - \{1\}$, entonces*

$$0 \longrightarrow M_c^n \xrightarrow{f_n} M_c^{n+1} \oplus M_c^{n-1} \xrightarrow{g_n} M_c^n \longrightarrow 0$$

es sucesión que casi se divide en $\mathcal{R}$, donde $f_n = J_0^{2n}\binom{I_n}{I_n}\left(I_n + J_0^n + (J_0^n)^2 + \cdots + (J_0^n)^{n-1}\right)$ y $g_n = \left(I_n + J_0^n + (J_0^n)^2 + \cdots + (J_0^n)^{n-1}\right)(I_n, -I_n)A_n$ con $A_n = I_{2n} + e_{1,n+1}$.

Demostración.

Se probara que f_n es un morfismo izquierdo que casi se divide.

Claramente f_n no es sección. Sea M inescindible en $\mathcal{R}$ y $f \in Hom_\Gamma(M_c^n, M)$ tal que f no es sección. Así, $M \cong M_c^m$ para algún $m \in \mathbb{N}$.

Caso I. $m = n$. Por el lema 2.2.13 f se puede identificar con la transformación lineal asociada a la matriz

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{J}^{i-1}$$

donde $\mathbb{J}$ es la matriz de Jordan de tamaño n y eigenvalor cero y $\mathbb{J}^0$ es la matriz identidad de tamaño n, además $c_1 = 0$ (de otra forma f es sección).

Considere la transformación lineal asociada a la matriz

$$h = \left(c_2\mathbb{J}^0 + (c_3 - c_2)\mathbb{J} + \cdots + (c_n - c_{n-1})\mathbb{J}^{n-2}\right)B$$

donde B es la matriz de tamaño $n \times 2n$ definida por

$$B = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & I_{n-1} \end{array}\right)$$

De modo que $BJ_0^{2n}\binom{I_n}{I_n} = \mathbb{J}$ y así

$$\begin{aligned}
hf_n &= \left(\left(c_2\mathbb{J}^0 + (c_3 - c_2)\mathbb{J} + \cdots + (c_n - c_{n-1})\mathbb{J}^{n-2}\right)B\right)\left(J_0^{2n}\begin{pmatrix} I_n \\ I_n \end{pmatrix}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{J}^i\right)\right) \\
&= \left(c_2\mathbb{J}^0 + (c_3 - c_2)\mathbb{J} + \cdots + (c_n - c_{n-1})\mathbb{J}^{n-2}\right)\left(BJ_0^{2n}\begin{pmatrix} I_n \\ I_n \end{pmatrix}\right)\left(\sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{J}^i\right) \\
&= \left(c_2\mathbb{J}^0 + (c_3 - c_2)\mathbb{J} + \cdots + (c_n - c_{n-1})\mathbb{J}^{n-2}\right)\mathbb{J}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{J}^i\right) \\
&= \left(c_2\mathbb{J} + (c_3 - c_2)\mathbb{J}^2 + \cdots + (c_n - c_{n-1})\mathbb{J}^{n-1}\right)\left(\sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{J}^i\right) \\
&= c_2\mathbb{J}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{J}^i\right) + (c_3 - c_2)\mathbb{J}^2\left(\sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{J}^i\right) + \cdots + (c_n - c_{n-1})\mathbb{J}^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{J}^i\right) \\
&= c_2\left(\sum_{i=1}^{n-1}\mathbb{J}^i\right) + (c_3 - c_2)\left(\sum_{i=2}^{n-1}\mathbb{J}^i\right) + \cdots (c_j - c_{j-1})\left(\sum_{j-1}^{n-1}\mathbb{J}^i\right) + \cdots + (c_n - c_{n-1})\mathbb{J}^{n-1} \\
&= c_2\left(\sum_{i=1}^{n-1}\mathbb{J}^i\right) + c_3\left(\sum_{i=2}^{n-1}\mathbb{J}^i\right) - c_2\left(\sum_{i=2}^{n-1}\mathbb{J}^i\right) + \cdots + c_n\mathbb{J}^{n-1} - c_{n-1}\mathbb{J}^{n-1} \\
&= c_2\mathbb{J} + c_3\mathbb{J}^2 + \cdots + c_n\mathbb{J}^{n-1} \\
&= \sum_{i=2}^{n} c_i\mathbb{J}^{i-1} = f,
\end{aligned}$$

es decir f se factoriza a través de f_n.

Los casos para $n < m$ y $n > m$ son análogos. ■

Observaciones 2.2.16

- *Las subcategorías $\mathcal{RI}$ y $\mathcal{PR}$ tienen sucesiones que casi se dividen.*
- *La categoría $\mathcal{R}$ no es homológicamente finita.*
- *La subcategoría $\mathcal{RI}$ es covariantemente finita en $\Gamma - mod$, pero no es contravariantemente finita en $\Gamma - mod$.*
- *La categoría $\mathcal{PR}$ es contravariantemente finita en $\Gamma - mod$, pero no es covariantemente finita en $\Gamma - mod$.* ◀

CAPÍTULO 3

Subcategorías localmente covariantemente nilpotentes y localmente contravariantemente nilpotentes

En esta sección se presentarán las definiciones de subcategorías localmente covariantemente nilpotentes y subcategorías localmente contravariantemente nilpotentes, esto es a través del radical n-ésimo de un par de objetos, estas subcategorias proporcionan una herramienta para determinar si una subcategoria es covariantemente finita o contravariantemente finita.

3.1 EL RADICAL

Definición 3.1.1 Sean Λ un álgebra de artin, $A, B \in \Lambda - mod$ y $ind\Lambda$ la subcategoria plena de $\Lambda - mod$ cuyos objetos son los Λ- módulos insecindibles.

- $rad_\Lambda(A, B) = \{f \in Hom_\Lambda(A, B) | hfg \notin Aut(X)$ para todo $g : A \to X$ y para todo $h : X \to B$ con $X \in ind\Lambda\}$.
- Para $n \geq 2$, $rad^n_\Lambda(A, B) = \{f \in Hom_\Lambda(A, B)|$ existen $X \in \Lambda - mod$ y morfismos $g \in rad_\Lambda(A, X), h \in rad^{n-1}_\Lambda(X, B)$ tales que $f = hg\}$.

- $rad^0(A, B) = Hom_\Lambda(A, B)$.

Proposición 3.1.2 *Sea Λ un R-álgebra de artin. Entonces rad_Λ es una R-relación en $\Lambda - mod$.*

Demostración.

Primero probaremos que $rad_\Lambda(A, B)$ es un R-submódulo de $Hom_\Lambda(A, B)$ para cada par de objetos A , B de $\Lambda - mod$. Sean $A, B \in \Lambda - mod$, $r \in R$, $f_1, f_2 \in rad_\Lambda(A, B)$ y $g : X \to A$, $h : B \to X$, Λ-morfismos con $X \in ind\Lambda$. Como f_1 y f_2 estan en $rad_\Lambda(A, B)$ entonces hf_1g y hf_2g son no isomorfismos, y, al ser X inescindible, $hf_1g - hf_2g = h(f_1 - f_2)g$ no es un isomorfismo, ya que $End_\Lambda(X)$ es local. Luego $rad_\Lambda(A, B)$ es un subgrupo de $Hom_\Lambda(A, B)$, además $hrf_1g = h \circ r1_A \circ f \circ g$ no es isomorfismo, de modo que $rf \in rad_\Lambda(A, B)$ y así $rad_\Lambda(A, B)$ es un R submódulo de $Hom_\Lambda(A, B)$.

Para completar la prueba se debe verificar que si $f \in rad_\Lambda(A, B)$ y $f' \in Hom_\Lambda(B, C)$ entonces $f'f \in rad_\Lambda(A, C)$ y dualmente si $f \in rad_\Lambda(A, B)$ y $f'' \in Hom_\Lambda(E, A)$ entonces $ff'' \in rad_\Lambda(E, B)$.

Para la primer parte sean $f \in rad_\Lambda(A, B)$, $f' \in Hom_\Lambda(B, C)$, $g : X \to A$, $h : C \to X$, con $X \in ind\Lambda$. Entonces $h(f'f)g = (hf')fg$ no es isomorfismo, ya que $f \in rad_\Lambda(A, B)$, y así $f'f \in rad_\Lambda(A, C)$.

Para finalizar si $f \in rad_\Lambda(A, B)$, $f'' \in Hom_\Lambda(E, A)$, $g : X \to E$, $h : B \to X$, con $X \in ind\Lambda$. Entonces $h(ff'')g = hf(f''g)$ no es isomorfismo ya que $f \in rad_\Lambda(A, B)$, y así $ff'' \in rad_\Lambda(E, B)$.
■

Proposición 3.1.3 *Sean $X, Y \in ind\Lambda$ entonces*

a) $rad_\Lambda(X, Z) = \{f \in Hom_\Lambda(X, Z) | f$ *no es sección*$\}$ *para todo* $Z \in \Lambda - mod$.

b) $rad_\Lambda(Z, X) = \{f \in Hom_\Lambda(Z, X) | f$ *no es retracción*$\}$ *para todo* $Z \in \Lambda - mod$.

c) $rad_\Lambda(X, Y) = \{f \in Hom_\Lambda(X, Y) | f$ *no es isomorfismo*$\}$.

d) $f \in Hom_\Lambda(X, Y)$ *es irreducible si y solo si* $f \in rad_\Lambda(X, Y) \setminus rad^2_\Lambda(X, Y)$.

Demostración.

a) Sea $Z \in \Lambda - mod$.

Sea $f \in rad_{\Lambda}(X, Z)$, si f es sección, existe morfismo $g : Z \to X$ tal que $gf = 1_X$, entonces la composición

$$X = X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} X$$

no es isomorfismo ya que $f \in rad_{\Lambda}(X, Z)$ lo que es una contradicción. Por lo tanto $rad_{\Lambda}(X, Z) \subset \{f \in Hom_{\Lambda}(X, Z) | f$ no es sección $\}$.

Para la otra contención sea $f \in Hom_{\Lambda}(X, Z)$ no sección, sean $g : A \to X$, $h : Z \to A$ morfismos con $A \in ind\Lambda$. Si la composición $A \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{h} A$ es isomorfismo entonces hf es retracción y por lo tanto hf es isomorfismo ya que X y A son inescindibles, de modo que f es retracción lo que es una contradicción. Así hfg no es isomorfismo y entonces $f \in rad_{\Lambda}(X, Z)$.

b) Sea $Z \in \Lambda - mod$.

Sea $f \in rad_{\Lambda}(Z, X)$, si f es retracción, existe morfismo $g : X \to Z$ tal que $fg = 1_X$, entonces la composición

$$X \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{f} X = X$$

no es isomorfismo ya que $f \in rad_{\Lambda}(Z, X)$ lo que es una contradicción. Por lo tanto $rad_{\Lambda}(Z, X) \subset \{f \in Hom_{\Lambda}(X, Z) | f$ no es retracción $\}$.

Para la otra contención sea $f \in Hom_{\Lambda}(Z, X)$ no retracción, sean $g : A \to Z$, $h : X \to A$ morfismos con $A \in ind\Lambda$. Si la composición $A \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{f} X \xrightarrow{h} A$ es isomorfismo entonces fg es sección y por lo tanto fg es isomorfismo ya que X y A son inescindibles, de modo que f es sección lo que es una contradicción. Así hfg no es isomorfismo y entonces $f \in rad_{\Lambda}(Z, X)$.

c) Se sigue de la equivalencia para morfismos entre modulos inescindibles

f isomorfismo si y solo f es sección o f es retracción

d) Se sigue de **a)** y **b)**. ■

Observaciones 3.1.4

- rad_Λ^n *es un* R*-submódulo de* rad_Λ^{n-1}.
- *Si* $f \in rad_\Lambda^n(A,B)$ *entonces existen* $Y_1, \cdots, Y_{n-1} \in \Lambda - mod$ *y morfismos* $f_1 : A \to Y_1 \in rad_\Lambda(A, Y_1)$, $f_n : Y_{n-1} \to B \in rad_\Lambda(Y_{n-1}, B)$, $f_i : Y_{i-1} \to y_i \in rad_\Lambda(Y_{i-1}, Y_i)$ *para* $i = 2, \ldots, n-1$ *tales que* $f = f_n \cdots f_1$, *de modo que si* $h \in Hom_\Lambda(E, A)$ *entonces* $hf \in rad_\Lambda^n(E,B)$ *por la proposición 3.1.2. De la misma forma si* $h \in Hom_\Lambda(B, C)$ *entonces* $fh \in rad_\Lambda^n(A,C)$. ◀

Lema 3.1.5 *Sea* Λ *una* R*-álgebra de Artin. Sean* $A, B \in \Lambda - mod$ *con descomposiciones* $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_t$, $B = B_1 \oplus \cdots \oplus B_s$ *en inescindibles, sean* $\sigma_i : A_i \to A$, $\pi'_j : B \to B_j$ *las inclusiones y proyecciones canónicas. Entonces* $f \in rad_\Lambda(A,B)$ *si y solo si* $\pi'_j f \sigma_i \in rad_\Lambda(A_i, B_j)$ *para todo* $i = 1, \ldots, t$, $j = 1, \ldots, s$.

Demostración.

$\Rightarrow$)

Sea $f \in rad_\Lambda(A,B)$, entonces $\pi_j f \sigma_i \in rad_\Lambda(A_i, B_j)$ por la proposición 3.1.2.

$\Leftarrow$)

Sean $g : X \to A$, $h : B \to X$, con $X \in ind\Lambda$, entonces:

$$\begin{aligned} hfg = h\left(\sum_{j=1}^{s} \sigma'_j \pi'_j\right) f \left(\sum_{i=1}^{t} \sigma_i \pi_i\right) g &= \sum_{j=1}^{s}\sum_{j=1}^{t} h(\sigma'_j \pi'_j f \sigma_i \pi_i) g \\ &= \sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{t} (h\sigma'_j)(\pi'_j f \sigma_i)(\pi_i g), \end{aligned}$$

donde $\sigma'_j : B_j \to B$, $\pi_i : A \to A_i$ son las proyecciones e inclusiones canónicas. Luego $hfg \notin Aut(X)$, ya que $(h\sigma'_j)(\pi'_j f \sigma_i)(\pi_i g) \notin Aut(X)$ y X es inescindible. Así $f \in rad_\Lambda(A,B)$. ■

Proposición 3.1.6 *Sea* Λ *una* R*-álgebra de Artin. Sea* $n \in \mathbb{N}$ *entonces si* $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_t$, $B = B_1 \oplus \cdots \oplus B_s \in \Lambda - mod$, *entonces* $f \in rad_\Lambda^n(A,B)$ *si y solo si* $\pi'_j f \sigma_i \in rad_\Lambda^n(A_i, B_j)$ *para todo* $i = 1, \ldots, t$, $j = 1, \ldots, s$, *donde* $\sigma_i : A_i \to A$, $\pi'_j : B \to B_j$ *son las inclusiones y proyecciones canónicas.*

Demostración.

La prueba se hara por inducción sobre n.

- Caso base $n = 1$. Lema 3.1.5.

- Supongamos cierto el enunciado para $n = t$.

$\Rightarrow$)

Sean $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_s$,$B = B_1 \oplus \cdots \oplus B_l \in \Lambda - mod$. Sean $\sigma_i : A_i \to A$, $\pi_i : A \to A_i$, $\sigma'_j : B_j \to B$, $\pi'_j : B \to B_j$ las inclusiones y proyecciones canónicas. Sea $f \in rad^{t+1}_\Lambda(A, B)$, de modo que $f = hg$ con $g : A \to Y \in rad_\Lambda(A, Y)$ y $h : Y \to B \in rad^t_\Lambda(Y, B)$. Sean $Y = Y_1 \oplus \cdots \oplus Y_u$ descomposición de Y en inescindibles, $\sigma''_k : Y_k \to Y$, $\pi''_k : Y \to Y$ las inclusiones y proyecciones canónicas. Entonces

$$\begin{aligned}
\pi'_j f \sigma_i = \pi'_j h g \sigma_i &= (\pi'_j h) \left(\sum_{k=1}^{u} \sigma''_k \pi''_k \right) (g \sigma_i) \\
&= \sum_{k=1}^{u} (\pi'_j h)(\sigma''_k \pi''_k)(g \sigma_i) \\
&= \sum_{k=1}^{u} (\pi'_j h \sigma''_k)(\pi''_k g \sigma_i)
\end{aligned}$$

de modo que $\pi'_j f \sigma_i \in rad^{t+1}_\Lambda$ ya que $\pi''_k g \sigma_i \in rad_\Lambda(A_i, Y_k)$ (Por el lema 3.1.5) y $\pi'_j h \sigma''_k \in rad^t_\Lambda(Y_k, B_j)$ (por hipótesis de inducción).

$\Leftarrow$)

Sean $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_s$, $B = B_1 \oplus \cdots \oplus B_l \in \Lambda - mod$. Sean $\sigma_i : A_i \to A$, $\pi_i : A \to A_i$, $\sigma'_j : B_j \to B$, $\pi'_j : B \to B_j$ las inclusiones y proyecciones canónicas. Sea $f \in Hom_\Lambda(A, B)$ tal que $\pi'_j f \sigma_i \in rad^{t+1}_\Lambda(A_i, B_j)$ para todo $i = 1, \ldots, s$, $j = 1, \ldots, l$.

De esta forma para cada $i = 1, \ldots, s$ y cada $j = 1, \ldots, l$ existen morfismos $h_{ij} : Y_{ij} \to B_j \in rad^t_\Lambda(Y_{ij}, B_j)$ y $g_{ij} : A_i \to Y_{ij} \in rad_\Lambda(A_i, Y_{ij})$ tales que $\pi'_j f \sigma_i = h_{ij} g_{ij}$.

Sea $Y = \coprod_{i=1}^{s} \coprod_{j=1}^{l} Y_{ij}$, con $\sigma_{ij} : Y_{ij} \to Y$, $\pi_{ij} : Y \to Y_{ij}$ las inclusiones y proyecciones canónicas. Se define $g_i = \sum_{j=1}^{l} \sigma_{ij} g_{ij}$ y $h_j = \sum_{i=1}^{s} h_{ij} \pi_{ij}$, así por la proposición 3.1.2, $g_i \in$

$rad_\Lambda(A_i, Y)$ y por la observación 3.1.4, $h_j \in rad^t_\Lambda(Y, B_j)$. Ahora sean $g = \sum_{i=1}^{s} g_i\pi_i$ y $h = \sum_{j=1}^{l} \sigma'_j h_j$ de modo que por la proposición 3.1.2 $g \in rad_\Lambda(A, Y)$ y por la observación 3.1.4 $h \in rad^t_\Lambda(Y, B)$. Por otro lado se tiene que

$$\begin{aligned}
hg &= \sum_{j=1}^{l} \sigma'_j h_j \sum_{i=1}^{s} g_i\pi_i \\
&= \sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{s} \sigma'_j h_j g_i \pi_i \\
&= \sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{s} \sigma'_j \left(\sum_{a=1}^{s} h_{aj}\pi_{aj}\right)\left(\sum_{b=1}^{l} \sigma_{ib} g_{ib}\right)\pi_i \\
&= \sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{s} \sigma'_j \left(\sum_{a=1}^{s}\sum_{b=1}^{l} h_{aj}\pi_{aj}\sigma_{ib} g_{ib}\right)\pi_i \qquad \left(\pi_{aj}\sigma_{ib} = \begin{cases} 1 & \text{si } a = i \text{ y } b = j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{s} \sigma'_j h_{ij} g_{ij} \pi_i \\
&= \sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{s} \sigma'_j \pi'_j f \sigma_i \pi_i \\
&= \left(\sum_{j=1}^{l} \sigma'_j \pi'_j\right) f \left(\sum_{i=1}^{s} \sigma_i \pi_i\right) \\
&= f.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $f \in rad^{t+1}_\Lambda(A, B)$. ■

3.2 SUBCATEGORÍAS LOCALMENTE COVARIANTEMENTE NILPOTENTES Y LOCALMENTE CONTRAVARIANTEMENTE NILPOTENTES

Definición 3.2.1 Sea $\mathcal{C}$ subcategoría plena de $\Lambda - mod$.

- $C \in obj(\mathcal{C})$ es contravariantemente nilpotente si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $rad^n_\Lambda(X, C) = 0$ para todo $X \in \mathcal{C}$.

- $\mathcal{C}$ es localmente contravariantemente nilpotente si cada $C \in \mathcal{C}$ es contravariantemente nilpotente.
- $C \in obj(\mathcal{C})$ es covariantemente nilpotente si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $rad_\Lambda^n(C, X) = 0$ para todo $X \in \mathcal{C}$.
- $\mathcal{C}$ es localmente covariantemente nilpotente si cada $C \in \mathcal{C}$ es covariantemente nilpotente.

Observación 3.2.2 *Si $C \in obj\mathcal{C}$ es contravariantemente nilpotente con $rad_\Lambda^n(X, C) = 0$ para todo $X \in C$, entonces $rad_\Lambda^{n+i}(X, C) = 0$ para todo $X \in C$ con $i = 0, 1, \ldots$.* ◀

Proposición 3.2.3 *Sea $\mathcal{C}$ subcategoría plena y cerrada bajo sumandos directos de $\Lambda - mod$ entonces $\mathcal{C}$ es localmente contravariantemente nilpotente si y solo si para cada $C \in ind\ \mathcal{C}$*[1] *existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $rad_\Lambda^n(X, C) = 0$ para todo $X \in ind\ C$.*

Demostración.

$\Rightarrow$)

Es directo de la definición.

$\Leftarrow$)

Sea $Y \in \mathcal{C}$ con $Y = Y_1 \oplus \cdots \oplus Y_m \in \mathcal{C}$ una descomposición de Y en inescindibles. Como $\mathcal{C}$ es cerrada bajo sumandos directos entonces $Y_i \in ind\ \mathcal{C}$ para cada i, así existen $n_1, n_2, \cdots, n_m \in \mathbb{N}$ tales que $rad_\Lambda^{n_i}(X, Y_i) = 0$ para todo $X \in \mathcal{C}$.

Sean $Z \in \mathcal{C}$ y $f \in rad_\Lambda^n(Z, Y)$ con $n = max\{n_1, \cdots, n_m\}$. Sea $Z = Z_1 \oplus \cdots \oplus Z_l$ una descomposición de Z en inescindibles, de modo que $f = \left(\sum_{i=1}^{m} \sigma_i \pi_i\right) f \left(\sum_{j=1}^{l} \sigma'_j \pi'_j\right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{l} \sigma_i (\pi_i f \sigma'_j) \pi'_j = 0$ ya que $\pi_i f \sigma'_j \in rad_\Lambda^n(Z_j, Y_i) = 0$. ■

Proposición 3.2.4 *Sea $\mathcal{C}$ subcategoría plena y cerrada bajo sumandos directos de $\Lambda - mod$ entonces $\mathcal{C}$ es localmente covariantemente nilpotente si y solo si para cada $C \in ind\ \mathcal{C}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $rad_\Lambda^n(C, X) = 0$ para todo $X \in ind\ C$.*

[1] $ind\ \mathcal{C}$ denota la subcategoria plena de $ind\Lambda$ cuyos objetos son los inescindibles de Λ que viven en $\mathcal{C}$.

Demostración.

$\Rightarrow$)

Es directo de la definición.

$\Leftarrow$)

Sea $Y \in \mathcal{C}$ con $Y = Y_1 \oplus \cdots \oplus Y_m \in \mathcal{C}$. Como $\mathcal{C}$ es cerrada bajo sumandos directos entonces $Y_i \in ind\ \mathcal{C}$ para cada i, así existen $n_1, n_2, \cdots, n_m \in \mathbb{N}$ tales que $rad_\Lambda^{n_i}(Y_i, X) = 0$ para todo $X \in \mathcal{C}$.

Sean $Z \in \mathcal{C}$ y $f \in rad_\Lambda^n(Y, Z)$ con $n = max\{n_1, \cdots, n_m\}$. Sea $Z = Z_1 \oplus \cdots \oplus Z_l$ descomposición de Z en inescindibles, de modo que $f = \left(\sum_{j=1}^{l} \sigma'_j \pi'_j\right) f \left(\sum_{i=1}^{m} \sigma_i \pi_i\right) = \sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{m} \sigma'_j(\pi'_j f \sigma_i)\pi_i = 0$ ya que $\pi'_j f \sigma_i \in rad_\Lambda^n(Y_i, Z_j) = 0$. ■

Lema 3.2.5 ***[Harada-Sai]*** *Sea $n \in \mathbb{N}$ y para cada $i \in \mathbb{Z}$, sea A_i un Λ-módulo inescindible con $l(A_i) \leq n$, y sean $f_i : A_i \to A_{i+1}$ no isomorfismos. Entonces $l(Im(f_{i+2^m-2} \cdots f_i)) \leq max\{n - m, 0\}$ para cada $m \in \mathbb{N}$.*

Demostración.

La prueba se hara por inducción sobre m.

Si $m = 1$, como $f_i : A_i \to A_{i+1}$ no es un isomorfismo, entonces f_i no es inyectiva y no es suprayectiva, y por el corolario $1{,}3$ de [ARS1], se tiene que $l(Im\ f_i) < l(A_{i+1}) \leq n$, es decir $l(Im\ f_i) \leq n - 1$.

Supongamos cierto el enunciado para $m = t$.

Sean $f = f_{i+2^t-1}$, $g = f_{i+2^t-2} \cdots f_i$ y $h = f_{j+2^t-2} \cdots f_j$ con $j = i + 2^t$ de modo que se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[r, "f_{i+2^{t+1}-2}\cdots f_i"] \arrow[d, "g"'] & A_{i+2^{t+1}-1} \\
A_{i+2^t-1} \arrow[r, "f"] & A_j \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

De esta forma lo que se debe probar es: $l(Im\ hfg) \leq max\{n - t - 1, 0\}$.

- Si $n-t \leq 0$ entonces $l(Im\ hfg) \leq l(Im\ h) \leq 0 = max\{n-t-1, 0\}$ ya que $Im\ hfg \leqslant Im\ hf \leqslant Im\ h$.

- Si $n-t > 0$, supongamos que $l(Im\ hfg) > n-t-1 \geq 0$.

  Por hipótesis de inducción sabemos que $l(Im\ g) \leq n-t$ y $l(Im\ h) \leq n-t$, además $l(Im\ hfg) \leq l(Im\ hf) \leq l(Im\ h)$ ya que $Im\ hfg \leqslant Im\ hf \leqslant Im\ h$. Luego $l(Im\ hfg) = l(Im\ hf) = l(Im\ h) = n-t$.

  Por otro lado de las sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow Ker\ f_{|Im\ g} \longrightarrow Im\ g \xrightarrow{f_{|Im\ g}} Im\ fg \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow Ker\ f_{|Im\ fg} \longrightarrow Im\ fg \xrightarrow{h_{|Im\ fg}} Im\ hfg \longrightarrow 0$$

  se tiene que $l(Im\ hfg) \leq l(Im\ fg) \leq l(Im\ g)$ de modo que $l(Im\ fg) = l(Im\ g) = n-t$.

  Así el morfismo $h_{|Im\ fg} : Im\ fg \to Im\ h$ es un isomorfismo, y de la sucesión exacta que se divide

$$0 \longrightarrow ker\ h \longrightarrow A_j \xrightarrow{h} Im\ h \longrightarrow 0$$

  se tiene que $A_j = ker\ h \oplus h^{-1}_{|Im\ fg}(Im\ h) = ker\ h \oplus Im\ fg$, y, al ser A_j inescindible, $ker\ h = 0$ ya que $l(Im\ fg) = n-t > 0$, luego fg es un epimorfismo y así f es un epimorfismo.

  Análogamente $hf_{|Im\ g} : Im\ g \to Im\ hfg$, de modo que $A_{i+2^t-1} = Im\ g \oplus ker\ hf$, y así $ker\ hf = 0$, luego f es monomorfismo.

  Por lo tanto f es un isomorfismo, lo que contradice la hipótesis de f. Entonces $l(Im\ hfg) \leq n-t-1$. ■

Corolario 3.2.6 *Sea $n \in \mathbb{N}$ y para cada $i \in \mathbb{Z}$, sea A_i un Λ-módulo inescindible con $l(A_i) \leq n$, y sean $f_i : A_i \to A_{i+1}$ no isomorfismos. Entonces $f_{2^n-1}f_{2^n-2}\cdots f_1 = 0$.*

Demostración.

Aplicando el lema 3.2.5 para $i = 1$ y $m = n$. ■

Definición 3.2.7 Una categoria $\mathcal{C}$ es acotada si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que la longitud de cada inescindible de $\mathcal{C}$ es a lo mas n.

Proposición 3.2.8 *Sea $\mathcal{C}$ subcategoría plena de $\Lambda - mod$ cerrada bajo sumandos directos y acotada entonces*

- *$\mathcal{C}$ es contravariantemente nilpotente.*
- *$\mathcal{C}$ es covariantemente nilpotente.*

Demostración.

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $l(A) \leq n$ para todo $A \in ind\, \mathcal{C}$. Sean $X, Y \in ind\, \mathcal{C}$ y $f \in rad_{\Lambda}^{2^n}(X,Y)$. Por la observación 3.1.4 existen $Z_1, \ldots, Z_{2^n-1} \in \Lambda - mod$ y morfismos $f_1 : X \to Z_1 \in rad_{\Lambda}(X, Z_1)$, $f_{2^n} : Z_{2^n-1} \to Y \in rad_{\Lambda}(Z_{2^n}, Y)$, $f_i : Z_{i-1} \to Z_i \in rad_{\Lambda}(Z_{i-1}, Z_i)$ con $i = 2, \ldots, 2^n - 1$ tales que $f = f_{2^n} \cdots f_1$.

Dadas las descomposiciones en inescindibles $Z_i = Z_{i1} \oplus \cdots Z_{il_i}$ con sus respectivas inclusiones y proyecciones canónicas $\sigma(i,j) : Z_{ij} \to Z_i$, $\pi(i,j) : Z_i \to Z_{ij}$. Se define $f_k(i,j) = \pi(k,j) f_k \sigma(k-1,i)$ para $k \in \{2, \cdots 2^n - 1\}$, $f_1(j) = \pi(1,j) f_1$ y $f_{2^n}(j) = f_{2^n} \sigma(2^{n-1}, j)$. Así, $f_1(j) \in rad_{\Lambda}(X, Z_{1j})$, $f_{2^n}(j) \in rad_{\Lambda}(Z_{2^n j}, Y)$ y $f_k(i,j) \in rad_{\Lambda}(Z_{k-1i}, Z_{kj})$ por la proposición 3.1.6. Luego, por la proposición 3.1.3 $f_1(j)$, $f_{2^n}(j)$ y $f_k(i,j)$ no son isomorfismos; además

$$f_1 = \sum_{j=1}^{l_1} \sigma(1,j) f_1(j),$$

$$f_{2^n} = \sum_{j=1}^{l_{2^n-1}} f_{2^n}(j) \pi(2^n - 1, j),$$

$$f_i = \sum_{j_i=1}^{l_i} \sum_{j_{i-1}=1}^{l_{i-1}} \sigma(i, j_i) f_i(j_{i-1}, j_i) \pi(i-1, j_{i-1}).$$

De esta forma

$$
\begin{aligned}
f &= f_{2^n} f_{2^n-1} \cdots f_3 f_2 f_1 \\
&= f_{2^n} f_{2^n-1} \cdots f_3 \sum_{j_2=1}^{l_2} \sum_{j_1=1}^{l_1} \sigma(2,j_2) f_2(j_1,j_2) \pi(1,j_1) \sum_{k=1}^{l_1} \sigma(1,k) f_1(k) \\
&= f_{2^n} f_{2^n-1} \cdots f_3 \sum_{j_2=1}^{l_2} \sigma(2,j_2) \sum_{j_1=1}^{l_1} \sum_{k=1}^{l_1} f_2(j_1,j_2) \pi(1,j_1) \sigma(1,k) f_1(k) \\
&= f_{2^n} f_{2^n-1} \cdots f_3 \sum_{j_2=1}^{l_2} \sigma(2,j_2) \sum_{j_1=1}^{l_1} f_2(j_1,j_2) f_1(j_1) \\
&= f_{2^n} f_{2^n-1} \cdots \sum_{j_3=1}^{l_3} \sum_{j_2=1}^{l_2} \sigma(3,j_3) f_3(j_2,j_1) \pi(2,j_2) \sum_{j_2=1}^{l_2} \sum_{j_1=1}^{l_1} \sigma(2,j_2) f_2(j_1,j_2) f_1(j_1) \\
&= f_{2^n} f_{2^n-1} \cdots \sum_{j_3=1}^{l_3} \sum_{j_2=1}^{l_2} \sum_{j_1=1}^{l_1} \sigma(3,j_3) f_3(j_2,j_1) f_2(j_1,j_2) f_1(j_1) \\
&\vdots \\
&= f_{2^n} \sum_{j_{2^n-1}=1}^{l_{2^n-1}} \cdots \sum_{j_1=1}^{l_1} \sigma(2^n-1, j_{2^n-1}) f_{2^n-1}(j_{2^n-2}, j_{2^n-1}) \cdots f_2(j_1,j_2) f_1(j_1) \\
&= \sum_{k=1}^{l_{2^n-1}} f_{2^n}(k) \pi(2^n-1,k) \sum_{j_{2^n-1}=1}^{l_{2^n-1}} \cdots \sum_{j_1=1}^{l_1} \sigma(2^n-1, j_{2^n-1}) f_{2^n-1}(j_{2^n-2}, j_{2^n-1}) \cdots f_2(j_1,j_2) f_1(j_1) \\
&= \sum_{j_{2^n-1}=1}^{l_{2^n-1}} \sum_{j_{2^n-2}=1}^{l_{2^n-2}} \cdots \sum_{j_1=1}^{l_1} f_{2^n}(j_{2^n-1}) f_{2^n-1}(j_{2^n-2}, j_{2^n-1}) \cdots f_2(j_1,j_2) f_1(j_1).
\end{aligned}
$$

Aplicando el corolario 3.2.6 se tiene que $f = 0$.

Aplicando la proposición 3.2.3 $\mathcal{C}$ es localmente contravariantemente nilpotente.

Aplicando la proposición 3.2.4 $\mathcal{C}$ es localmente covariantemente nilpotente. ■

Corolario 3.2.9 *Sea $\mathcal{C}$ subcategoría plena de $\Lambda - mod$ cerrada bajo sumandos directos con un numero finito de representantes de clases de isomorfía de Λ-módulos inescindibles, entonces*

- *$\mathcal{C}$ es localmente contravariantemente nilpotente.*
- *$\mathcal{C}$ es localmente covariantemente nilpotente.*

Demostración.

Sean $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{C}$ representantes de las clases de isomorfía de Λ-módulos inescindibles, sean $n_i = l(A_i)$ y $n = max\{n_1, \dots, c_m\}$ así la longitud de todo inescindible de C es menor o igual a n y por lo tanto $\mathcal{C}$ es acotada, al aplicar la proposición 3.2.8 se obtiene el resultado. ■

Lema 3.2.10 *Sean $Y \in \Lambda - mod$, $Y = Y_1 \oplus \cdots \oplus Y_n$ descomposición de Y en inescindibles, $\rho_i : N_i \to Y_i$ $1 \leq i \leq n$ morfismos derechos que casi se dividen y $h : X \to Y$ un morfismo con $X \in ind\Lambda$ y $X \ncong Y_i \;\; 1 \leq i \leq n$, entonces h se factoriza a través de* $\rho = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \rho_n \end{pmatrix}$: $N_1 \amalg N_2 \amalg \cdots \amalg N_n \to Y$.

Demostración.

Sea $h_i = \pi_i h$, con π_i la proyección canónica. Si h_i es retracción, entonces $X \cong Y_i$ lo que contradice la definición de X, de modo que h_i no es retracción y así existe $g_i : X \to N_i$ tal que $\rho_i g_i = h_i$. Por lo tanto

$$\rho\left(\sum_{i=1}^{n} \widehat{\sigma_i} g_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(\rho_i g_i) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i h_i = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(\pi_i h) = \left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i \pi_i\right) h = h,$$

donde $\widehat{\sigma_i}$ y σ_i son las inclusiones canónicas. ■

Corolario 3.2.11 *Sean $Y \in \Lambda - mod$, $Y = Y_1 \oplus \cdots \oplus Y_n$ descomposición de Y en inescindibles, $\rho_i : N_i \to Y_i$ $1 \leq i \leq n$ morfismos derechos que casi se dividen, y $X = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_m$ con $X_i \ncong Y_j$ para $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, entonces todo morfismo $h : X \to Y$ se factoriza a través de* $\rho = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \rho_n \end{pmatrix} : N = N_1 \amalg N_2 \amalg \cdots \amalg N_n \to Y$.

Demostración.

Sean $h : X \to Y$ y $h_i = h\sigma_i$, con σ_i la inclusión canónica. Del lema 3.2.10 para cada $1 \leq i \leq m$ existe morfismo $g_i : X_i \to N$ tal que $\rho g_i = h_i$, de modo que

$$\rho\left(\sum_{i=1}^{m} g_i\pi_i\right) = \sum_{i=1}^{m}(\rho g_i)\pi_i = \sum_{i=1}^{m}(h\sigma_i)\pi_i = h\left(\sum_{i=1}^{m}\sigma_i\pi_i\right) = h,$$

donde π_i es la proyección canónica. ■

Lema 3.2.12 *Sean $X \in \Lambda - mod$, $X = X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$ descomposición de X en inescindibles, $\rho_i : X_i \to N_i$ $1 \leq i \leq n$ morfismos izquierdos que casi se dividen, y $h : X \to Y$ un morfismo con $Y \in ind\Lambda$ y $Y \ncong X_i$ $1 \leq i \leq n$, entonces h se factoriza a través de $\rho = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \rho_n \end{pmatrix}$: $X \to N_1 \amalg N_2 \amalg \cdots \amalg N_n$.*

Demostración.

Sea $h_i = h\sigma_i$, donde σ_i es la inclusión canónica. Si h_i es sección, entonces $Y \cong X_i$ lo que contradice la definición de Y, de modo que h_i no es sección y así existe $g_i : N_i \to Y$ tal que $g_i\rho_i = h_i$. Por lo tanto

$$\left(\sum_{i=1}^{n} g_i\widehat{\pi_i}\right)\rho = \sum_{i=1}^{n}(g_i\rho_i)\pi_i = \sum_{i=1}^{n} h_i\pi_i = \sum_{i=1}^{n}(h\sigma_i)\pi_i = h\left(\sum_{i=1}^{n}\sigma_i\pi_i\right) = h,$$

donde $\widehat{\pi_i}$ y π_i son las proyecciones canónicas. ■

Corolario 3.2.13 *Sean $X \in \Lambda - mod$, $X = X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$ descomposición de X en inescindibles, $\rho_i : X_i \to N_i$ $1 \leq i \leq n$ morfismos izquierdos que casi se dividen, y $Y = Y_1 \oplus Y_2 \oplus \cdots \oplus Y_m$ con $Y_i \ncong X_j$ para $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, entonces todo morfismo $h : X \to Y$ se factoriza a través de $\rho = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \rho_n \end{pmatrix} : X \to N = N_1 \amalg N_2 \amalg \cdots \amalg N_n$.*

Demostración.

Sean $h : X \to Y$ y $h_i = \pi_i h$, con π_i la proyección canónica. Del lema 3.2.12 para cada $1 \leq i \leq m$ existe morfismo $g_i : N \to Y_i$ tal que $g_i\rho = h_i$, de modo que

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \sigma_i g_i\right)\rho = \sum_{i=1}^{m} \sigma_i(g_i\rho) = \sum_{i=1}^{m} \sigma_i(\pi_i h) = \left(\sum_{i=1}^{m} \sigma_i \pi_i\right) h = h,$$

donde σ_i es la inclusión canónica. ■

Lema 3.2.14 *Sea $\mathcal{C}$ subcategoría plena de $\Lambda - mod$ como antes.*

a) Para cada $C \in ind\ \Lambda \backslash \mathcal{C}$ y cada n entero no negativo, existe algún morfismo $f : D \amalg Y \to C$ con $D \in \mathcal{C}$, $Y \in \langle ind\ \Lambda \setminus \mathcal{C}\rangle$ tal que $f_{|Y} \in rad^n_\Lambda(Y, C)$ y $Im\ Hom_\Lambda(X, f) = Hom(X, C)$ para cada $X \in \mathcal{C}$.

b) Para cada $C \in ind\ \Lambda \backslash \mathcal{C}$ y cada n entero no negativo, existe algún morfismo $g : C \to D \amalg Z$ con $D \in \mathcal{C}$, $Z \in \langle ind\ \Lambda \setminus \mathcal{C}\rangle$, tal que $(0, 1)g \in rad^n_\Lambda(C, Z)$ y $Im\ Hom_\Lambda(g, X) = Hom(C, X)$ para cada $X \in \mathcal{C}$.

Demostración.

a) Sea $C \in ind\ \Lambda \setminus \mathcal{C}$. La prueba se hara por inducción sobre n.

Para $n = 0$, se tiene que $0 \amalg C \xrightarrow{(0,1)} C$ es el morfismo deseado ya que $1_C \in rad^0_\Lambda(C, C)$.

Supongamos que existe un morfismo $f_m : D \amalg Y \to C$, con $D \in \mathcal{C}$, $f_{m|_Y} \in rad^m_\Lambda(Y, C)$ y $ImHom_\Lambda(X, f_m) = Hom(X, C)$ para cada $X \in \mathcal{C}$.

Sea $Y = Y_1 \oplus \cdots \oplus Y_b$ una descomposición de Y en inescindibles. Sean $\rho_i : N_i \to Y_i$ morfismos derechos que casi se dividen para $1 \leq i \leq b$ y sean $N = N_1 \amalg \cdots \amalg N_b$ y $\rho = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \rho_b \end{pmatrix} :$ $N \to Y$.

Sean $X \in \mathcal{C}$ y $h : X \to C$, por hipótesis de inducción existe morfismo $\binom{u}{t} : X \to D \amalg Y$ tal que $h = f_m\binom{u}{t}$ y por el corolario 3.2.11 existe morfismo $v : X \to N$ tal que $t = \rho v$, de modo que se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & & X \arrow[dll, "\binom{u}{v}"'] \arrow[dl, "\binom{u}{t}"'] \arrow[d, "h"] \\ D \amalg N \arrow[r, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}"'] & D \amalg Y \arrow[r, "f_m"'] & C \end{tikzcd}$$

es decir $Hom_\Lambda(X,C) = Im\ Hom_\Lambda\Big(X, f_{m+1} = f_m\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}\Big)$.

Ahora sea $N = N_{\mathcal{C}} \oplus Y_0$, donde $N_{\mathcal{C}} \in \mathcal{C}$ y $Y_0 \in \langle ind\ \Lambda \setminus \mathcal{C}\rangle$, luego $\rho : N \to Y = (\alpha, \beta) : N_{\mathcal{C}} \oplus Y_0 \to Y$.

Sea Y_0' un sumando directo inescindible de Y_0, luego existe $i \in \{1, \cdots, b\}$ tal que Y_0' es sumando directo de N_i y así $\beta_{|Y_0'} = \rho_{i|Y_0'}$ es irreducible ya que ρ_i es morfismo derecho que casi se divide, de modo que aplicando la proposición 3.1.3 $\beta_{|Y_0'} \in rad_\Lambda(Y_0', Y_i)$ y por lo tanto, por el lema 3.1.5, $\beta \in rad_\Lambda(Y_0, Y)$. Además $f_{m+1|Y_0} = f_{m|Y}\beta$ y $f_{m|Y} \in rad_\Lambda^m(Y,C)$, es decir $f_{m+1|Y_0} \in rad_\Lambda^{m+1}(Y_0, C)$.

b)

Sea $C \in ind\ \Lambda \setminus \mathcal{C}$. La prueba se hara por inducción sobre n.

Para $n = 0$ consideremos $C \xrightarrow{\binom{0}{1}} 0 \amalg C$ es el morfismo deseado ya que $1_C \in rad_\Lambda^0(C,C)$.

Supongamos que existe un morfismo $g_m : C \to D \amalg Z$, con $D \in \mathcal{C}$, $(0,1)g_m \in rad_\Lambda^m(C,Z)$ y $ImHom_\Lambda(g_m, X) = Hom(C,X)$ para cada $X \in \mathcal{C}$.

Sea $Z = Z_1 \oplus \cdots \oplus Z_b$ una descomposición de Z en inescindibles. Sean $\rho_i : Z_i \to N_i$ morfismos izquierdos que casi se dividen para $1 \leq i \leq b$ y sean $N = N_1 \amalg \cdots \amalg N_b$ y $\rho = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \rho_b \end{pmatrix} : Z \to N$.

Sean $X \in \mathcal{C}$ y $h : C \to X$, por hipótesis de inducción existe morfismo $(u,t) : D \amalg Z \to X$ tal que $h = (u,t)g_m$ y por el corolario 3.2.13 existe morfismo $v : N \to X$ tal que $t = v\rho$, de modo que se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g_m"] \arrow[d, "h"'] & D \amalg Z \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[dl, "(u,t)"] & D \amalg N \arrow[dll, "(u,v)"] \\ X & & \end{tikzcd}$$

es decir $Hom_{\Lambda}(C,X) = ImHom_{\Lambda}\left(g_{m+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} g_m, X\right)$.

Ahora sea $N = N_{\mathcal{C}} \oplus Z_0$, donde $N_{\mathcal{C}} \in \mathcal{C}$ y $Z_0 \in \langle ind\ \Lambda \setminus \mathcal{C} \rangle$, luego $\rho : Z \to N = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} : Z \to N_{\mathcal{C}} \oplus Z_0$.

Sea Z_0' un sumando directo inescindible de Z_0, luego existe $i \in \{1, \cdots, b\}$ tal que Z_0' es sumando directo de N_i y así $\pi_{Z_0'}\beta = \pi'_{Z_0'}\rho_i$ es irreducible ya que ρ_i es morfismo izquierdo que casi se divide, de modo que aplicando la proposición 3.1.3 $\pi_{Z_0'}\beta_{|Z_i} \in rad_{\Lambda}(Z_i, Z_0')$ y por lo tanto, por el lema 3.1.5, $\beta \in rad_{\Lambda}(Z, Z_0)$. Además $(0,1)g_{m+1} = \beta(0,1)g_m$ y $(0,1)g_m \in rad_{\Lambda}^m(C,Z)$, es decir $(0,1)g_{m+1} \in rad_{\Lambda}^{m+1}(C, Z_0)$. ■

Proposición 3.2.15 *Sea $\mathcal{C}$ como antes, sea $\widehat{\mathcal{C}} = \langle ind\ \Lambda \setminus \mathcal{C} \rangle$*

a) si $\widehat{\mathcal{C}}$ es localmente contravariantemente nilpotente, entonces $\mathcal{C}$ es contravariantemente finito.

b) si $\widehat{\mathcal{C}}$ es localmente covariantemente nilpotente, entonces $\mathcal{C}$ es covariantemente finita.

Demostración.

a)

Sea $C \in \widehat{\mathcal{C}}$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $rad_{\Lambda}^n(Y,C) = 0$ para todo $Y \in \widehat{\mathcal{C}}$. Por el lema 3.2.14 existe morfismo $f_n : D \amalg Y \to C$ con $D \in \mathcal{C}$, $Y \in \widehat{\mathcal{C}}$ y tal que para cada $X \in \mathcal{C}$ se cumple que $Im\ (X, f_n) = Hom_{\Lambda}(X,C)$ y $f_{n|Y} \in rad_{\Lambda}^n(Y,C) = 0$, de modo que $f_n = (f_n', 0)$, luego $f_n' : D \to C$ es una $\mathcal{C}$-aproximación derecha de C.

b)

Sea $C \in \widehat{\mathcal{C}}$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $rad_{\Lambda}^n(C,Z) = 0$ para todo $Z \in \widehat{\mathcal{C}}$. Por el lema 3.2.14 existe morfismo $g_n : C \to D \amalg Z$ con $D \in \mathcal{C}$, $Z \in \widehat{\mathcal{C}}$ y tal que para cada $X \in \mathcal{C}$ se cumple que $Im\ (g_n, X) = Hom_\Lambda(C, X)$ y $(0,1)g_n \in rad^n_\Lambda(C, Z) = 0$, de modo que $g_n = \binom{g'_n}{0}$, luego $g'_n : C \to D$ es una $\mathcal{C}$-aproximación izquierda de C. ■

Capítulo 4

Subcategorías cerradas bajo extensiones y sucesiones que casi se dividen.

En esta sección $\mathcal{A}$ es una subcategoría plena de $\Lambda - mod$ cerrada bajo sumas directas, cerrada bajo sumandos directos y cerrada bajo isomorfía, donde Λ es una R-álgebra de Artin sobre R un anillo artiniano conmutativo. Se darán las definiciones de objetos Ext-proyectivos, Ext-inyectivos y se define cuando una subcategoría tiene sucesiones que casi se dividen y cuando tiene devilmente sucesiones que casi se dividen. Se trabajara con objetos $\mathcal{A}$-inyectivo divisibles y $\mathcal{A}$-proyectivo divisibles, así como $\mathcal{A}$-secciones y $\mathcal{A}$-retracciones, todo esto con la finalidad de probar que una subcategoría funtorialmente finita y cerrada bajo extensiones tiene sucesiones que casi se dividen. Se finaliza presentando el ejemplo de Igusa, Smal∅ y Todorov, presentado en [IST1], que nos muestra que existen categorías que tienen debilmente sucesiones que casi se dividen pero no tienen sucesiones que casi se dividen. Esta sección esta basada principalmente en [KP1], [Kl1] y [IST1].

4.1 SUBCATEGORÍAS CON SUCESIONES QUE CASI SE DIVIDEN

Definición 4.1.1 Sean A, $C \in \mathcal{A}$, $Ext^1_{\mathcal{A}}(C, A)$ denota al subconjunto de $Ext^1_{\Lambda}(C, A)$ de las clases de equivalencia de las sucesiones exactas $0 \to A \to B \to C \to 0$ con $B \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ no necesariamente cerrada bajo extensiones).

- Decimos que $C \in \mathcal{A}$ es Ext-proyectivo en $\mathcal{A}$ si $Ext^1_{\mathcal{A}}(C, A) = 0$ para cada $A \in \mathcal{A}$.
- Decimos que $A \in \mathcal{A}$ es Ext-inyectivo en $\mathcal{A}$ si $Ext^1_{\mathcal{A}}(A, C) = 0$ para cada $C \in \mathcal{A}$.
- Decimos que $\mathcal{A}$ tiene sucesiones que casi se dividen a la izquierda si $\mathcal{A}$ tiene morfismo izquierdos que casi se dividen y para todo objeto $A \in \mathcal{A}$ inescindible y no Ext-inyectivo en $\mathcal{A}$ existe una sucesión que casi se divide en $\mathcal{A}$
$$A \to B \to C.$$
- Decimos que $\mathcal{A}$ tiene sucesiones que casi se dividen a la derecha si $\mathcal{A}$ tiene morfismos derechos que casi se dividen y para todo objeto $C \in \mathcal{A}$ inescindible y no Ext-proyectivo en $\mathcal{A}$ existe una sucesión que casi se divide en $\mathcal{A}$
$$A \to B \to C.$$
- Decimos que $\mathcal{A}$ tiene sucesiones que casi se dividen si $\mathcal{A}$ tiene sucesiones que casi se dividen a la derecha y $\mathcal{A}$ tiene sucesiones que casi se dividen a la izquierda.

Observación 4.1.2 *Algunos autores (ver [LPC1]), al definir una subcategoría con sucesiones que casi se dividen por la derecha o por la izquierda no piden la hipótesis de ser una categoría con morfismo derechos o izquierdos que casi se dividen. Esto motiva la siguiente definición.* ◀

Definición 4.1.3

- Se dice que $\mathcal{A}$ tiene debilmente sucesiones que casi se dividen por la derecha si para todo objeto $C \in \mathcal{A}$ inescindible y no Ext-proyectivo en $\mathcal{A}$ existe una sucesión que casi se divide en $\mathcal{A}$
$$A \to B \to C.$$

- Se dice que $\mathcal{A}$ tiene debilmente sucesiones que casi se dividen por la izquierda si para todo objeto $a \in \mathcal{A}$ inescindible y no Ext-inyectivo en $\mathcal{A}$ existe una sucesión que casi se divide en $\mathcal{A}$

$$A \to B \to C.$$

- Se dice que $\mathcal{A}$ tiene debilmente sucesiones que casi se dividen si $\mathcal{A}$ tiene debilmente sucesiones que casi se dividen por la derecha y si $\mathcal{A}$ tiene debilmente sucesiones que casi se dividen por la izquierda.

Proposición 4.1.4 *Sean $\mathcal{A}$ subcategoria plena de $\Lambda - mod$, cerrada bajo isomorfismos, cerrada bajo sumandos directos y cerrada bajo isomorfia, $A, B, C \in \Lambda - mod$, $f \in Hom_\Lambda(A, B)$, $g \in Hom_\Lambda(B, C)$ y $\mathcal{D} : \Lambda - mod \to (\Lambda)^{op} - mod$ la dualidad presentada en el teorema II.3.3 de [ARS1]. Entonces*

a) Si f es una sección entonces $\mathcal{D}(f)$ es una retracción.

b) Si f es una retracción entonces $\mathcal{D}(f)$ es una sección.

c) f es una sección (retracción) si y solo si $\mathcal{D}(f)$ es una retracción (sección).

d) f es un isomorfismo si y solo si $\mathcal{D}(f)$ es un isomorfismo.

e) Si f es morfismo izquierdo que casi se divide en $\mathcal{A}$ entonces $\mathcal{D}(f)$ es morfismo derecho que casi se divide en $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.

f) Si f es morfismo derecho que casi se divide en $\mathcal{A}$ entonces $\mathcal{D}(f)$ es morfismo izquierdo que casi se divide en $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.

g) f es morfismo izquierdo (derecho) que casi se divide en $\mathcal{A}$ si y solo si $\mathcal{D}(f)$ es morfismo derecho (izquierdo) que casi se divide en $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.

h) $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ es sucesión exacta corta si y solo si $\mathcal{D}(C) \xrightarrow{\mathcal{D}(g)} \mathcal{D}(B) \xrightarrow{\mathcal{D}(f)} \mathcal{D}(A)$ es sucesión exacta corta.

i) $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ *es sucesión exacta que casi se divide en* $\mathcal{A}$ *si y solo si*

$$\mathcal{D}(C) \xrightarrow{\mathcal{D}(g)} \mathcal{D}(B) \xrightarrow{\mathcal{D}(f)} \mathcal{D}(A)$$

es sucesión que casi se divide en $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.

j) $\mathcal{A}$ *es cerrada bajo extensiones si y solo si* $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ *es cerrada bajo extensiones.*

k) Si A *es* Ext*-proyectivo en* $\mathcal{A}$ *entonces* $\mathcal{D}(A)$ *es* Ext*-inyectivo en* $\mathcal{A}$.

l) Si A *es* Ext*-inyectivo en* $\mathcal{A}$ *entonces* $\mathcal{D}(A)$ *es* Ext*-proyectivo en* $\mathcal{A}$.

m) A *es* Ext*-proyectivo (*Ext*-inyectivo) en* $\mathcal{A}$ *si y solo si* A *es* Ext*-inyectivo (*Ext*-proyectivo) en* $\mathcal{A}$.

n) Si $\mathcal{A}$ *tiene sucesiones que casi se dividen a la izquierda entonces* $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ *tiene sucesiones que casi se dividen a la derecha.*

o) Si $\mathcal{A}$ *tiene sucesiones que casi se dividen a la derecha entonces* $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ *tiene sucesiones que casi se dividen a la izquierda.*

p) $\mathcal{A}$ *tiene sucesiones que casi se dividen a la derecha si y solo si* $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ *tiene sucesiones que casi se dividen a la izquierda.*

q) $\mathcal{A}$ *tiene sucesiones que casi se dividen si y solo si* $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ *tiene sucesiones que casi se dividen.*

Demostración.

a) Sea $g : B \to A$ tal que $1_A = gf$ luego $1_{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{D}(1_A) = \mathcal{D}(gf) = \mathcal{D}(f)\mathcal{D}(g)$.

b) Es análogo al inciso anterior. **c)** y **d)** se siguen de **a)** y **b)**.

e) Sea $h : \mathcal{D}(Y) \to \mathcal{D}(\mathcal{A})$ un morfismo que no es retracción con $Y \in \mathcal{A}$. Al ser $\mathcal{D}$ pleno existe $\alpha : A \to Y$ tal que $\mathcal{D}(\alpha) = h$, entonces por el inciso **c)** se tiene que α no es sección, de modo que existe $\alpha' : B \to Y$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[dl, "\alpha'"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

Así el diagrama

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{D}(Y) \arrow[dl, "\mathcal{D}(\alpha')"'] \arrow[d, "h"] \\ \mathcal{D}(B) \arrow[r, "\mathcal{D}(f)"] & \mathcal{D}(\mathcal{A}) \end{tikzcd}$$

conmuta, es decir, $\mathcal{D}(f)$ es un morfismo derecho que casi se divide en $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.

f) Es análogo al inciso anterior. **g)** se sigue de **e)** y **f**.

h) Por la proposición 1.1.34 se tiene que $D(f)$ es un epimorfismo, además $\mathcal{D}(f) \circ \mathcal{D}(g) = \mathcal{D}(g \circ f) = \mathcal{D}(0) = 0$. Sea $h : X \to \mathcal{D}(B)$ tal que $\mathcal{D}(f)h = 0$. Luego existen $Y \in \Lambda - mod$ y $\varphi : \mathcal{D}(Y) \to X$ un isomorfismo, ya que $\mathcal{D}$ es denso, así se tiene diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "0"'] & B \arrow[d, "\mathcal{D}(h\varphi)"] \\ & Y, \end{tikzcd}$$

de modo que por el lema 1.3.1 existe un único morfismo $\beta : C \to Y$ tal que $\beta g = \mathcal{D}(h\varphi)$, de modo que se tiene el diguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{D}(Y) \arrow[d, "\varphi"] \arrow[ddl, "\mathcal{D}(\beta)"'] \\ & X \arrow[d, "h"] \\ \mathcal{D}(C) \arrow[r, "\mathcal{D}(g)"'] & \mathcal{D}(B) \end{tikzcd}$$

luego $\mathcal{D}(g)\mathcal{D}(\beta)\varphi^{-1} = \mathcal{D}(\beta g)\varphi^{-1} = \mathcal{D}\mathcal{D}(h\varphi)\varphi^{-1} = h\varphi\varphi^{-1} = h$. Ahora bien, sea $\beta' : X \to \mathcal{D}(C)$ tal que $\mathcal{D}(g)\beta' = h$, entonces $\mathcal{D}(g)\beta'\varphi = h\varphi$ y así $g\mathcal{D}(\beta'\varphi) = \mathcal{D}(h\varphi)$, luego, por unicidad de β se tiene que $\mathcal{D}(\beta'\varphi) = \beta$, de modo que $\beta' = \mathcal{D}(\beta)\varphi^{-1}$. Entonces por el lema 4.1.4 se tiene que $\mathcal{D}(C) \xrightarrow{\mathcal{D}(g)} \mathcal{D}(B) \xrightarrow{\mathcal{D}(f)} \mathcal{D}(A)$ es sucesión exacta corta.

i) Se sigue de **h)** y **g)**.

j) Sea $\mathcal{D}(A) \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} \mathcal{D}(C)$ sucesión exacta corta con $A, C \in \mathcal{A}$ entonces por el inciso **e)** se tiene que $C \xrightarrow{\mathcal{D}(g)} \mathcal{D}(B) \xrightarrow{\mathcal{D}(f)} C$ es sucesión exacta corta, luego $\mathcal{D}(B) \in \mathcal{A}$, y así $B = \mathcal{D}\mathcal{D}(B) \in \mathcal{D}(A)$.

k) Sea $P \in \mathcal{A}$ un objeto Ext-proyectivo en $\mathcal{A}$. Sea $\eta : \mathcal{D}(A) \xrightarrow{\mathcal{D}(f)} \mathcal{D}(E) \xrightarrow{\mathcal{D}(g)} \mathcal{D}(F) \in Ext^1_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}\Big(\mathcal{D}(F), \mathcal{D}(A)\Big)$, entonces por el inciso **h)** se tiene que $\mathcal{D}(\eta) : A \xrightarrow{g} E \xrightarrow{f} F \in Ext^1_{\mathcal{A}}(F, A)$ de modo que f es retracción ya que A es Ext-proyectivo, entonces $\mathcal{D}(f)$ es sección por el inciso **b)** de modo que $Ext^1_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}\Big(\square, \mathcal{D}(A)\Big)$, es decir $\mathcal{D}(A)$ es Ext-inyectivo.

l) Es análogo y **m)** se sigue de **k)** y **l)**.

n) Sea $\mathcal{D}(X)$ inescindible y no Ext-proyectivo, de modo que por el inciso **m)** se tiene que X no es Ext-inyectivo en $\mathcal{A}$ y claramente es inescindible. Luego existe

$$X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{g} Z$$

una sucesión que casi se divide en $\mathcal{A}$, y así,

$$\mathcal{D}(Z) \xrightarrow{\mathcal{D}(g)} \mathcal{D}(Y) \xrightarrow{\mathcal{D}(f)} \mathcal{D}(X)$$

es sucesión que casi se divide en $\mathcal{D}(A)$ por el inciso **i)**.

o) Es análogo y **p)** y **q)** se siguen de **n)** y **o)**. ■

Lema 4.1.5 *Sea $\mathcal{A}$ como antes, $\alpha : 0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ conflación en $\mathcal{A}$ y $A = Y \oplus X$ con Y un objeto Ext-inyectivo en $\mathcal{A}$ entonces α es isomorfa a la suma directa de la conflación en $\mathcal{A}$ que se divide $0 \longrightarrow Y \xrightarrow{1_Y} Y \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$ y una conflación en $\mathcal{A}$ $0 \longrightarrow X \longrightarrow E \longrightarrow C \longrightarrow 0$.*

Demostración.

Como Y es Ext-inyectivo se tiene diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "{(0,1)}"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q"'] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "\binom{1}{0}"] & Y \amalg C \arrow[r, "{(0,1)}"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

de modo que $Y \cong f\left(\binom{0}{Y}\right)$ ya que $qf(y) = \binom{y}{0}$. Ahora bien para $b \in B$ consideremos el elemento $b - f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} q(b)$ y notemos que

$$\begin{aligned}
(1,0)q\left(b - f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} q(b)\right) &= (1,0)\left[q(b) - qf\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} q(b)\right] \\
&= (1,0)\left[q(b) - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} q(b)\right] \\
&= (1,0)\left[q(b) - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} q(b)\right] \\
&= (1,0)\left[\begin{pmatrix} y \\ c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}\right] = 0
\end{aligned}$$

es decir $b - f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} q(b) \in Ker\ (1,0)q$ y así $B = f\left(\binom{0}{Y}\right) + Ker\ (1,0)q$. Luego si $b \in f\left(\binom{0}{Y}\right) \cap Ker\ (1,0)q$ entonces

$$\begin{aligned}
0 = (1,0)q(b) &= (1,0)qf\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \\
&= (1,0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}(0,1)\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \\
&= (1)(y) = y
\end{aligned}$$

de modo que $B = f\left(\binom{0}{Y}\right) \oplus Ker\ (1,0)q$. Por otro lado $(1,0)qf\left(\binom{X}{0}\right) = (1,0)\binom{1}{0}(0,1)\binom{X}{0} = 0$, es decir, $f\left(\binom{X}{0}\right) \subset Ker\ (1,0)q$. Asi α tiene una descomposición

$$0 \longrightarrow X \oplus Y \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{smallmatrix}\right)} Ker\ (1,0)q \oplus f\left(\binom{0}{Y}\right) \xrightarrow{(g_1,0)} C \longrightarrow 0$$

■

Proposición 4.1.6 *Sea $\mathcal{A}$ contravariantemente finita (no necesariamente cerrada bajo extensiones) y sean $C \in \mathcal{A}$ no Ext-proyectivo y $B \xrightarrow{d} C$ un morfismo derecho que casi se divide en $\mathcal{A}$. Entonces d es un epimorfismo.*

Demostración.

Como C no es Ext-proyectivo, existe sucesión exacta que no se divide

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

con $L, M \in \mathcal{A}$, luego $M \xrightarrow{g} C$ es un epimorfismo que no se divide, de modo que hay un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dashed] \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "d"] & C \end{tikzcd}$$

de donde d es epimorfismo. ■

Proposición 4.1.7 *Sea $\mathcal{A}$ covariantemente finita (no necesariamente cerrada bajo extensiones) y sean $A \in \mathcal{A}$ no Ext-inyectivo y $A \xrightarrow{i} B$ un morfismo izquierdo que casi se divide en $\mathcal{A}$. Entonces i es un monomorfismo.*

Demostración.

Como A no es Ext-inyectivo, existe sucesión exacta que no se divide

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

con $L, M \in \mathcal{A}$, luego $A \xrightarrow{f} L$ es un monomorfismo que no se divide, de modo que hay un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[dl, dashed] \\ L & \end{tikzcd}$$

de donde i es monomorfismo. ■

Definición 4.1.8 Sean $A, C \in \mathcal{A}$.

- Decimos que A es $\mathcal{A}$-inyectivo divisible si cualquier monomorfismo $s : A \to B$, con $B \in \mathcal{A}$, es una sección.
- Decimos que C es $\mathcal{A}$-proyectivo divisible si cualquier epimorfismo $r : B \to C$, con $B \in \mathcal{A}$, es una retracción.

Proposición 4.1.9

- *$\mathcal{A}$-inyectivo divisible implica Ext-inyectivo.*
- *$\mathcal{A}$-proyectivo divisible implica Ext-proyectivo.* ■

ejemplo. Sea $\Lambda = \begin{pmatrix} k & 0 \\ k \oplus k & k \end{pmatrix}$ y $\mathcal{A}$ la subcategoria plena de todos los Λ módulos proyectivos finitamente generados.

Notemos que $\mathcal{A}$ es cerrada bajo isomorfismos, sumandos directos y extensiones.

Todos los objetos de $\mathcal{A}$ son $\mathcal{A}$-proyectivos divisibles y Ext-inyectivos, pero el monomorfismo no divisible

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, shift left, "0"] \arrow[r, shift right, "0"'] \arrow[d, "0"'] & K \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}"] \\ K \arrow[r, shift left, "\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}"] \arrow[r, shift right, "\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}"'] & K \end{tikzcd}$$

muestra que el proyectivo inescindible $\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, shift left, "0"] \arrow[r, shift right, "0"'] & K \end{tikzcd}$ no es $\mathcal{A}$-inyectivo divisible.

Proposición 4.1.10 *Sea $r_{\mathcal{A}}I \xrightarrow{g_I} I$ $\mathcal{A}$-aproximación derecha minimal de I, con I inyectivo en $\Lambda - mod$, entonces $r_{\mathcal{A}}I$ es $\mathcal{A}$-inyectivo divisible.*

Demostración.

Dado $h : r_{\mathcal{A}}I \to L$ monomorfismo con $L \in \mathcal{A}$ existe, por inyectividad de I, $t : L \to I$ tal que $th = g_I$. Como g_I es una $\mathcal{A}$-aproximación derecha existe $u : L \to r_{\mathcal{A}}I$ tal que $g_I u = t$, de modo que $g_I uh = th = g_I$, luego por minimalidad de g_I se sigue que uh es un automorfismo, así que h es una sección.

Proposición 4.1.11 *Sea $\mathcal{A}$ contravariantemente finita (no necesariamente cerrada bajo extensiones) y sea $M \in \mathcal{A}$. Entonces existe un monomorfismo $f : M \to I$ con I $\mathcal{A}$-inyectivo divisible.*

Demostración.

Sea $\sigma : M \to I(M)$ la envolvente inyectiva de M. Como $\mathcal{A}$ es contravariantemente finita tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, dashed, "f"'] & I(M) \\ r_{\mathcal{A}}I(M) \arrow[ur, "g_{I(M)}"'] & \end{tikzcd}$$

de donde f es un monomorfismo y, por 4.1.10 $r_{\mathcal{A}}I(M)$ es $\mathcal{A}$-inyectivo divisible. ■

Proposición 4.1.12 *Sea I un $\mathcal{A}$-inyectivo divisible y sea $I = I_1 \oplus I_2$, entonces I_1 es $\mathcal{A}$-inyectivo divisible.*

Demostracioón.

Sea $f : I_1 \to A$ monomorfismo con $A \in \mathcal{A}$, luego $I_1 \oplus I_2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} A \oplus I_2$ también es monomorfismo, así existe $A \oplus I_2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}} I_1 \oplus I_2$ tal que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha f & \beta \\ \gamma f & \delta \end{pmatrix}$$

De modo que f es una sección. ■

Lema 4.1.13 *Sea $\mathcal{A}$ contravariantemente finita (no necesariamente cerrada bajo extenciones) y sea $I_0 \in \mathcal{A}$ un $\mathcal{A}$-inyectivo divisible, entonces I_0 es sumando directo de $r_{\mathcal{A}}I$ con I inyectivo en Λ-mod.*

Demostración.

Se verifica através del diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
I_0 \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, dashed, "f"'] \arrow[dd, bend right=60, "1_{I_0}"'] & I(I_0) \\
r_{\mathcal{A}}I(I_0) \arrow[ur, "g_{I(I_0)}"'] \arrow[d, "r"'] & \\
I_0 &
\end{tikzcd}$$

Corolario 4.1.14 *Sea $\mathcal{A}$ como antes (no necesariamente cerrada bajo extensiones) entonces M es $\mathcal{A}$-inyectivo divisible si y solo si es sumando directo de $r_{\mathcal{A}}I$ para I un Λ-módulo inyectivo.*

Demostración.

Se sigue del lema 4.1.13 y de las proposiciones 4.1.12 y 4.1.10. ■

Proposición 4.1.15 *Sea $\mathcal{A}$ contravariantemente finita (no necesariamente cerrada bajo extensiones) y sean I_1, I_2 $\mathcal{A}$-inyectivos divisibles, entonces $I_1 \amalg I_2$ es $\mathcal{A}$-inyectivo divisible.*

Demostración.

Del lema 4.1.13 existen I_1' y I_2' tales que $I_1 \oplus I_1' = r_{\mathcal{A}}J_1$ y $I_2 \oplus I_2' = r_{\mathcal{A}}J_2$, con J_1 y J_2 inyectivos en $\Lambda - mod$, y así $J_1 \amalg J_2$ es inyectivo en $\Lambda - mod$. Por 2.1.11

$$(I_1 \amalg I_2) \coprod (I_1' \amalg I_2') \cong r_{\mathcal{A}}J_1 \amalg r_{\mathcal{A}}J_2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} g_{I_1} & 0 \\ 0 & g_{I_2} \end{pmatrix}} J_1 \amalg J_2$$

es una $\mathcal{A}$-aproximación derecha minimal de $J_1 \amalg J_2$ luego $(I_1 \amalg I_2) \coprod (I_1' \amalg I_2')$ es $\mathcal{A}$-inyectivo divisible por 4.1.10, de modo que $I_1 \amalg I_2$ es $\mathcal{A}$-inyectivo divisible por 4.1.12. ■

Corolario 4.1.16 *La suma directa finita de objetos $\mathcal{A}$-inyectivo divisibles es un objeto $\mathcal{A}$-inyectivo divisible.* ■

Proposición 4.1.17 *Sea* $P \xrightarrow{f^P} l_{\mathcal{A}}P$ *$\mathcal{A}$-aproximación izquierda minimal de P, con P proyectivo en $\Lambda - mod$, entonces $l_{\mathcal{A}}P$ es $\mathcal{A}$-proyectivo divisible.*

Demostración.

Dado $h : L \to l_{\mathcal{A}}P$ epimorfismo con $L \in \mathcal{A}$ existe, por proyectividad de P, $t : P \to L$ tal que $ht = f^P$. Como f^P es una $\mathcal{A}$-aproximación izquierda existe $u : l_{\mathcal{A}}P \to P$ tal que $uf^P = t$, de modo que $huf^P = ht = f^P$, luego por minimalidad de f^P se sigue que hu es un automorfismo, así que h es una retracción. ■

Proposición 4.1.18 *Sea $\mathcal{A}$ covariantemente finita (no necesariamente cerrada bajo extensiones) y sea $M \in \mathcal{A}$. Entonces existe un epimorfismo $g : P \to M$ con P $\mathcal{A}$-proyectivo divisible.*

Demostración.

Sea $\pi : P(M) \to M$ la cubierta proyectiva de M. Como $\mathcal{A}$ es covariantemente finita tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} P(M) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f^{P(M)}"'] & M \\ l_{\mathcal{A}}P(M) \arrow[ur, dashed, "g"'] & \end{tikzcd}$$

de donde g es un epimorfismo y, por 4.1.17 $l_{\mathcal{A}}P(M)$ es $\mathcal{A}$-proyectivo divisible. ■

Proposición 4.1.19 *Sea P un $\mathcal{A}$-proyectivo divisible y sea $P = P_1 \oplus P_2$, entonces P_1 es $\mathcal{A}$-proyectivo divisible.*

Demostración.

Sea $g : A \to P_1$ epimorfismo con $A \in \mathcal{A}$, luego $A \oplus P_2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} P_1 \oplus P_2$ también es epimorfismo, así existe $P_1 \oplus P_2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}} A \oplus P_2$ tal que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g\alpha & g\beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

De modo que g es una retracción. ■

Lema 4.1.20 *Sea $P_0 \in \mathcal{A}$ un $\mathcal{A}$-proyectivo divisible, entonces P_0 es sumando directo de $l_{\mathcal{A}}P$ con P proyectivo en Λ-mod.*

Demostración.

Se verifica através del diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & P(P_0) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f^{P(P_0)}"'] & P_0 \\
 & l_{\mathcal{A}}P(P_0) \arrow[ur, dashed, "g"'] & \\
P_0 \arrow[ur, "s"] \arrow[uurr, bend right, "1_{P_0}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Corolario 4.1.21 *Sea $\mathcal{A}$ como antes (no necesariamente cerrada bajo extensiones) entonces M es $\mathcal{A}$-proyectivo divisible si y solo si es sumando directo de $l_{\mathcal{A}}P$ para P un Λ-módulo proyectivo.*

Demostración.

Se sigue del lema 4.1.20 y de las proposiciones 4.1.19 y 4.1.17. ■

Proposición 4.1.22 *Sea $\mathcal{A}$ covariantemente finita (no necesariamente cerrada bajo extensiones) y sean P_1, P_2 $\mathcal{A}$-proyectivos divisibles, entonces $P_1 \amalg P_2$ es $\mathcal{A}$-proyectivo divisible.*

Demostración.

Del lema 4.1.20 existen P_1' y P_2' tales que $P_1 \oplus P_1' = l_{\mathcal{A}}Q_1$ y $P_2 \oplus P_2' = l_{\mathcal{A}}Q_2$. Con Q_1 y Q_2 proyectivos en $\Lambda - mod$, y así $Q_1 \amalg Q_2$ es un proyectivo en $\Lambda - mod$. Por 2.1.13

$$Q_1 \amalg Q_2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} f^{P_1} & 0 \\ 0 & f^{P_2} \end{pmatrix}} l_{\mathcal{A}}Q_1 \amalg l_{\mathcal{A}}Q_2 \cong (P_1 \amalg P_2) \coprod (P_1' \amalg P_2')$$

es una $\mathcal{A}$-aproximación izquierda minimal de $Q_1 \amalg Q_2$ luego $(P_1 \amalg P_2) \coprod (P_1' \amalg P_2')$ es $\mathcal{A}$-proyectivo divisible por 4.1.17, de modo que $P_1 \amalg P_2$ es $\mathcal{A}$-proyectivo divisible por 4.1.19. ■

Corolario 4.1.23 *La suma directa finita de objetos $\mathcal{A}$-proyectivo divisibles es un objeto $\mathcal{A}$-proyectivo divisible.* ■

4.2 SECCIONES Y RETRACCIONES EN SUBCATEGORÍAS

Definición 4.2.1 Sean $A \in \mathcal{A}$ y $Z \in \Lambda - mod$. Un morfismo $g : A \to Z$ es una $\mathcal{A}$-sección si $g = hf$ para $f : A \to V$ y $h : V \to Z$ con $V \in \mathcal{A}$ implica que f es una sección. Un morfismo $f : Z \to A$ es una $\mathcal{A}$-retracción si $f = gh$ para $h : Z \to V$ y $g : V \to A$ con $V \in \mathcal{A}$ implica que g es una retracción.

Observación 4.2.2

a) Si $g : A \to Z$ es $\mathcal{A}$-sección entonces g es morfismo minimal derecho.

b) Si $f : Z \to A$ es $\mathcal{A}$-retracción entonces f es morfismo minimal izquierdo. ◀

Proposición 4.2.3

a) Un morfismo $g : A \to Z$ con $A, Z \in \mathcal{A}$ es $\mathcal{A}$-sección si y solo si es una sección.

a') Un morfismo $f : Z \to A$ con $A, Z \in \mathcal{A}$ es $\mathcal{A}$-retracción si y solo si es una retracción.

b) Un morfismo irreducible $g : A \to Z \in \Lambda - mod$ con $A \in \mathcal{A}$ y $Z \notin \mathcal{A}$ es una $\mathcal{A}$-sección.

b') Un morfismo irreducible $f : Z \to A \in \Lambda - mod$ con $A \in \mathcal{A}$ y $Z \notin \mathcal{A}$ es una $\mathcal{A}$-retracción.

c) Sea $A \in \mathcal{A}$ inescindible. Entonces existe $\mathcal{A}$-sección $g : A \to Z$ con $Z \notin \mathcal{A}$ inescindible si y solo si existe algún morfismo minimal izquierdo que casi se divide $f : A \to B \in \Lambda - mod$ con $B \notin \mathcal{A}$.

c') Sea $A \in \mathcal{A}$ inescindible. Entonces existe una $\mathcal{A}$-retracción $f : Z \to A$ con $Z \notin \mathcal{A}$ inescindible si y solo si existe algún morfismo minimal derecho que casi se divide $h : B \to A \in \lambda - mod$ con $B \notin \mathcal{A}$.

Demostración.

a) Si g es $\mathcal{A}$ sección, la igualdad $g = 1_Z g$ implica que g es sección. Supongamos ahora que g es sección, de modo que existe $j : Z \to A$ tal que $jg = 1_A$. Si $g = hf$ para $f : A \to V$ y $h : V \to Z$ entonces $(jh)f = 1_A$, luego f es sección y g es $\mathcal{A}$-sección.

a') Es análogo al inciso anterior.

b) Si $g = hf$ para $f : A \to V$ y $h : V \to Z$ con $V \in \mathcal{A}$, entonces h no es retracción ya que $\mathcal{A}$ es cerrado bajo sumandos directos y $Z \notin \mathcal{A}$. Así, al ser g un morfismo irreducible se tiene que f es sección, luego g es $\mathcal{A}$-sección.

b') Es análogo al inciso anterior.

c) $\Rightarrow)$ Sea $f : A \to B$ un morfismo minimal izquierdo que casi se divide, de modo que existe $h : B \to Z$ tal que $g = hf$, ya que g no es sección al ser Z inescindible. Así $B \notin \mathcal{A}$ (de otra forma f seria sección lo que contradice la definición de f).

$\Rightarrow)$ Sea $B_1 \oplus \cdots \oplus B_n$ descomposición de B en inescindibles. Como $\mathcal{A}$ es cerrado bajo sumas directas existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $B_i \notin \mathcal{A}$. Luego $\pi_i f : A \to B_i$ es irreducible por el teorema 1.5.20, donde π_i es la proyección canónica, así, $\pi_i f$ es $\mathcal{A}$-sección, por **b)**.

c') Es análogo al inciso anterior. ■

Proposición 4.2.4 *Sea $\mathcal{A}$ contravariantemente finita entonces $g : A \to Z$ con $A \in \mathcal{A}$ es $\mathcal{A}$-sección si y solo si existe un morfismo $g' : A' \to Z$ con $A' \in \mathcal{A}$ tal que $(g, g') : A \amalg A' \to Z$ es una $\mathcal{A}$-aproximación derecha minimal de Z.*

Demostración.

$\Rightarrow)$ Sea $g_Z : r_{\mathcal{A}}Z \to Z$ la $\mathcal{A}$-aproximación derecha minimal de Z, de modo que existe $f : A \to r_{\mathcal{A}}Z$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
r_{\mathcal{A}}Z \arrow[r, "g_Z"] & Z \\
A \arrow[u, dashed, "f"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

luego f es sección y así existe un isomorfismo $(f, f') : A \amalg A' \to r_{\mathcal{A}}Z$, además como $\mathcal{A}$ es cerrada bajo sumandos directos se tiene que $A' \in \mathcal{A}$. Luego $(g, g_Z f') : A \amalg A' \to Z$ es $\mathcal{A}$-aproximación derecha minimal de Z ya que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \amalg A' \arrow[dr, "{(g,g_Z f')}"] & \\
r_{\mathcal{A}}Z \arrow[u, "\cong"] \arrow[r, "g_Z"] & Z \\
X \arrow[u, dashed, "\overline{h}"] \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta para todo $h : X \to Z$ con $X \in \mathcal{A}$.

$\Leftarrow)$ Sea $g = hf$ para $f : A \to V$ y $h : V \to Z$ con $V \in \mathcal{A}$, entonces existe $\binom{h_1}{h_2} : V \to A \amalg A'$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
A \amalg A' \arrow[r, "{(g,g')}"] & Z \\
V \arrow[u, "\binom{h_1}{h_2}"] \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

así el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \amalg A' \arrow[r, "{(g,g')}"] & Z \\
A \amalg A' \arrow[u, "\begin{pmatrix} h_1 f & 0 \\ h_2 f & 1 \end{pmatrix}"] \arrow[ur, "{(g,g')}"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta ya que

$$\begin{aligned}(g,g')\begin{pmatrix} h_1f & 0 \\ h_2f & 1\end{pmatrix} &= (gh_1f + g'h_2f, g') \\ &= \big((gh_1 + g'h_2)f, g'\big) \\ &= \left(\left((g,g')\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2\end{pmatrix}\right) f, g'\right) \\ &= (hf, g') \\ &= (g,g').\end{aligned}$$

Entonces, existe $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix} : A \amalg A' \to A \amalg A'$ tal que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1f & 0 \\ h_2f & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha h_1 f + \beta h_2 f & \beta \\ \gamma h_1 f + \delta h_2 f & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha h_1 + \beta h_2)f & \beta \\ (\gamma h_1 + \delta h_2)f & \delta\end{pmatrix}$$

de modo que f es sección y por lo tanto g es $\mathcal{A}$-sección. ■

Proposición 4.2.5 *Sea $\mathcal{A}$ covariantemente finita entonces $f : Z \to A$ con $A \in \mathcal{A}$ es $\mathcal{A}$-retracción si y solo si existe un morfismo $f' : Z \to A'$ con $A' \in \mathcal{A}$ tal que $\binom{f}{f'} : Z \to A \amalg A'$ es una $\mathcal{A}$-aproximación izquierda minimal de Z.*

$\Rightarrow$) Sea $f^Z : Z \to l_{\mathcal{A}}Z$ $\mathcal{A}$-aproximación izquierda minimal de Z, de modo que existe $g : l_{\mathcal{A}}Z \to A$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f^Z"] \arrow[d, "f"'] & l_{\mathcal{A}}Z \arrow[dl, dashed, "g"] \\ A & \end{tikzcd}$$

luego g es retracción y así existe un isomorfismo $\binom{g}{g'} : l_{\mathcal{A}}Z \to A \amalg A'$, además como $\mathcal{A}$ es cerrada bajo sumandos directos se tiene que $A' \in \mathcal{A}$. Luego $\binom{f}{g'f^Z} : Z \to A \amalg A'$ es $\mathcal{A}$-aproximación izquierda minimal de Z ya que el diagrama

$$\begin{tikzcd} & A \amalg A' \arrow[d, "\cong"] \\ Z \arrow[ur, "\binom{f}{g'f^Z}"] \arrow[r, "f^Z"] \arrow[dr, "h"'] & l_{\mathcal{A}}Z \arrow[d, dashed, "\hat{h}"] \\ & X \end{tikzcd}$$

conmuta para todo $h : Z \to X$ con $X \in \mathcal{A}$.

$\Leftarrow$) Sea $f = gh$ para $h : Z \to V$ y $g : V \to A$ con $V \in \mathcal{A}$, entonces existe $(h_1, h_2) : A \amalg A' \to V$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\binom{f}{f'}"] \arrow[d, "h"'] & A \amalg A' \arrow[dl, "(h_1, h_2)"] \\ V & \end{tikzcd}$$

así el diagrama

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\binom{f}{f'}"] \arrow[dr, "\binom{f}{f'}"'] & A \amalg A' \arrow[d, "\begin{pmatrix} gh_1 & gh_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}"] \\ & A \amalg A' \end{tikzcd}$$

conmuta ya que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} gh_1 & gh_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} gh_1 f + gh_2 f' \\ f' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} g(h_1 f + h_2 f') \\ f' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} g\left((h_1, h_2)\binom{f}{f'}\right) \\ f' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} gh \\ f' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

entonces, existe $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} : A \amalg A' \to A \amalg A'$ tal que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} gh_1 & gh_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} gh_1\alpha + gh_2\gamma & gh_1\beta + gh_2\delta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(h_1\alpha + h_2\gamma) & g(h_1\beta + h_2\delta) \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

de modo que g es retracción y por lo tanto f es $\mathcal{A}$-retracción. ■

Corolario 4.2.6 *Sea $\mathcal{A}$ contravariantemente finita. Un módulo inescindible $A \in \mathcal{A}$ es sumando directo de $r_{\mathcal{A}}Z$ para Z un Λ-módulo inescindible con $Z \notin \mathcal{A}$ si y solo si existe $A \to B$ un morfismo minimal izquierdo que casi se divide en $\mathcal{A}$ con $B \notin \mathcal{A}$.*

Demostración.

Se sigue de las proposiciones 4.2.3 y 4.2.4. ■

Corolario 4.2.7 *Sea $\mathcal{A}$ covariantemente finita. Un módulo inescindible $A \in \mathcal{A}$ es sumando directo de $l_{\mathcal{A}}Z$ para Z un Λ-módulo inescindible con $Z \notin \mathcal{A}$ si y solo si existe $A \to B$ un morfismo minimal derecho que casi se divide en $\mathcal{A}$ con $B \notin \mathcal{A}$.*

Demostración.

Se sigue de las proposiciones 4.2.3 y 4.2.5. ■

4.3 SUBCATEGORÍAS CERRADAS BAJO EXTENSIONES

Lema 4.3.1 *Sea $g \in Hom_{\Lambda}(A, Z)$ entonces*

a) hay una tranformacion natural entre los funtores contravariantes $Ext^1_{\Lambda}(\Box, A)$ y $Ext^1_{\Lambda}(\Box, Z)$.

b) hay una transformación natural entre los funtores covariantes $Ext^1_{\Lambda}(Z, \Box)$ y $Ext^1_{\Lambda}(A, \Box)$.

Demostración.

a) Se debe probar que el diagrama

$$\begin{tikzcd} Ext^1_{\Lambda}(N, A) \arrow[r, "\overline{g}"] \arrow[d, "\overline{f}"'] & Ext^1_{\Lambda}(N, Z) \arrow[d, "\overline{f}"] \\ Ext^1_{\Lambda}(M, A) \arrow[r, "\overline{g}"'] & Ext^1_{\Lambda}(M, Z) \end{tikzcd}$$

conmuta para todo Λ-morfismo $f : M \to N$, donde $\overline{g}$ y $\overline{f}$ son los morfismo inducidos por g y f respectivamente.

Sea $\eta : A \xrightarrow{\epsilon} L \xrightarrow{\epsilon'} N \in Ext^1_\Lambda(N, A)$, $\overline{g}(\eta)$ se obtiene a través del diagrama de $push{-}out$

$$\begin{tikzcd} \eta: & A \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "g"'] & L \arrow[r, "\epsilon'"] \arrow[d, "\delta"'] & N \arrow[d, equal] \\ \overline{g}(\eta): & Z \arrow[r, "\gamma"] & E \arrow[r, "\gamma'"] & N \end{tikzcd}$$

de forma similar se obtiene $\overline{f}\Big(\overline{g}(\eta)\Big)$ a través del diagrama de $pull - back$

$$\begin{tikzcd} \overline{f}\Big(\overline{g}(\eta)\Big): & Z \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & E' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\beta"'] & M \arrow[d, "f"'] \\ \overline{g}(\eta): & Z \arrow[r, "\gamma"] & E \arrow[r, "\gamma'"] & N \end{tikzcd}$$

Análogamente se tiene

$$\begin{tikzcd} \overline{f}(\eta): & A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, equal] & H \arrow[r, "\phi'"] \arrow[d, "\sigma"'] & M \arrow[d, "f"'] \\ \eta: & A \arrow[r, "\epsilon"] & L \arrow[r, "\epsilon'"] & N \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \overline{f}(\eta): & A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "g"'] & H \arrow[r, "\phi'"] \arrow[d, "\mu"'] & M \arrow[d, equal] \\ \overline{g}\Big(\overline{f}(\eta)\Big): & Z \arrow[r, "\varphi"] & H' \arrow[r, "\varphi'"] & M \end{tikzcd}$$

Luego del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "g"'] & H \arrow[d, "\mu"'] \arrow[ddr, bend left, "\delta\sigma"] & \\ Z \arrow[r, "\varphi"] \arrow[drr, bend right, "\gamma"'] & H' & \\ & & E \end{tikzcd}$$

existe un único morfismo $\theta : H' \to E$ tal que $\theta\mu = \delta\sigma$ y $\theta\varphi = \gamma$ y así del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "g"'] & H \arrow[d, "\mu"'] \arrow[ddr, bend left, "0"] & \\
Z \arrow[r, "\varphi"] \arrow[drr, bend right, "0"'] & H' \arrow[dr, "\gamma'\theta - f\varphi'"'] & \\
 & & 0
\end{tikzcd}$$

se tiene la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\overline{f}(\eta): & A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "g"'] & H \arrow[r, "\phi'"] \arrow[d, "\mu"'] & M \arrow[d, equal] \\
\overline{g}\Big(\overline{f}(\eta)\Big): & Z \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, equal] & H' \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d, "\theta"'] & M \arrow[d, "f"'] \\
\overline{g}(\eta): & Z \arrow[r, "\gamma"] & E \arrow[r, "\gamma'"] & N
\end{tikzcd}$$

De la misma forma del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[drr, bend left, "\phi'"] \arrow[ddr, bend right, "\delta\sigma"'] & & \\
 & E' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\beta"'] & M \arrow[d, "f"'] \\
 & E \arrow[r, "\gamma'"] & N
\end{tikzcd}$$

existe un único morfismo $\theta' : H \to E'$ tal que $\alpha'\theta' = \phi'$ y $\delta\sigma = \beta\theta'$. Luego del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[drr, bend left, "0"] \arrow[dr, "\alpha g - \theta'\phi"] \arrow[ddr, bend right, "0"'] & & \\
 & E' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\beta"'] & M \arrow[d, "f"'] \\
 & E \arrow[r, "\gamma'"] & N
\end{tikzcd}$$

se tiene la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}[row sep=large]
\overline{f}(\eta): & A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "g"'] & H \arrow[r, "\phi'"] \arrow[d, "\theta'"'] & M \arrow[d, equal] \\
\overline{f}\Big(\overline{g}(\eta)\Big): & Z \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & E' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\beta"'] & M \arrow[d, "f"'] \\
\overline{g}(\eta): & Z \arrow[r, "\gamma"] & E \arrow[r, "\gamma'"] & N
\end{tikzcd}$$

Así, por la proposición 2.3.13 de [G1] se tiene que $\overline{f}\Big(\overline{g}(\eta)\Big) \sim \overline{g}\Big(\overline{f}(\eta)\Big)$ ya que ambos son factorizaciones del morfismo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "g"'] & H \arrow[r, "\phi'"] \arrow[d, "\delta\sigma"'] & M \arrow[d, "f"'] \\
Z \arrow[r, "\gamma"] & E \arrow[r, "\gamma'"] & N
\end{tikzcd}$$

b) Se debe probar que el diagrama

$$\begin{tikzcd}[row sep=huge, column sep=huge]
Ext^1_\Lambda(Z,M) \arrow[r, "\overline{g}"] \arrow[d, "\overline{f}"'] & Ext^1_\Lambda(A,M) \arrow[d, "\overline{f}"] \\
Ext^1_\Lambda(Z,N) \arrow[r, "\overline{g}"'] & Ext^1_\Lambda(A,N)
\end{tikzcd}$$

conmuta para todo Λ-morfismo $f : M \to N$, donde $\overline{g}$ y $\overline{f}$ son los morfismo inducidos por g y f respectivamente.

Sea $\eta : M \xrightarrow{\epsilon} L \xrightarrow{\epsilon'} Z \in Ext^1_\Lambda(Z,M)$, $\overline{f}(\eta)$ se obtiene a través del diagrama de $push-out$

$$\begin{tikzcd}
\eta: & M \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "f"'] & L \arrow[r, "\epsilon'"] \arrow[d, "\delta"'] & Z \arrow[d, equal] \\
\overline{f}(\eta): & N \arrow[r, "\gamma"] & E \arrow[r, "\gamma'"] & Z
\end{tikzcd}$$

de forma similar se obtiene $\overline{g}\Big(\overline{f}(\eta)\Big)$ a través del diagrama de $pull-back$

$$\begin{tikzcd}[row sep=large]
\overline{g}\Big(\overline{f}(\eta)\Big): & N \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & E' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "g"'] \\
\overline{f}(\eta): & N \arrow[r, "\gamma"] & E \arrow[r, "\gamma'"] & Z
\end{tikzcd}$$

Análogamente se tiene

$$\begin{tikzcd}
\overline{g}(\eta): & M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, equal] & H \arrow[r, "\phi'"] \arrow[d, "\sigma"'] & A \arrow[d, "g"'] \\
\eta: & M \arrow[r, "\epsilon"] & L \arrow[r, "\epsilon'"] & Z
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\overline{g}(\eta): & M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "f"'] & H \arrow[r, "\phi'"] \arrow[d, "\mu"'] & A \arrow[d, equal] \\
\overline{f}\Big(\overline{g}(\eta)\Big): & N \arrow[r, "\varphi"] & H' \arrow[r, "\varphi'"] & A
\end{tikzcd}$$

Luego del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "f"'] & H \arrow[d, "\mu"'] \arrow[ddr, bend left, "\delta\sigma"] & \\
N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[drr, bend right, "\gamma"'] & H' & \\
 & & E
\end{tikzcd}$$

existe un único morfismo $\theta : H' \to E$ tal que $\theta\mu = \delta\sigma$ y $\theta\varphi = \gamma$ y así del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "f"'] & H \arrow[d, "\mu"'] \arrow[ddr, bend left, "0"] & \\
N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[drr, bend right, "0"'] & H' \arrow[dr, "\gamma'\theta - g\varphi'"'] & \\
 & & 0
\end{tikzcd}$$

se tiene la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\overline{g}(\eta): & M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "f"'] & H \arrow[r, "\phi'"] \arrow[d, "\mu"'] & A \arrow[d, equal] \\
\overline{f}\Big(\overline{g}(\eta)\Big): & N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, equal] & H' \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d, "\theta"'] & A \arrow[d, "g"'] \\
\overline{f}(\eta): & N \arrow[r, "\gamma"] & E \arrow[r, "\gamma'"] & Z
\end{tikzcd}$$

De la misma forma del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} H \arrow[rrd, bend left, "\phi'"] \arrow[rdd, bend right, "\delta\sigma"'] & & \\ & E' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "g"] \\ & E \arrow[r, "\gamma'"] & Z \end{tikzcd}$$

existe un único morfismo $\theta' : H \to E'$ tal que $\alpha'\theta' = \phi'$ y $\delta\sigma = \beta\theta'$. Luego del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[rrd, bend left, "0"] \arrow[rdd, bend right, "0"'] \arrow[rd, "\alpha f - \theta'\phi"] & & \\ & E' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "g"] \\ & E \arrow[r, "\gamma'"] & Z \end{tikzcd}$$

se tiene la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \overline{g}(\eta) : & M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "f"'] & H \arrow[r, "\phi'"] \arrow[d, "\theta'"'] & A \arrow[d, equal] \\ \overline{g}\Big(\overline{f}(\eta)\Big) : & N \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & E' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "g"'] \\ \overline{f}(\eta) : & N \arrow[r, "\gamma"] & E \arrow[r, "\gamma'"] & Z \end{tikzcd}$$

Así, por la proposición 2.3.13 de [G1], se tiene que $\overline{f}\Big(\overline{g}(\eta)\Big) \sim \overline{g}\Big(\overline{f}(\eta)\Big)$ ya que ambos son factorizaciones del morfismo

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "f"'] & H \arrow[r, "\phi'"] \arrow[d, "\delta\sigma"'] & A \arrow[d, "g"'] \\ N \arrow[r, "\gamma"] & E \arrow[r, "\gamma'"] & Z \end{tikzcd}$$

■

Lema 4.3.2 *Sean $\mathcal{A}$ como antes, $M \in \Lambda - mod$ y $f^M : M \to l_{\mathcal{A}}M$ una $\mathcal{A}$-aproximación izquierda minimal de M entonces*

$$Ext^1_\Lambda(f^M, \Box) : Ext^1_\Lambda(l_{\mathcal{A}}M, \Box)_{|\mathcal{A}} \to Ext^1_\Lambda(M, \Box)_{|\mathcal{A}}$$

es un monomorfismo de funtores covariantes.

Demostración.

Considere el diagrama conmutativo exacto

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & V \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "f^M"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r] & W \arrow[r, "g"] & l_{\mathcal{A}}M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

en $\Lambda - mod$ con $N \in \mathcal{A}$ de tal forma que $0 \longrightarrow N \longrightarrow V \xrightarrow{\alpha} M \longrightarrow 0$ se divide. Luego existe morfismo $\alpha' : M \to V$ tal que $\alpha\alpha' = 1_M$ y así $g\beta\alpha' = f^M$. Como $\mathcal{A}$ es cerrado bajo extensiones se tiene que $W \in \mathcal{A}$ y así existe morfismo $h : l_{\mathcal{A}}M \to W$ tal que $\beta\alpha' = hf^M$. Entonces $f^M = g\beta\alpha' = ghf^M$ de modo que gh es isomorfismo debido a que f^M es morfismo minimal izquierdo, luego g es retracción y $0 \longrightarrow N \longrightarrow W \xrightarrow{g} l_{\mathcal{A}}M$ se divide. Esto prueba que $Ext^1_\Lambda(f^M, N) : Ext^1_\Lambda(l_{\mathcal{A}}M, N) \to Ext^1_\Lambda(M, N)$ es un monomorfismo de R-módulos y así $Ext^1_\Lambda(f^M, \square) : Ext^1_\Lambda(l_{\mathcal{A}}M, \square)_{|\mathcal{A}} \to Ext^1_\Lambda(M, \square)_{|\mathcal{A}}$ es un monomorfismo de funtores covariantes. ∎

Lema 4.3.3 *Sean $\mathcal{A}$ como antes, $M \in \Lambda - mod$ y $g_M : r_{\mathcal{A}}M \to M$ una $\mathcal{A}$-aproximación derecha minimal de M entonces*

$$Ext^1_\Lambda(\square, g_M) : Ext^1_\Lambda(\square, r_{\mathcal{A}}M)_{|\mathcal{A}} \to Ext^1_\Lambda(\square, M)_{|\mathcal{A}}$$

es un monomorfismo de funtores contravariantes.

Demostración.

Considere el diagrama conmutativo exacto

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & r_{\mathcal{A}}M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g_M"'] & W \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\alpha"] & V \arrow[r] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

en $\Lambda - mod$ con $N \in \mathcal{A}$ de tal forma que $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha} V \longrightarrow N \longrightarrow 0$ se divide. Luego existe morfismo $\alpha' : V \to M$ tal que $\alpha'\alpha = 1_M$ y así $\alpha'\beta f = g_M$. Como $\mathcal{A}$ es cerrado bajo extensiones se tiene que $W \in \mathcal{A}$ y así existe morfismo $h : W \to r_{\mathcal{A}}M$ tal que $\alpha'\beta =$

$g_M h$. Entonces $g_M = \alpha'\beta f = g_M hf$ de modo que hf es isomorfismo debido a que g_M es morfismo minimal izquierdo, luego f es sección y $0 \longrightarrow r_{\mathcal{A}}M \xrightarrow{f} W \longrightarrow N$ se divide. Esto prueba que $Ext^1_\Lambda(N, g_M) : Ext^1_\Lambda(N, r_{\mathcal{A}}M) \to Ext^1_\Lambda(N, M)$ es un monomorfismo de R-módulos y así $Ext^1_\Lambda(\Box, g_M) : Ext^1_\Lambda(\Box, r_{\mathcal{A}}M)_{|\mathcal{A}} \to Ext^1_\Lambda(\Box, M)_{|\mathcal{A}}$ es un monomorfismo de funtores contravariantes. ■

Observación 4.3.4 *Para M un Λ-modulos $\tau(M) = D\ Tr\ M$ y $\sigma(M) = Tr\ D\ (M)$, donde D es la dualidad presentada en el teorema II.3.3 de [ARS1] y Tr es la transpuesta de M. (ver capitulo IV de [ARS1]).*

Proposición 4.3.5 *Sean $M \in \Lambda - mod$ y $g_{\tau M} : r_{\mathcal{A}}\tau M \to \tau M$ una $\mathcal{A}$-aproximación derecha minimal de τM entonces $Ext^1_\Lambda(M, \Box)_{|\mathcal{A}} = 0$ si y solo si $Ext^1_\Lambda(M, r_{\mathcal{A}}\tau M) = 0$.*

Demostración.

$\Rightarrow$) es inmediato ya que $r_{\mathcal{A}}\tau M \in \mathcal{A}$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $Ext^1_\Lambda(M, \Box)_{|\mathcal{A}} \neq 0$, es decir, existe sucesión que no se divide,

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\alpha} W \xrightarrow{\beta} M \longrightarrow 0,$$

con $N \in \mathcal{A}$, así, $1_M : M \to M$ no se factoriza a través de β y por el corolario $IV, 4{,}4$ de [ARS1] existe un morfismo $j : N \to \tau M$ que no se factoriza a través de α, el cual, induce el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "j"'] & W \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \tau M \arrow[r] & V \arrow[r] & M \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Ahora, como $N \in \mathcal{A}$ se tiene que $j = g_{\tau M} h$ para algún morfismo $h : N \to r_{\mathcal{A}}\tau M$, de tal forma que se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "h"'] & W \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"'] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & r_{\mathcal{A}}\tau M \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "g_{\tau M}"'] & E \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \tau M \arrow[r] & V \arrow[r] & M \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Por hipótesis $0 \longrightarrow r_{\mathcal{A}}\tau M \xrightarrow{\gamma} E \longrightarrow M \longrightarrow 0$ se divide, de modo que existe morfismo $\delta' : E \to r_{\mathcal{A}}\tau M$ tal que $\delta'\delta = 1_{r_{\mathcal{A}}\tau M}$ y así, $j = g_{\tau M}h = g_{\tau M}\delta'\delta h = g_{\tau M}\delta'\gamma\alpha$ lo que contradice la definición de j. Luego, $Ext^1_\Lambda(M, \square) = 0$. ■

Lema 4.3.6 *Sea $g : A \to Z$ un Λ-morfismo con $A \in \mathcal{A}$ y tal que*

$$Ext^1_\Lambda(\square, g) : Ext^1_\Lambda(\square, A)_{|\mathcal{A}} \to Ext^1_\Lambda(\square, Z)_{|\mathcal{A}}$$

es un monomorfismo de funtores contravariantes.

a) Si $Ext^1_\Lambda(\sigma Z, A) = 0$, entonces A es Ext-inyectivo en $\mathcal{A}$.

b) Si $\sigma Z \in \mathcal{A}$, entonces $Ext^1_\Lambda(\sigma Z, A) = 0$ si y solo si A es Ext-inyectivo en $\mathcal{A}$.

Demostración.

a) Sea $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ una sucesión exacta con $C \in \mathcal{A}$, y sea η su clase correspondiente en $Ext^1_\Lambda(C, A)$. Sea $h : \sigma Z \to C$ un morfismo, así del diagrama de $pull - back$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d] & \sigma Z \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[r, "\beta"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

se tiene que h se factoriza a través de β ya que $0 \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow \sigma Z \longrightarrow 0$ se divide. Así por el resultado dual al corolario $IV, 4{,}4$ de [ARS1] se tiene que todo morfismo $A \to Z$ se factoriza a través de α, en particular el morfismo g, de modo que existe $\gamma : B \to Z$ tal que $\gamma\alpha = g$. Luego del diagrama de $push - out$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z \arrow[r] & L \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

se tiene que $0 \longrightarrow Z \longrightarrow L \longrightarrow C \longrightarrow 0$ se divide ya que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "\gamma"] & \\
Z \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "1_Z"'] & L & \\
 & & Z
\end{tikzcd}$$

conmuta. Se sigue que $Ext^1_\Lambda(C,g)(\eta)=0$ y así $\eta=0$ ya que $Ext^1_\Lambda(C,g)$ es un monomorfismo. Por lo tanto A es Ext-inyectivo en $\mathcal{A}$.

b) Se sigue de **a)** y la definición 4.1.1. ■

Lema 4.3.7 *Sea $g: A \to C$ una $\mathcal{A}$-sección entonces*

$$Ext^1_\Lambda(\Box,g): Ext^1_\Lambda(\Box,A)_{|\mathcal{A}} \to Ext^1_\Lambda(\Box,C)_{|\mathcal{A}}$$

es un monomorfismo de funtores contravariantes.

Demostración.

Considere el diagrama exacto conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & D \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C \arrow[r, "\beta"] & B' \arrow[r] & D \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

donde la sucesión inferior se divide, de modo que existe $\beta': B' \to C$ tal que $g=\beta' h\alpha$ y así α es sección ya que $\mathcal{A}$ es cerrada bajo extensiones. Luego $Ext^1_\Lambda(\Box,g)$ es un monomorfismo de funtores contravariantes. ■

Teorema 4.3.8 *Sean $\mathcal{A}$ como antes, $\mathcal{A}$ cerrada bajo extensiones, $C \in \mathcal{A}$ inescindible y no Ext-proyectivo en $\mathcal{A}$ y $g_{\tau C}: r_{\mathcal{A}}\tau C \to \tau C$ una $\mathcal{A}$-aproximación derecha minimal de τC*

a) $Ext^1_\Lambda(C, r_{\mathcal{A}}\tau C)$ tiene un soclo simple como $End_\Lambda(C)^{op}$-módulo.

b) $r_{\mathcal{A}}\tau C = A \oplus Y$ con A inescindible, Y Ext-inyectivo en $\mathcal{A}$ y $Ext^1_\Lambda(C,A)$ tiene un soclo simple como $End_\Lambda(C)^{op}$-módulo.

c) Existe un diagrama exacto conmutativo

$$\begin{tikzcd} \alpha: 0 \arrow[r] & r_{\mathcal{A}}\tau C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g_{\tau C}"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "t"'] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ \beta: 0 \arrow[r] & \tau C \arrow[r, "u"] & F \arrow[r, "v"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

donde β es sucesión que casi se divide en $\Lambda - mod$, g es morfismo derecho que casi se divide en $\mathcal{A}$ y t es $\mathcal{A}$-aproximación derecha minimal de F. La sucesión α es isomorfa a la suma directa de la sucesión exacta que se divide $0 \longrightarrow Y \xrightarrow{1_Y} Y \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$ y una sucesión $0 \longrightarrow A \xrightarrow{p} E \xrightarrow{q} C \longrightarrow 0$ que casi se divide en $\mathcal{A}$.

Demostración.

a) Por el lema 4.3.3 se tiene que $Ext^1_\Lambda(\square, g_{\tau C}) : Ext^1_\Lambda(\square, r_\mathcal{A}\tau C) \to Ext^1_\Lambda(\square, \tau C)$ es un monomorfismo de funtores contravariantes ya que $\mathcal{A}$ es cerrado bajo extensiones. Luego $Ext^1_\Lambda(C, g_{\tau C}) : Ext^1_\Lambda(C, r_\mathcal{A}\tau C) \to Ext^1_\Lambda(C, \tau C)$ es un monomorfismo de R-módulos y, por el lema 4.3.1, es un monomorfismo de $End_\Lambda(C)^{op}$-módulos. Por otro lado como C no es Ext-proyectivo en $\mathcal{A}$ entonces por la proposición 4.3.5 $Ext^1_\Lambda(C, r_\mathcal{A}\tau C)$ no es cero y tiene soclo distinto de cero, además como C no es proyectivo de la proposición $V, 2{,}1$ de [ARS1] se tiene que $Ext^1_\Lambda(C, \tau C)$ posee un soclo simple como $End_\Lambda(C)^{op}$-módulo. Así $Ext^1_\Lambda(C, r_\mathcal{A}\tau C)$ tiene un soclo simple como $End_\Lambda(C)^{op}$-módulo.

b) Si $r_\mathcal{A}\tau C = A_1 \oplus \cdots \oplus A_m,$, donde A_j es inescindible para $j = 1, \ldots, m$, entonces la imagen del monomorfismo $Ext^1_\Lambda(C, g_{\tau C})$ es un $End_\Lambda(C)^{op}$-submódulo de $Ext^1_\Lambda(C, \tau C)$ isomorfo a $Ext^1_\Lambda(C, r_\mathcal{A}\tau C) \cong \bigoplus_{j=1}^m Ext^1_\Lambda(C, A_j)$. usando la aditividad del funtor $Ext^1_\Lambda(C, \square) : \Lambda - mod \to End_\Lambda(C)^{op} - mod$. Ahora bien, por **a)** existe precisamente una i tal que $Ext^1_\Lambda(C, A_i) \neq 0$ tiene un soclo simple como $End_\Lambda(C)^{op}$-módulo, y $Ext^1_\Lambda(C, A_j) = 0$ para $j \neq i$. Esto sugiere tomar $A = A_i$ y $Y = \bigoplus_{j \neq i} A_j$. Por la proposición 4.2.4 se tiene que $g_{\tau C_{|Y}} : Y \to \tau C$ es una $\mathcal{A}$-sección y así $Ext^1_\Lambda(\square, g_{\tau C_{|Y}})$ es un monomorfismo de funtores contravariantes por el lema 4.3.7. Luego, aplicando el lema 4.3.6 se tiene que Y es Ext-inyectivo en $\mathcal{A}$.

c) Sea $\alpha : 0 \longrightarrow r_\mathcal{A}\tau C \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ sucesión exacta que no se divide cuya clase de equivalencia pertenezca al soclo de $Ext^1_\Lambda(C, r_\mathcal{A}\tau C)$ como $End_\Lambda(C)^{op}$-módulo, entonces se tiene diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\alpha : 0 \arrow[r] & r_\mathcal{A}\tau C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g_{\tau C}"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "t"'] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\beta : 0 \arrow[r] & \tau C \arrow[r, "u"] & F \arrow[r, "v"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde β pertenece al soclo de $Ext^1_\Lambda(C,\tau C)$ como $End_\Lambda(C)^{op}$-módulo ya que $Ext^1_\Lambda(C,g_{\tau C})$ es monomorfismo, de modo que por la proposición V,2,1 de [ARS1] β es sucesión que casi se divide en $\Lambda - mod$. Ahora bien, como C y $r_{\mathcal{A}}\tau C \in \mathcal{A}$ entonces $B \in \mathcal{A}$ ya que $\mathcal{A}$ es cerrada bajo extensiones y si $h : X \to C$ no es retracción con $X \in \mathcal{A}$ entonces $g_{\tau C}(\alpha h) = (g_{\tau C}\alpha)h = \beta h$ se divide ya que β es sucesión que casi se divide en $\Lambda - mod$, y así αh se divide ya que $Ext^1_\Lambda(C,g_{\tau C})$ es monomorfismo, luego h se factoriza a través de g, es decir, g es morfismo derecho que casi se divide en $\mathcal{A}$ y por el lema 2.1.10 inciso **b)** t es una $\mathcal{A}$-aproximación derecha minimal de F. Por otro lado por el lema 4.1.5 α es isomorfa a la suma directa de las sucesiones

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{1_Y} Y \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$

y

$$\alpha' : 0 \longrightarrow A \xrightarrow{p} E \xrightarrow{q} C \longrightarrow 0$$

donde q es morfismo tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi"'] & C \\ E \arrow[ur, "q"'] & \end{tikzcd}$$

y así q es morfismo derecho que casi se divide en $\mathcal{A}$ y por la proposición 1.5.13, se tiene que α' es sucesión que casi se divide en $\mathcal{A}$. ■

Corolario 4.3.9 *Sea $\mathcal{A}$ subcategoría de $\Lambda - mod$ contravariantemente finita y cerrada bajo extensiones entonces en $\mathcal{A}$ hay sucesiones que casi se dividen a la derecha.*

Demostración.

Se sigue del teorema 4.3.8. ■

Corolario 4.3.10 *Sea $\mathcal{A}$ subcategoría de $\Lambda - mod$ covariantemente finita y cerrada bajo extensiones entonces en $\mathcal{A}$ hay sucesiones que casi se dividen a la izquierda.*

Demostración.

Se sigue del corolario 4.3.9 y de la proposición 4.1.4. ■

Corolario 4.3.11 *Sea $\mathcal{A}$ subcategoría de $\Lambda - mod$ funtorialmente finita y cerrada bajo extensiones entonces en $\mathcal{A}$ hay sucesiones que casi se dividen.*

Demostración.

Se sigue de los corolarios 4.3.9 y 4.3.10. ■

4.4 EL EJEMPLO DE IGUSA, SMAL∅ Y TODOROV

Sea k un campo algebraicamente cerrado. Considere la k-álgebra kQ asociada al carcaj:

$$\begin{tikzcd} Q: \cdot \arrow[r, bend right, "\gamma"'] & \cdot \arrow[l, bend right, "\beta"'] \arrow[l, "\alpha"'] \end{tikzcd}$$

Sea $\Lambda_1 = kQ/I$ donde I es el ideal bilateral generado por los elementos $\beta\gamma$, $\alpha\gamma$ y $\gamma\alpha$. De esta forma Λ_1 es una k-álgebra de dimensión seis sobre k, así Λ_1 es una k-álgebra de Artin.

Los Λ_1-modulos proyectivos inescindibles son:

$$\begin{tikzcd} P_1 : k \arrow[r, bend right, "1"'] & k \arrow[l, bend right, "0"'] \arrow[l, "0"'] \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} P_2 : k^2 \arrow[r, bend right, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"'] & k^2 . \arrow[l, bend right, "\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)"'] \arrow[l, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"'] \end{tikzcd}$$

Los Λ_1-módulos simples son:

$$\begin{tikzcd} S_1 : k \arrow[r, bend right, "0"'] & 0 \arrow[l, bend right, "0"'] \arrow[l, "0"'] \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} S_2 : 0 \arrow[r, bend right, "0"'] & k . \arrow[l, bend right, "0"'] \arrow[l, "0"'] \end{tikzcd}$$

Los Λ_1-módulos inyectivos inescindibles son:

$$\begin{tikzcd} I_1 : k \arrow[r, bend right, "\binom{0}{0}"'] & k^2 \arrow[l, bend right, "(1{,}0)"'] \arrow[l, "(0{,}1)"'] \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} I_2 : k \arrow[r, bend right, "\binom{1}{0}"'] & k^2 . \arrow[l, bend right, "(0{,}1)"'] \arrow[l, "(0{,}0)"'] \end{tikzcd}$$

Observación 4.4.1 *Existe un epimorfismo canónico de k-álgebras $\eta : \Lambda_1 \to \Gamma$, donde Γ es la k-álgebra de Kronecker definida en el capitulo dos, así el funtor restricción $\mathcal{F}_\eta : \Gamma - mod \to \Lambda_1 - mod$ es fiel y pleno por el Teorema de Silver (ver [Sil1], [BSZ1] y [CP1]). Además*

$$\mathcal{F}_\eta\left(\begin{tikzcd} U & V \arrow[l, bend right, "\beta"'] \arrow[l, bend left, "\alpha"] \end{tikzcd}\right) = \begin{tikzcd} U \arrow[r, bend right, "0"'] & V. \arrow[l, bend right, "\beta"'] \arrow[l, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

◄

Observación 4.4.2 *Si* $\mu : 0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ *es sucesión exacta entonces*

$$\mathcal{F}_\eta(\mu) : 0 \longrightarrow \mathcal{F}_\eta(A) \xrightarrow{f} \mathcal{F}_\eta(B) \xrightarrow{g} \mathcal{F}_\eta(C) \longrightarrow 0$$

también es exacta. Además $\mathcal{F}_\eta(\mu)$ se divide si y solo si μ se divide.

Proposición 4.4.3 *Si $M \in \Lambda_1 - mod$ es de dimensión proyectiva finita entonces M tiene dimensión par sobre k.*

Demostración.

Se sigue del lema 1.2.4 ya que P_1 y P_2 tienen dimensión par sobre k. ■

Observaciones 4.4.4

- *S_1,S_2, I_1 y I_2 no pertenecen a fpd.*
- *$\mathcal{F}_\eta(Q_n)$ no pertenece a fpd para toda $n \in \mathbb{N}$.*
- *$\mathcal{F}_\eta(J_n)$ no pertenece a fpd para toda $n \in \mathbb{N}$.*
- *Abusando de la notación se tomará $M_c^n = \mathcal{F}_\eta\left(M_c^n\right)$ para $n \in \mathbb{N}$ y $c \in k \cup \{\infty\}$* ◄

Lema 4.4.5 *Si* $\begin{tikzcd} U \arrow[r, bend right, "L"'] & V. \arrow[l, bend right, "M"'] \arrow[l, "N"] \end{tikzcd}$ *es una representación de un Λ_1-módulo C, entonces existe un monomorfismo $j : P_1 \to C$ si y solo si $L \neq 0$.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Sea $f = (f_1, f_2) : P_1 \to C$ monomorfismo. Si $L = 0$ entonces para todo $c \in k$ se tiene que $f_2(c) = Lf_1(c) = 0$, de modo que f_2 no es un monomorfismo, lo que contradice la definición de f.

$\Leftarrow$) Sea $u \in U$ tal que $v = l(u) \neq 0$. Para $c \in k$ se definen $f_1(c) = cu$ y $f_2(c) = cv$, así

$$Lf_1(c) = L(cu) = cL(u) = cv = f_2(c)$$

$$Mf_2(c) = M(cv) = M[cL(u)] = ML(cu) = 0$$

$$Nf_2(c) = N(cv) = N[cL(u)] = NL(cu) = 0.$$

De modo que $f = (f_1, f_2) : P_1 \to C$ es un morfismo de Λ_1-módulos, además f_1 y f_2 son monomorfismos, es decir, f es un monomorfismo. ■

Lema 4.4.6 *Sea $M \in \Lambda_1 - mod$ entonces existe una sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow \coprod_{j=1}^{m} P_1 \longrightarrow M \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

donde $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $C \in Im\ \mathcal{F}_\eta$.

Demostración.

Si $M \in Im\ \mathcal{F}_\eta$ entonces la sucesión exacta corta $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\cong} M$ es la que se requiere.

Si $M \notin Im\ \mathcal{F}_\eta$, por el lema 4.4.5 existe un monomorfismo $j_1 : P_1 \to M$, luego se tiene sucesión exacta corta $P_1 \xrightarrow{j_1} M \xrightarrow{\pi_1} Cok\ j_1$. Si $Cok\ j_1 \in Im\ \mathcal{F}_\eta$ entonces se concluye la prueba, de lo contrario exsite monomorfismo $j_2 : P_1 \to Cok\ j_1$, así se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & P_1 \arrow[dl, dashed, "j_2'"'] \arrow[d, "j_2"] \\ M \arrow[r, "\pi_1"'] & Cok\ j_1 \end{tikzcd}$$

Ahora, sean $p, q \in P_1$ tales que $j_1(p) - j_2'(q) = 0$, entonces $j_2(q) = \pi_1 j_2'(q) = \pi_1 j_1(q) = 0$, de modo que $q = 0$, luego $p = 0$, es decir $(j_1, j_2') : P_1 \amalg P_1 \to M$ es un monomorfismo. Así se tiene la sucesión exacta corta

$$P_1 \amalg P_1 \xrightarrow{(j_1, j_2')} M \xrightarrow{\pi_2} Cok\ (j_1, j_2')$$

Note que $l(M) \geq l(Cok\ j_1) \geq l\Big(Cok\ (j_1, j_2')\Big)$, Así procediendo recursivamente se obtiene el resultado. ■

Observación 4.4.7 *$M \in fpd$ si y solo si $C \in fpd$.* ◄

Proposición 4.4.8

i) Para $c \in k$ existe sucesión exacta

$$0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_2 \longrightarrow M_c^1 \longrightarrow 0$$

ii) Para $n \in \mathbb{N}$ existe sucesión exacta

$$0 \longrightarrow S_1 \amalg \left(\coprod_{i=1}^{n-1} P_1 \right) \amalg S_2 \longrightarrow \coprod_{i=1}^{n} P_2 \longrightarrow M_\infty^n \longrightarrow 0$$

Demostración.

i) Se verifica a través de los siguientes diagramas conmuativos:

$$\begin{tikzcd}
P_1 : \arrow[d] & k \arrow[d, "{\left(\begin{smallmatrix}1\\-c\end{smallmatrix}\right)}"'] \arrow[r, bend right, "1"'] & k \arrow[l, bend right, "0"'] \arrow[l, "0"'] \arrow[d, "{\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)}"] \\
P_2 : \arrow[d] & k^2 \arrow[d, "{(c,1)}"'] \arrow[r, bend right, "{\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)}"'] & k^2 \arrow[l, bend right, "{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)}"'] \arrow[l, "{\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)}"'] \arrow[d, "{(1,0)}"] \\
M_c^1 : & k \arrow[r, bend right, "0"'] & k \arrow[l, bend right, "c"'] \arrow[l, "1"']
\end{tikzcd}$$

ii) Sea $e_{i,j}$ la i-j-matriz elemental[1]. Sea $n \in \mathbb{N}$, considere los siguientes diagramas:

$$
\begin{tikzcd}
S_1 \coprod \left(\coprod_{i=1}^{n-1} P_1 \right) \coprod S_2 : \arrow[d] \\
\coprod_{i=1}^{n} P_2 : \arrow[d] \\
M_\infty^n :
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
k^n \arrow[d, "A"'] \arrow[r, bend right, "X"'] & k^n \arrow[l, bend right, "0"'] \arrow[l, "0"'] \arrow[d, "B"] \\
k^{2n} \arrow[d, "C"'] \arrow[r, bend right, "Z"'] & k^{2n} \arrow[l, bend right, "Y"'] \arrow[l, "Z"'] \arrow[d, "D"] \\
k^n \arrow[r, bend right, "0"'] & k^n \arrow[l, bend right, "I"'] \arrow[l, "J_0^n"']
\end{tikzcd}
$$

Donde

$$
\begin{aligned}
A &= e_{2n,1} + \sum_{j=1}^{n-1} e_{2n-2j+1,n-j+1} - \sum_{j=1}^{n-1} e_{2n-2j,n-j+1}, \\
B &= \sum_{j=1}^{n} e_{2n-2j+2,j}, \\
C &= \sum_{j=1}^{n} e_{j,2j-1} + \sum_{j=1}^{n-1} e_{j+1,2j}, \\
D &= \sum_{j=1}^{n} e_{j,2j-1}, \\
X &= \sum_{j=1}^{n-1} e_{j,n+1-j}, \\
Y &= \sum_{j=1}^{n} e_{2j-1,2j-1}, \\
Z &= \sum_{j=1}^{n} e_{2j,2j-1},
\end{aligned}
$$

I es la matriz identidad y J_0^n es la matriz de Jordan de tamaño n.

[1] Tiene el elemento uno en la posición i, j y cero en las demás entradas

Se probará que las parejas (A, B) y (C, D) son Λ_1-morfismos.

$$
\begin{aligned}
YB &= \left(\sum_{j=1}^{n} e_{2j-1,2j-1}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} e_{2n-2j+2,j}\right) = 0 \\
ZB &= \left(\sum_{j=1}^{n} e_{2j,2j-1}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} e_{2n-2j+2,j}\right) = 0 \\
ZA &= \left(\sum_{j=1}^{n} e_{2j,2j-1}\right)\left(e_{2n,1} + \sum_{j=1}^{n-1} e_{2n-2j+1,n-j+1} - \sum_{j=1}^{n-1} e_{2n-2j,n-j+1}\right) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} e_{2j,2j-1}\right)\left(\sum_{j=1}^{n-1} e_{2n-2j+1,n-j+1}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} e_{2n-2j+2,n+1-j} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} e_{2n-2j+2,j}\right)\left(\sum_{j=1}^{n-1} e_{j,n+1-j}\right) = BX \\
CY &= \left(\sum_{j=1}^{n} e_{j,2j-1} + \sum_{j=1}^{n-1} e_{j+1,2j}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} e_{2j-1,2j-1}\right) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} e_{j,2j-1}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} e_{2j-1,2j-1}\right) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} e_{j,2j-1}\right) = D \\
CZ &= \left(\sum_{j=1}^{n} e_{j,2j-1} + \sum_{j=1}^{n-1} e_{j+1,2j}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} e_{2j,2j-1}\right) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n-1} e_{j+1,2j}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} e_{2j,2j-1}\right) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n-1} e_{j+1,2j-1}\right) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n-1} e_{j+1,j}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} e_{j,2j-1}\right) = J_0^n D \\
DZ &= \left(\sum_{j=1}^{n} e_{j,2j-1}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} e_{2j,2j-1}\right) = 0
\end{aligned}
$$

Además,

$$
\begin{aligned}
CA &= \left(\sum_{j=1}^{n} e_{j,2j-1} + \sum_{j=1}^{n-1} e_{j+1,2j}\right)\left(e_{2n,1} + \sum_{j=1}^{n-1} e_{2n-2j+1,n-j+1} - \sum_{j=1}^{n-1} e_{2n-2j,n-j+1}\right) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} e_{j,2j-1}\right)\left(\sum_{j=1}^{n-1} e_{2n-2j+1,n-j+1}\right) - \left(\sum_{j=1}^{n-1} e_{j+1,2j}\right)\left(\sum_{j=1}^{n-1} e_{2n-2j,n-j+1}\right) \\
&= \sum_{j=2}^{n} e_{j,n-(n-j+1)+1} - \sum_{j=1}^{n-1} e_{j+1,n-(n-j)+1} \\
&= \sum_{j=2}^{n} e_{j,j} - \sum_{j=1}^{n-1} e_{j+1,j+1} = 0 \\
DB &= \left(\sum_{j=1}^{n} e_{j,2j-1}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} e_{2n-2j+2,j}\right) = 0,
\end{aligned}
$$

es decir, $Im\ A \subset Ker\ C$ y $Im\ B \subset Ker\ D$. Ahora bien, sea $\sum_{k=1}^{2n} b_k e_k \in Ker\ C$, entonces

$$
\begin{aligned}
0 &= \left(\sum_{j=1}^{n} e_{j,2j-1} + \sum_{j=1}^{n-1} e_{j+1,2j}\right)\left(\sum_{k=1}^{2n} b_k e_k\right) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} e_{j,2j-1}\right)\left(\sum_{k=1}^{2n} b_k e_k\right) + \left(\sum_{j=1}^{n-1} e_{j+1,2j}\right)\left(\sum_{k=1}^{2n} b_k e_k\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} b_{2j-1} e_j + \sum_{j=1}^{n-1} b_{2j} e_{j+1}
\end{aligned}
$$

de modo que, $b_1 = 0$ y $b_{2j} = -b_{2j+1}$, para $j = 1, \cdots, n$. Así, tomando $x = \left(b_{2n} e_1 - \sum_{j=2}^{n} b_{2j-2} e_j\right)$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
Ax &= \left(e_{2n,1} + \sum_{j=1}^{n-1} e_{2n-2j+1,n-j+1} - \sum_{j=1}^{n-1} e_{2n-2j,n-j+1}\right)\left(b_{2n}e_1 - \sum_{j=2}^{n} b_{2j-2}e_j\right) \\
&= b_{2n}e_{2n} + \left(\sum_{j=1}^{n-1} e_{2n-2j+1,n-j+1}\right)\left(-\sum_{j=2}^{n} b_{2j-2}e_j\right) - \left(\sum_{j=1}^{n-1} e_{2n-2j,n-j+1}\right)\left(-\sum_{j=2}^{n} b_{2j-2}e_j\right) \\
&= b_{2n}e_{2n} - \sum_{j=1}^{n-1} b_{2n-2j}e_{2n-2j+1} + \sum_{j=1}^{n-1} b_{2n-2j}e_{2n-2j} \\
&= b_{2n}e_{2n} - \sum_{k=1}^{n-1} b_{2n-2(n-k)}e_{2n-2(n-k)+1} + \sum_{k=1}^{n-1} b_{2n-2(n-k)}e_{2n-2(n-k)} \\
&= b_{2n}e_{2n} - \sum_{k=1}^{n-1} b_{2k}e_{2k+1} + \sum_{k=1}^{n-1} b_{2k}e_{2k} \\
&= b_{2n}e_{2n} + \sum_{k=1}^{n-1} -\left(-b_{2k+1}\right)e_{2k+1} + \sum_{k=1}^{n-1} b_{2k}e_{2k} \\
&= b_{2n}e_{2n} + \sum_{k=1}^{n-1} b_{2k+1}e_{2k+1} + \sum_{k=1}^{n-1} b_{2k}e_{2k} \\
&= \sum_{k=1}^{2n} b_k e_k
\end{aligned}
$$

es decir, $Ker\ C \subset Im\ A$. De forma análoga se prueba que $Ker\ D \subset Im\ B$. ■

Corolario 4.4.9

- M_c^n $infpd$ *para toda* $c \in k$ *y toda* $n \in \mathbb{N}$.
- M_∞^n *no pertenece a* fpd *para toda* $n \in \mathbb{N}$. ■

Proposición 4.4.10 *Sea* M *un* Λ_1*-módulo inescindible no isomorfo a* P_1*. Entonces* $M \in fpd$ *si y solo si existe una sucesión exacta* $0 \longrightarrow \coprod_{i=1}^{m} P_1 \longrightarrow M \longrightarrow C \longrightarrow 0$ *, donde* $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *y* $C \cong M_{c_1}^{n_1} \amalg \cdots \amalg M_{c_t}^{n_t}$ *para números naturales* $t, n_1, \ldots, n_t$ *y* $c_1, \ldots, c_t \in k$.

Demostración.

Se sigue del lema 4.4.6, la observación, 4.4.7 y la proposición 4.4.9.

Proposición 4.4.11 *$M \in fpd$ si y solo si $M \in pd_1$*

Demostración.

Por la proposición 4.4.10 existe sucesión exacta $0 \longrightarrow \coprod_{i=1}^{m} P_1 \longrightarrow M \longrightarrow C \longrightarrow 0$ y por el lema 1.2.14, se tiene que $M \in pd_1$, ya que $M_c^n \in pd_1$ para toda $c \in k$ y toda $n \in \mathbb{N}$. ■

Corolario 4.4.12 *Sea M un Λ_1-módulo inescindible en fpd. M es Ext-proyectivo en fpd si y solo si $M \cong P_1$ o $M \cong P_2$.*

Demostración.

$M \in pd_1$ por la proposición 4.4.11, así se tiene sucesión exacta $0 \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Q_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$, donde Q_1 y Q_0 son Λ_1-módulos proyectivos. Luego, al ser M un objeto Ext-proyectivo en fpd, se tiene que $Q_0 \cong Q_1 \amalg M$, de modo que M es proyectivo y al ser inescindible se concluye la prueba. ■

Proposición 4.4.13 *En fpd no hay objetos Ext-inyectivos.*

Demostración.

Sea $M \in fpd$ inescindible y Ext-inyectivo. Entonces $M \ncong P_1$ y por el lema 4.4.10 se tiene la sucesión exacta $0 \longrightarrow \coprod_{i=1}^{m} P_1 \longrightarrow M \longrightarrow C \longrightarrow 0$ donde $C \cong M_{c_1}^{n_1} \amalg \cdots \amalg M_{c_t}^{n_t}$. Luego, de la proposición 2.2.15 y de la observación 4.4.2 se tiene la sucesión exacta de Λ_1-módulos que no se divide

$$0 \longrightarrow M_{c_1}^{n_1} \xrightarrow{f_{n_1}} M_{c_1}^{n_1+1} \amalg M_{c_1}^{n_1-1} \xrightarrow{g_{n_1}} M_{c_1}^{n_1} \longrightarrow 0$$

de modo que se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_{c_1}^{n_1} \arrow[r, "f_{n_1}"] \arrow[d, "i"'] & M_{c_1}^{n_1+1} \amalg M_{c_1}^{n_1-1} \arrow[r, "g_{n_1}"] \arrow[d] & M_{c_1}^{n_1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & C \arrow[r] & X \arrow[r] & M_{c_1}^{n_1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

de donde la sucesión inferior no se divide. Por otro lado de la sucesión exacta larga covariante

$$0 \longrightarrow Hom_{\Lambda_1}(Y, \coprod_{i=1}^{n} P_1) \longrightarrow Hom_{\Lambda_1}(Y, M) \longrightarrow Hom_{\Lambda_1}(Y, C)$$

$$\longrightarrow Ext^1_{\Lambda_1}(Y, \coprod_{i=1}^{n} P_1) \longrightarrow Ext^1_{\Lambda_1}(Y, M) \longrightarrow Ext^1_{\Lambda_1}(Y, C)$$

$$\longrightarrow Ext^2_{\Lambda_1}(Y, \coprod_{i=1}^{n} P_1) \longrightarrow Ext^2_{\Lambda_1}(Y, M) \longrightarrow Ext^2_{\Lambda_1}(Y, C)$$

$$\longrightarrow \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\longrightarrow Ext^n_{\Lambda_1}((Y, \coprod_{i=1}^{n} P_1) \longrightarrow Ext^n_{\Lambda_1}(Y, M) \longrightarrow Ext^n_{\Lambda_1}(Y, C)$$

$$\longrightarrow \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

para $Y \in fpd$ se obtiene la sucesión exacta

$$Ext^1_{\Lambda_1}(Y, \coprod_{i=1}^{n} P_1) \longrightarrow Ext^1_{\Lambda_1}(Y, M) \longrightarrow Ext^1_{\Lambda_1}(Y, C) \longrightarrow 0$$

y al ser M un objeto Ext-inyectivo en fpd se concluye que $Ext_{\Lambda_1}(Y, C) = 0$ lo que es una contradicción para $Y = M^{n_1}_{c_1}$. ■

Corolario 4.4.14 *Sea N un Λ_1-módulo tal que $N \notin fpd$ y $Ext_{\Lambda_1}(X, N) = 0$ para todo $X \in fpd$. Entonces N no tiene una fpd-aproximación derecha.*

Demostración.

Sean $r_N : N_{fpd} \to N$ una fpd-aproximación derecha minimal de fpd y $f : P \to N$ la cubierta proyectiva de N, entonces f se factoriza a través de r_N y así $N_{fpd} \neq 0$. Por otro lado, para $X \in fpd$ se tiene que $Ext_{\Lambda_1}(X, r_N) : Ext_{\Lambda_1}(X, N_{fpd}) \to Ext_{\Lambda_1}(X, N)$ es un monomorfismo por el lema 4.3.3, de modo que $Ext_{\Lambda_1}(X, N_{fpd}) = 0$ y así N_{fpd} es un objeto Ext-inyectivo en fpd lo que contradice la proposición 4.4.13. ■

Proposición 4.4.15 *El Λ_1-módulo S_2 no tiene una fpd-aproximación derecha.*

Demostración.

Considere la siguiente sucesión exacta corta:

$$
\begin{tikzcd}
P_1 : \arrow[dd] & & k \arrow[dd, "1"'] \arrow[r, bend right, "1"'] & k \arrow[l, "0"'] \arrow[l, bend right, "0"'] \arrow[dd, "\binom{1}{0}"] \\
 & & & \\
I_2 : \arrow[dd] & & k \arrow[dd, "0"'] \arrow[r, bend right, "\binom{1}{0}"'] & k^2 \arrow[l, "{(0,0)}"'] \arrow[l, bend right, "{(0,1)}"'] \arrow[dd, "{(0,1)}"] \\
 & & & \\
S_2 : & & 0 \arrow[r, bend right, "0"'] & k \arrow[l, "0"'] \arrow[l, bend right, "0"']
\end{tikzcd}
$$

Así, de la sucesión exacta larga covariante, se tiene la sucesión exacta

$$Ext_{\Lambda_1}(X, P_1) \to Ext_{\Lambda_1}(X, I_2) \to Ext_{\Lambda_1}(X, S_2) \to Ext^2_{\Lambda_1}(X, P_1),$$

de modo que si $X \in fpd$, entonces $Ext_{\Lambda_1}(X, S_2) = 0$ y por el corolario 4.4.14 se tiene que S_2 no tiene una fpd-aproximación derecha. ∎

Corolario 4.4.16

- *fpd es covariantemente finita en $\Lambda_1 - mod$ pero no es contravariantemente finita.*

- *fpd es homológicamente finita en $\Lambda_1 - mod$, pero no es funtorialmente finita.* ∎

Proposición 4.4.17 *P_1 no tiene morfismo derecho que casi se divide.*

Demostración.

Considere el siguiente monomorfismo: $j : S_2 \to P_1$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d, "0"'] \arrow[r, bend right, "0"'] & k \arrow[l, "0"'] \arrow[l, bend right, "0"'] \arrow[d, "1"] \\
k \arrow[r, bend right, "1"'] & k \arrow[l, "0"'] \arrow[l, bend right, "0"']
\end{tikzcd}$$

Como la dimensión de P_1 sobre k es dos, entonces S_2 es el único submodulo no trivial de P_1.

Si $g : X \to P_1$ es un morfismo derecho que casi se divide en fpd, entonces se tiene diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & S_2 \arrow[dl, "\omega"'] \arrow[d, "j"] \\
X \arrow[r, "g"'] & P_1.
\end{tikzcd}$$

Sea $v : Y \to S_2$ un morfismo con $Y \in fpd$ entonces jv no es retracción, y existe $u : Y \to X$ tal que $jv = gu$, luego $j\omega u = gu = jv$, de modo que $\omega u = v$, es decir, ω es una fpd-aproximación de S_2, lo que contradice la proposición 4.4.15. ■

Corolario 4.4.18

- *fpd no tiene morfismos derechos que casi se dividen.*
- *fpd no tiene morfismos que casi se dividen.* ■

Observación 4.4.19 *fpd tiene debilmente sucesiones que casi se dividen, pero no tiene sucesiones que casi se dividen.* ◀

Capítulo 5

Sucesiones que casi se dividen en las categorías $\mathcal{M}(\Lambda)$, $\mathfrak{p}(\Lambda)$ y $\mathfrak{p}^1(\Lambda)$

En esta sección Λ es una R-álgebra de Artin sobre R un anillo artiniano conmutativo. Se definirán la categoría $\mathcal{M}(\Lambda)$ de morfismos de Λ-módulos y las subcategoriás $\mathfrak{m}(\Lambda)$, $\mathcal{P}(\Lambda)$, $\mathfrak{p}(\Lambda)$, $\mathfrak{p}^1(\Lambda)$ y $\mathfrak{p}^2(\Lambda)$. Se determinarán los objetos inescindibles de $\mathfrak{p}(\Lambda)$, así como los objetos Ext-proyectivos y Ext-inyectivos en la subcategoría $\mathfrak{p}(\Lambda)$. Se concluye con la formula para determinar todas las sucesiones que casi se dividen en la categoría $\mathfrak{p}(\Lambda)$.

5.1 la categoría de morfismos $\mathcal{M}(\Lambda)$

Definición 5.1.1 Se define la categoría $\mathcal{M}(\Lambda)$ de morfismos de Λ-Mod en objetos como las ternas $(X_1\ ,\ X_2\ ,\ \varphi_X)$, donde X_1 y X_2 son Λ módulos izquierdos y $\varphi_X \in Hom_\Lambda(X_1, X_2)$. Un morfismo $f : X \to Y \in \mathcal{M}(\Lambda)$ es el par (f_1, f_2), donde $f_i \in Hom_\Lambda(X_i, Y_i)$ para $i \in \{1, 2\}$, tales que $\varphi_Y f_1 = f_2\varphi_X$. La composición en $\mathcal{M}(\Lambda)$ es componer en cada componente. $\mathcal{P}(\Lambda)$ es la subcategoria plena de $\mathcal{M}(\Lambda)$ cuyos objetos son los morfismos entre Λ módulos proyectivos. $\mathfrak{m}(\Lambda)$ es la subcategoría plena de $\mathcal{M}(\Lambda)$ cuyos objetos son los morfismos entre Λ-módulos finitamente generados. De la misma manera se define $\mathfrak{p}(\Lambda)$ como la subcategoria plena de $\mathcal{M}(\Lambda)$, cuyos objetos son los morfismos entre Λ-módulos proyectivos finitamente generados.

Observaciones 5.1.2

- *La categoría $\mathfrak{m}(\Lambda)$ es isomorfa a la categoría ${}_{\tilde{\Lambda}}\mathcal{C}$ donde $\tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ \Lambda & \Lambda \end{pmatrix}$.*
- *La categoría $\mathfrak{p}(\Lambda)$ es isomorfa a la subcategoría ${}_{\tilde{\mathcal{P}}}\mathcal{C}$ de ${}_{\tilde{\Lambda}}\mathcal{C}$ con $\tilde{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} \mathfrak{P} & 0 \\ \Lambda & \mathfrak{P} \end{pmatrix}$, donde $\mathfrak{P}$ es el conjunto de los Λ-módulos proyectivos.*
- *La categoría $\mathcal{M}(\Lambda)$ adquiere una estructura exacta natural a través de la categoría $\tilde{\Lambda} - Mod$.*
- *Las categorías $\mathcal{P}(\Lambda)$, $\mathfrak{m}(\Lambda)$ y $\mathfrak{p}(\Lambda)$ heredan de $\mathcal{M}(\Lambda)$ una estructura exacta al ser, todas, cerradas bajo extensiones.* ◀

Considere, para un Λ módulo proyectivo P, los siguientes objetos de $\mathcal{P}(\Lambda)$:

$$S(P) := (P\ ,\ 0\ ,\ 0), \quad U(P) := (P\ ,\ P\ ,\ 1_P)\ \ y\ \ T(P) := (0\ ,\ P\ ,\ 0).$$

Y para $i \in \{1, 2\}$ denotamos por $\mathcal{F}_i : \mathcal{P}(\Lambda) \to \Lambda - Mod$ la proyección definida por $\mathcal{F}_i(X) = X_i$ para todo objeto $X : X_1 \to X_2 \in \mathcal{P}(\Lambda)$ y $\mathcal{F}_i\big((f_1, f_2)\big) = f_i$ para todo morfismo $(f_1, f_2) \in \mathcal{P}(\Lambda)$.

Observación 5.1.3 *Si P es inescindible en $\Lambda - Mod$, entonces los objetos $U(P)$, $S(P)$ y $T(P)$ son inescindibles en $\mathcal{P}(\Lambda)$.* ◀

Lema 5.1.4

a) Los funtores $Hom_{\mathcal{P}(\Lambda)}\big(U(P), \square\big)$ y $Hom_{\Lambda}\big(P, \mathcal{F}_1(\square)\big)$ son naturalmente isomorfos.

b) Los funtores $Hom_{\mathcal{P}(\Lambda)}\big(\square, U(P)\big)$ y $Hom_{\Lambda}\big(\mathcal{F}_2(\square), P\big)$ son naturalmente isomorfos.

c) Los funtores $Hom_{\mathcal{P}(\Lambda)}\big(T(P), \square\big)$ y $Hom_{\Lambda}\big(P, \mathcal{F}_2(\square)\big)$ son naturalmente isomorfos.

d) Los funtores $Hom_{\mathcal{P}(\Lambda)}\big(\square, S(P)\big)$ y $Hom_{\Lambda}\big(\mathcal{F}_1(\square), P\big)$ son naturalmente isomorfos.

Demostración.

a) Para $X = X_1 \xrightarrow{\varphi_X} X_2 \in \mathcal{P}(\Lambda)$ se define $\eta_X : Hom_{\mathcal{P}(\Lambda)}\Big(U(P), X\Big) \to Hom_\Lambda\Big(P, \mathcal{F}_1(X)\Big) = Hom_\Lambda\Big(P, X_1\Big)$ como $\eta_X\Big((g_1, g_2)\Big) = g_1$. Claramente η_X es un isomorfismo para toda $X \in \mathcal{P}(\Lambda)$.

Sean $A := A_1 \xrightarrow{\varphi_A} A_2$, $B := B_1 \xrightarrow{\varphi_B} B_2 \in \mathcal{P}(\Lambda)$ y $(f_1, f_2) \in Hom_{\mathcal{P}(\Lambda)}(A, B)$ se debe probar la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{P}(\Lambda)}\Big(U(P), A\Big) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "(f_1,f_2)_*"'] & Hom_\Lambda\Big(P, A_1\Big) \arrow[d, "f_{1*}"] \\
Hom_{\mathcal{P}(\Lambda)}\Big(U(P), B\Big) \arrow[r, "\eta_B"'] & Hom_\Lambda\Big(P, B_1\Big).
\end{tikzcd}$$

Sea $(g_1, g_2) \in Hom_{\mathcal{P}(\Lambda)}\Big(U(P), A\Big)$ entonces

$$\begin{aligned}
\Big(\eta_B \circ (f_1, f_2)_*\Big)\Big((g_1, g_2)\Big) &= \eta_B\Big((f_1 \circ g_1, f_2 \circ g_2)\Big) \\
&= f_1 \circ g_1 \\
&= f_{1_*}(g_1) \\
&= \Big(f_{1_*} \circ \eta_A\Big)\Big((g_1, g_2)\Big)
\end{aligned}$$

b), **c)** y **d)** son analógos. ■

Lema 5.1.5 *Sea* $X := X_1 \xrightarrow{\varphi_X} X_2 \in \mathcal{P}(\Lambda)$ *entonces*

$$T(X_1) \xrightarrow{\binom{f}{g}} T(X_2) \oplus U(X_1) \xrightarrow{(f',\ g')} X$$

es una conflación en $\mathcal{P}(\Lambda)$*, donde*

$$\begin{aligned}
f &= (0, \varphi_X) : T(X_1) \to T(X_2) \\
g &= (0, -1_{X_1}) : T(X_1) \to U(X_1) \\
f' &= (0, 1_{X_2}) : T(X_2) \to X \\
g' &= (1_{X_1}, \varphi_X) : U(X_1) \to X
\end{aligned}$$

Demostración.

$\binom{f}{g}$ y (f', g') son morfismos en $\mathcal{P}(\Lambda)$ debido a la conmutatividad de los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"'] & X_1 \arrow[d, "\binom{0}{1_{X_1}}"] \\ X_1 \arrow[r, "\binom{\varphi_X}{-1_{X_1}}"] & X_2 \oplus X_1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "1_{X_1}"] \arrow[d, "\binom{0}{1_{X_1}}"'] & X_1 \arrow[d, "\varphi_X"] \\ X_2 \oplus X_1 \arrow[r, "(1_{X_2}, \varphi_X)"] & X_2 \end{tikzcd}$$

$$T(X_1) \xrightarrow{\binom{f}{g}} T(X_2) \oplus U(X_1) \qquad T(X_2) \oplus U(X_1) \xrightarrow{(f', g')} X.$$

Así se debe probar que las sucesiones

$$0 \xrightarrow{0} X_1 \xrightarrow{1_{X_1}} X_1$$

$$X_1 \xrightarrow{\binom{\varphi_X}{-1_{X_1}}} X_2 \oplus X_1 \xrightarrow{(1_{X_2}, \varphi_X)} X_2$$

son exactas cortas.

Claramente la sucesión superior es exacta corta, $\binom{\varphi_X}{-1_{X_1}}$ es monomorfismo y $(1_{X_2}, \varphi_X)$ es epimorfismo, luego de la composición $(1_{X_2}, \varphi_X)\binom{\varphi_X}{-1_{X_1}} = 1_{X_2}\varphi_X + \varphi_X(-1_{X_1}) = \varphi_X - \varphi_X = 0$ se tiene que $Im \binom{\varphi_X}{-1_{X_1}} \subset Ker\ (1_{X_2}, \varphi_X)$. Ahora bien sea $(x_2, x_1) \in Ker\ (1_{X_2}, \varphi_X)$ de modo que $x_2 = -\varphi_X(x_1)$, luego $(x_2, x_1) = (-\varphi_X(x_1), x_1) = (\varphi_X(-x_1), x_1) = \binom{\varphi_X}{-1_{X_1}}(-x_1)$. Así $Im \binom{\varphi_X}{-1_{X_1}} = Ker\ (1_{X_2}, \varphi_X)$.. ■

Lema 5.1.6 *Sea* $X := X_1 \xrightarrow{\varphi_X} X_2 \in \mathcal{P}(\Lambda)$ *entonces*

$$X \xrightarrow{\binom{r}{s}} U(X_2) \oplus S(X_1) \xrightarrow{(r',\ s')} S(X_2)$$

es una conflación en $\mathcal{P}(\Lambda)$*, donde*

$$r = (\varphi_X, 1_{X_2}) : X \to U(X_2)$$
$$s = (-1_{X_1}, 0) : X \to S(X_1)$$
$$r' = (1_{X_2}, 0) : U(X_2) \to S(X_2)$$
$$s' = (\varphi_X, 0) : S(X_1) \to S(X_2)$$

Demostración.

Es analógo al lema 5.1.5. ■

Lema 5.1.7 *Todo objeto Ext-inyectivo en $\mathcal{P}(\Lambda)$ es isomorfo a un sumando directo de $U(Q) \oplus S(Q')$ para Λ-módulos proyectivos Q y Q', como consecuencia los objetos Ext-inyectivos inescindibles en $\mathcal{P}(\Lambda)$ son los objetos isomorfos a $U(P)$ o $S(P)$ para algún Λ-módulo proyectivo inescindible P.*

Demostración.

Sea $X := X_1 \xrightarrow{\varphi_X} X_2$ un objeto Ext-inyectivo en $\mathcal{P}(\Lambda)$ por el lema 5.1.6 se tiene conflación

$$X \xrightarrow{\binom{r}{s}} U(X_2) \oplus S(X_1) \xrightarrow{(r',\ s')} S(X_2)$$

de modo que X es sumando directo de $U(X_2) \oplus S(X_1)$.

Sea P proyectivo y sea

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "1"'] & X_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "\varphi_X"'] & Y_1 \arrow[d, "\varphi_Y"] \\ P \arrow[r, "f_2"] & X_2 \arrow[r, "g_2"] & Y_2 \end{tikzcd}$$

una sucesión exacta en $\mathcal{M}(\Lambda)$ con $\varphi_Y \in \mathcal{P}(\Lambda)$, de modo que $P \xrightarrow{f_2} X_2 \xrightarrow{g_2} Y_2$ es una sucesión exacta en $\Lambda - Mod$ con Y_2 un proyectivo, de modo que existe $h : x_2 \to P$ tal que $hf_2 = 1_P$, luego el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "h\varphi_X"] \arrow[d, "\varphi_X"'] & P \arrow[d, "1"] \\ X_2 \arrow[r, "h"] & P, \end{tikzcd}$$

además $h\varphi X f_1 = hf_2 = 1_P$, de modo que la sucesión se divide y entonces $U(P)$ es Ext-inyectivo en $\mathcal{P}(\Lambda)$.

Por otro lado, si

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "0"'] & X_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "\varphi_X"'] & Y_1 \arrow[d, "\varphi_Y"] \\ 0 \arrow[r, "0"] & X_2 \arrow[r, "g_2"] & Y_2 \end{tikzcd}$$

es una sucesión exacta en $\mathcal{M}(\Lambda)$ con $\varphi_Y \in \mathcal{P}(\Lambda)$, entonces $P \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{g_1} Y_1$ es una sucesión exacta en $\Lambda - Mod$ con Y_1 un proyectivo, de modo que existe $h : X_1 \to X$ tal que $hf_1 = 1_P$, luego $S(P)$ es Ext-inyectivo.

Se sigue, por el lema 5.1.4, que los objetos $U(P)$ y $S(P)$ son Ext-inyectivos (Ext-inyectivos inescindibles) en $\mathcal{P}(\Lambda)$ para P Λ-módulo proyectivo (proyectivo inescindible).

Luego si X es Ext-inyectivo inescindible en $\mathcal{P}(\Lambda)$ entonces es isomorfo a $U(P)$ o $S(P)$ para P un Λ-módulo proyectivo inescindible. ■

Lema 5.1.8 *Todo objeto Ext-proyectivo en $\mathcal{P}(\Lambda)$ es isomorfo a un sumando directo de $U(Q) \oplus T(Q')$ para Λ-módulos proyectivos Q y Q', como consecuencia los objetos Ext-proyectivos inescindibles en $\mathcal{P}(\Lambda)$ son los objetos isomorfos a $U(P)$ o $T(P)$ para algún Λ-módulo proyectivo inescindible P.*

Demostración.

Es análogo al lema 5.1.7. ■

Definición 5.1.9 Denotaremos por $\mathfrak{p}^1(\Lambda)$ la subcategoría plena de $\mathfrak{p}(\Lambda)$ que consiste de las ternas (P, Q, φ), donde $\varphi : P \to Q$ es un morfismo de Λ módulos con imagen contenida en rQ. La subcategoria plena de $\mathfrak{p}^1(\Lambda)$ que consiste de las ternas (P, Q, φ) tal que $ker(\varphi) \subseteq rP$ es denotada por $\mathfrak{p}^2(\Lambda)$.

Observación 5.1.10 *Si $X_1 \xrightarrow{\varphi} X_2 \in \mathfrak{p}^2(\Lambda)$ entonces $X_1 \xrightarrow{\varphi} X_2 \xrightarrow{\pi} Cok\ \varphi$ es una resolución proyectiva minimal de $Cok\ \varphi$.* ◀

Lema 5.1.11 *Sean $X : P_1 \xrightarrow{g} P_2 \in \mathfrak{p}^2(\Lambda)$ y $f = (f_1, f_2) \in End_{\tilde{\Lambda}}(X)$ tal que $Cok\ (f) = 0$ entonces f es nilpotente.*

Demostración.

Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $r^m = 0$. Del diagrama exacto conmutativo

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f_1"'] & P_2 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f_2"] & Cok\ g \arrow[d, "0"] \\
P_1 \arrow[r, "g"] & P_2 \arrow[r, "\pi"] & Cok\ g
\end{tikzcd}$$

se tiene que $f_2(P_2) \subset Ker\ \pi = Im\ g \subset rP_2$. Luego

$$\begin{aligned}
f_2^m(P_2) &= f_2^{m-1} f_2(P_2) \\
&\subset f_2^{m-1} r(P_2) \\
&= r f_2^{m-1}(P_2) \\
&= r f_2^{m-2} f_2(P_2) \\
&\subset r f_2^{m-2} r(P_2) \\
&= r^2 f_2^{m-2}(P_2) \\
&\vdots \\
&\subset r^{m-2} f_2 r(P_2) \\
&= r^{m-1} f_2(P_2) \\
&\subset r^m(P_2) = 0
\end{aligned}$$

y así se tiene que $gf_1^m = f_2^m g = 0$, de modo que $f_1^m(P_1) \subset Ker\ g \subset rP_1$. Luego

$$\begin{aligned}
(f_1^m)^m(P_1) &= (f_1^m)^{m-1} f_1^m(P_1) \\
&\subset (f_1^m)^{m-1} r(P_1) \\
&= r(f_1^m)^{m-1}(P_1) \\
&= r(f_1^m)^{m-2} f_1^m(P_1) \\
&\subset r(f_1^m)^{m-2} r(P_1) \\
&= r^2(f_1^m)^{m-2}(P_1) \\
&\vdots \\
&\subset r^{m-2} f_1^m r(P_1) \\
&= r^{m-1} f_1^m(P_1) \\
&\subset r^m(P_1) = 0
\end{aligned}$$

entonces $f^{m^2} = (f_1^{m^2}, f_2^{m^2}) = (0,0)$, es decir, f es nilpotente. ■

Proposición 5.1.12 *Para $X \in \mathfrak{p}^2(\Lambda)$ se tiene que*

a) $f \in End_{\tilde{\Lambda}}(X)$ es nilpotente si y solo si $Cok\ f$ es nilpotente.

b) X es inescindible si y solo si $Cok(X)$ es inescindible.

c) Sea $s : X \to Y$ un morfismo en $\mathcal{P}(\Lambda)$. Entonces, s es una sección si y solo si $Cok(s)$ es una sección.

d) Sea $r : Z \to X$ un morfismo en $\mathcal{P}(\Lambda)$. Entonces r es una retracción si y solo si $Cok(r)$ es una retracción.

Demostración.

a) Sea $l \in \mathbb{N}$ tal que $f^l = 0$, entonces $0 = Cok\ f^l = (Cok\ f)^l$. La otra implicación se sigue del lema 5.1.11.

b) Claramente $X \neq 0$ si y solo si $Cok\ X \neq 0$.

$\Leftarrow$) Sea $X = X_1 \oplus X_2$ con $X_1 \neq 0$ y $X_2 \neq 0$, entonces $Cok\ X \cong Cok\ X_1 \amalg Cok\ X_2$ y como $\mathfrak{p}^2(\Lambda)$ es cerrado bajo sumandos directos, se sigue que $Cok\ X$ se escinde.

$\Rightarrow$) Sea $Cok\ X = Y_1 \oplus Y_2$ con $Y_1 \neq 0$ y $Y_2 \neq 0$, sean $Q_1 \xrightarrow{g_1} P_1 \xrightarrow{\pi_1} Y_1$ y $Q_2 \xrightarrow{g_2} P_2 \xrightarrow{\pi_2} Y_2$ las resoluciones proyectivas minimales de Y_1 y Y_2 respectivamente, de esta forma X es isomorfo a la suma directa de g_1 y g_2, es decir, X se escinde.

c) $\Rightarrow$) Sea $r : Y \to X$ tal que $rs = 1_X$. Luego $1_{Cok\ X} = Cok\ 1_X = Cok\ rs = Cok\ r \circ Cok\ s$.

$\Leftarrow$) Sea $r' : Cok\ Y \to Cok\ X$ tal que $r'Cok\ s = 1_{CokX}$. Como el funtor Cok es pleno existe $r : Y \to X$ tal que $Cok(r) = r'$, luego $Cok(1_X - rs) = 0$, así que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $t^n = 0$ donde $t = 1_X - rs$, además $(1_X - t)(1_X + t + t^2 + \cdots + t^{n-1}) = 1_X - t^n = 1_X$, es decir $1_X - t = rs$ es sección, y así s es sección.

d) $\Rightarrow$) Sea $s : X \to Z$ tal que $rs = 1_X$. Luego $1_{Cok\ X} = Cok\ 1_X = Cok\ rs = Cok\ r \circ Cok\ s$.

$\Leftarrow$) Sea $s' : Cok\ X \to Cok\ Z$ tal que $Cok\ rs' = 1_{CokX}$. Como el funtor Cok es pleno existe $s : X \to Z$ tal que $Cok(s) = s'$, luego $Cok(1_X - rs) = 0$, así que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $t^n = 0$ donde $t = 1_X - rs$, además $(1_X + t + t^2 + \cdots + t^{n-1})(1_X - t) = 1_X - t^n = 1_X$, es decir $1_X - t = rs$ es retracción, y así r es retracción. ■

Proposición 5.1.13 *Si X es inescindible en $\mathcal{P}(\Lambda)$ entonces es isomorfo a uno de los siguientes objetos:*

- *$U(P)$ con P un Λ-módulo proyectivo inescindible.*
- *$S(P)$ con P un Λ-módulo proyectivo inescindible.*
- *$P \xrightarrow{\varphi} Q \in \mathfrak{p}^2(\Lambda)$ con $Cok\ \varphi$ un Λ-módulo inescindible.*

Demostración.

Sea $P \xrightarrow{f} Q \in \mathfrak{p}(\Lambda)$, y sea $P' \xrightarrow{f_0} Q' \xrightarrow{\rho} Cok\ f$ la resolución proyectiva minimal de $Cok\ f$. De modo que se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & Q' \arrow[d, "\rho"] \\ Q \arrow[ur, dashed, "t"] \arrow[r, "\pi"'] & Cok\ f \end{tikzcd}$$

donde π es la proyección canónica y t es epimorfismo ya que ρ es cubierta proyectiva de $Cok\ f$. Luego el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & Q' \arrow[dl, "t'"'] \arrow[d, equal] \\ Q \arrow[r, "t"'] & Q' \end{tikzcd}$$

y por el lema 1.5.1 $Q = t'(Q') \oplus Ker\ t$, luego $Im\ f = t'(Ker\ \rho) \oplus Ker\ t$. Como Q es proyectivo se tiene que $Ker\ t$ es proyectivo y el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & & Ker\ t \arrow[dll, dashed, "f'"'] \arrow[d, equal] \\ P \arrow[r, "f"] & Im\ f \arrow[r, "\pi_2"] & Ker\ t \end{tikzcd}$$

donde π_2 es la proyección canónica, y aplicando nuevamente el lema 1.5.1 se tiene que $P = f'(Ker\ t) \oplus Ker\ \pi_2 f$. De modo que $f = \left(\begin{smallmatrix} f_1 & f_2 \\ 0 & \overline{f'} \end{smallmatrix}\right)$ y $\pi = (\rho\overline{t'}, 0)$, donde $\overline{f'}$ y $\overline{t'}$ son los morfismos inversos de los isomorfismos $f' : ker\ t \to f'(Ker\ t)$ y $t' : Q' \to t'(Q')$ respectivamente.

Ahora considere el isomorfismo $\begin{pmatrix} \overline{t'} & -\overline{t'} f_2 f' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : t'(Q') \oplus Ker\ t \to Q' \oplus Ker\ t$, luego, se tiene que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \overline{t'} & -\overline{t'} f_2 f' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ 0 & \overline{f'} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \overline{t'} f_1 & \overline{t'} f_2 - \overline{t'} f_2 \\ 0 & \overline{f'} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \overline{t'} f_1 & 0 \\ 0 & \overline{f'} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sean $c \in Ker\ t$, $c = f(p)$ y $ff'(c) = t'(q) + f(p)$, entonces $t'(q) = f(f'(c) - p)$, así, $q = tf(f'(c) - p)$ y $\rho(q) = \rho t f(f'(c) - p) = \pi f(f'(c) - p) = 0$, es decir $\rho\overline{t'} f_2 f' = 0$. Luego el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
Ker\ \pi_2 f \oplus f'(Ker\ t) \arrow[r, "\begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ 0 & \overline{f'} \end{pmatrix}"] \arrow[d, equal] & t'(Q') \oplus Ker\ t \arrow[r, "(\rho\overline{t'}{,}0)"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} \overline{t'} & -\overline{t'}f_2 f' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}"] & Cok\ f \arrow[d, equal] \\
Ker\ \pi_2 f \oplus f'(Ker\ t) \arrow[r, "\begin{pmatrix} \overline{t'}f_1 & 0 \\ 0 & \overline{f'} \end{pmatrix}"] & Q' \oplus Ker\ t \arrow[r, "(\rho{,}0)"] & Cok\ f
\end{tikzcd}$$

De esta forma f es isomorfo a la suma directa de los morfismos $Ker\ \pi_2 f \xrightarrow{\overline{t'}f_1} Q'$ y $f'(Ker\ t) \xrightarrow{\overline{f'}} Ker\ t$. Por otro lado, existe morfismo $\varphi : Ker\ \pi_2 f \to P'$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
 & Ker\ \pi_2 f \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[d, "\overline{t'}f_1"] & \\
P' \arrow[r, "f_0"] & Ker\ \rho \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Luego, como f_1 es suprayectiva a $t'(Ker\ \rho)$ y $\overline{t'}$ es un isomorfismo se tiene que φ es un epimorfismo, de modo que se tiene diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & P' \arrow[dl, "\varphi'"'] \arrow[d, equal] \\
Ker\ \pi_2 f \arrow[r, "\varphi"] & P'
\end{tikzcd}$$

y por el lema 1.5.1 se tiene que $Ker\ \pi_2 f = \varphi'(P') \oplus Ker\ \varphi$. De modo que $\overline{t'}f_1 = (g, 0)$ y del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\varphi'(P') \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\overline{\varphi'}"'] & & Ker\ \rho \\
 & P' \arrow[ur, "f_0"'] &
\end{tikzcd}$$

se tiene que g es cubierta proyectiva de $Ker\rho$, donde $\overline{\varphi'}$ es la inversa del isomorfismo $\varphi' : P' \to \varphi(P')$, es decir, $g \in \mathfrak{p}^2(\Lambda)$.

De esta forma f es isomorfo a $\coprod_{i=1}^{n} U(A_i) \coprod_{j=1}^{m} S(B_j) \coprod_{k=1}^{l} C'_j$, donde $\bigoplus_{i=1}^{n} A_i = Ker\ t$, $\bigoplus_{j=1}^{m} B_j = Ker\ \varphi$ y $\bigoplus_{k=1}^{l} C_j = Cok\ f$ son descomposiciones en inescindibles de $Ker\ t$, $Ker\ \varphi$ y $Cok\ f$

respectivamente, y los objetos C'_j son las cubiertas proyectivas de los inescindibles C_j. Así, por la observación 5.1.3 y la proposición 5.1.12 se concluye la prueba. ■

Observaciones 5.1.14

- *Los inescindibles de* $\mathfrak{p}(\Lambda)$ *de la forma* $P \xrightarrow{1} P$ *no viven en* $\mathfrak{p}^1(\Lambda)$.
- *Los inescindibles de* $\mathfrak{p}(\Lambda)$ *de la forma* $P \xrightarrow{0} 0$ *pertenecen a* $\mathfrak{p}^1(\Lambda)$ *pero no a* $\mathfrak{p}^2(\Lambda)$. ◀

Observaciones 5.1.15

- *Si* $f : L \to M$ *es un morfismo izquierdo que casi se divide en* $\mathfrak{p}^1(\Lambda)$ *tal que es un monomorfmismo, entonces* g *es un morfismo izquierdo que casi se divide en* $\mathfrak{p}(\Lambda)$.
- *Si* $g : M \to N$ *es un morfismo derecho que casi se divide en* $\mathfrak{p}^1(\Lambda)$ *tal que es un epimorfismo, entonces* g *es un morfismo derecho que casi se divide en* $\mathfrak{p}(\Lambda)$.
- *Si* $f : L \to M$ *es un morfismo izquierdo que casi se divide en* $\mathfrak{p}^2(\Lambda)$ *tal que es un monomorfismo, entonces* g *es un morfismo izquierdo que casi se divide en* $\mathfrak{p}^1(\Lambda)$. ◀

Proposición 5.1.16 *La categoría* $\mathfrak{p}(\Lambda)$ *es funtorialmente finita en* $\mathfrak{m}(\Lambda)$.

Demostración.

Al ser Λ una álgebra de Artin hay solamente un número finito de clases de isomorfía de Λ-módulos proyectivos, de modo que la categoría de los Λ-módulos proyectivos finitamente generados es funtorialmente finita en Λ-mod por la proposición 2.2.2. Luego por el teorema 2.1.19 se tiene que $\mathfrak{p}(\Lambda)$ es funtorialmente finita en $\mathfrak{m}(\Lambda)$. ■

Proposición 5.1.17 *La categoría $\mathfrak{p}^1(\Lambda)$ es funtorialmente finita en $\mathfrak{m}(\Lambda)$.*

Demostración.

Sean $P_1, P_2, \cdots, P_n$ una lista completa de representantes de las clases de isomorfía de Λ-módulos proyectivos inescindibles y para $i \in \{1, \cdots, n\}$ se define $\widehat{P_i} := P_i \xrightarrow{1} P_i$ de modo que por el corolario 3.2.9 la categoría $\widehat{\mathcal{C}} = \langle \widehat{P_1}, \dots, \widehat{P_n} \rangle$ es contravariantemente nilpotente y covariantemente nilpotente. Luego por la proposición 3.2.15 y la observación 5.1.14 $\mathfrak{p}^1(\Lambda)$ es funtorialmente finito en $\mathfrak{p}(\Lambda)$, así por las proposiciones 2.1.16, 2.1.17 y 5.1.16 se tiene que $\mathfrak{p}^1(\Lambda)$ es funtorialmente finita en $\mathfrak{m}(\Lambda)$. ■

Proposición 5.1.18 *La categoría $\mathfrak{p}^2(\Lambda)$ es funtorialmente finita en $\mathfrak{m}(\Lambda)$.*

Demostración.

Sean $P_1, P_2, \cdots, P_n$ una lista completa de representantes de las clases de isomorfiía de Λ-módulos proyectivos inescindibles y para $i \in \{1, \cdots, n\}$ se definen $\widehat{P_i} := P_i \xrightarrow{0} 0$ de modo que por el corolario 3.2.9 la categoría $\widehat{\mathcal{C}} = \langle \widehat{P_1}, \dots, \widehat{P_n} \rangle$ es contravariantemente nilpotente y covariantemente nilpotente. Luego por la proposición 3.2.15 y la observación 5.1.14 $\mathfrak{p}^2(\Lambda)$ es funtorialmente finito en $\mathfrak{p}^1(\Lambda)$. Así por las proposiciones 2.1.16, 2.1.17 y 5.1.17 se tiene que $\mathfrak{p}^2(\Lambda)$ es funtorialmente finita en $\mathfrak{m}(\Lambda)$. ■

Teorema 5.1.19 *En $\mathfrak{p}(\Lambda)$ hay sucesiones exactas que casi se dividen.*

Demostración.

Por la proposición 5.1.16 $\mathfrak{p}(\Lambda)$ es funtorialmente finito en $\mathfrak{m}(\Lambda)$ y por el corolario 4.3.11 tiene sucesiones que casi se dividen al ser cerrada bajo extensiones. ■

Teorema 5.1.20 *En $\mathfrak{p}^1(\Lambda)$ hay sucesiones exactas que casi se dividen.*

Demostración.

Por las proposiciones 5.1.17 y 2.1.20 se tiene que $\mathfrak{p}^1(\Lambda)$ tiene morfismos derechos que casi se dividen y tiene morfismos izquierdos que casi se dividen.

Sea $A \in \mathfrak{p}^1(\Lambda)$ inescindible y no Ext-inyectivo en $\mathfrak{p}^1(\Lambda)$, entonces existe

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

sucesión exacta que no se divide con $C \in \mathfrak{p}^1(\Lambda)$. Sea $f : A \to M$ un morfismo minimal izquierdo que casi se divide en $\mathfrak{p}^1(\Lambda)$, así se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & M \arrow[dl, dashed] \\ B & \end{tikzcd}$$

de modo que f es un monomorfismo, y por la observación 5.1.15 se tiene que f es un morfismo minimal izquierdo que casi se divide en $\mathfrak{p}(\Lambda)$.

Por otro lado, como L no es Ext-inyectivo en $\mathfrak{p}(\Lambda)$, existe una sucesión que casi se divide en $\mathfrak{p}(\Lambda)$

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f'} M' \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0.$$

Luego, exite isomorfismo $\gamma : M' \to M$ tal que $\gamma f' = f$, de modo que se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f'"] \arrow[d, equal] & M' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\gamma"'] & N \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\cong"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "\pi"] & Cok\ f \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Además, $N \in cPuno$ ya que es inescindible y no es Ext-proyectivo en $\mathfrak{p}(\Lambda)$.

Así, $\mathfrak{p}^1(\Lambda)$ tiene sucesiones que casi se dividen a la izquierda, análogamente $\mathfrak{p}^1(\Lambda)$ tiene sucesiones que casi se dividen a la derecha, es decir, $\mathfrak{p}^1(\Lambda)$ tiene sucesiones que casi se dividen. ■

5.2 SUCESIONES QUE CASI SE DIVIDEN A TRAVÉS DEL FUNTOR COK

Lema 5.2.1 ***[Herradura]*** *Sea* $0 \longrightarrow L \xrightarrow{i} M \xrightarrow{d} N \longrightarrow 0$ *sucesión exacta en* $\Lambda - mod$ *y sean* $P_1 \xrightarrow{f} P_0 \xrightarrow{\pi_L} L$ *,* $Q_1 \xrightarrow{h} Q_0 \xrightarrow{\pi_N} N$ *resoluciones proyectivas de* L *y* N *respectivamente entonces existe resolución proyectiva* $M_1 \xrightarrow{g} M_0 \xrightarrow{\pi_M} M$ *de* M *tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "f"'] & M_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "g"'] & Q_1 \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_0 \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "\pi_L"'] & M_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "\pi_M"'] & Q_0 \arrow[r] \arrow[d, "\pi_N"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "i"] \arrow[d] & M \arrow[r, "d"] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Demostración.

Al ser d epimorfismo y Q_0 proyectivo, existe un morfismo $t : Q_0 \to M$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
 & Q_0 \arrow[dl, "t"'] \arrow[d, "\pi_N"] \\
M \arrow[r, "d"] & N
\end{tikzcd}$$

luego $0 = \pi_N h = dth$ de modo que existe morfismo $s' : Q_1 \to L$ tal que $is' = th$ así existe morfismo $s : Q_1 \to P_0$ tal que $\pi_L s = s'$. Se sigue que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, "f"'] & P_1 \amalg Q_1 \arrow[r, "(0,1)"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} f & -s \\ 0 & h \end{pmatrix}"'] & Q_1 \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_0 \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, "\pi_L"'] & P_0 \amalg Q_0 \arrow[r, "(0,1)"] \arrow[d, "(i\pi_L{,}t)"'] & Q_0 \arrow[r] \arrow[d, "\pi_N"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "i"] \arrow[d] & M \arrow[r, "d"] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

De la composición

$$\begin{aligned}(i\pi_L, t)\begin{pmatrix} f & -s \\ 0 & h\end{pmatrix} &= (i\pi_L f, -i\pi_L s + th) \\ &= (0, -is' + th) \\ &= (0, -th + th) = (0,0)\end{aligned}$$

se tiene que $Im \left(\begin{smallmatrix} f & -s \\ 0 & h\end{smallmatrix}\right) \subset Ker\ (i\pi_L, t)$. Ahora sea $\binom{p_0}{q_0} \in P_0 \amalg Q_0$ tal que $0 = (i\pi_L, t)\binom{p_0}{q_0} = i\pi_L(p_0) + t(q_0)$ de modo que $0 = d\big(i\pi_L(p_0) + t(q_0)\big) = dt(q_0) = \pi_N(q_0)$, asi que existe $q_1 \in Q_1$ tal que $h(q_1) = q_0$. Luego, de la identidad $i\pi_L s = th$ obtenemos que $i\pi_L(p_0) = -th(q_1) = -i\pi_L s(q_1)$, de modo que $\pi_L(p_0) = -\pi_L s(q_1)$, luego existe $p_1 \in P_1$ tal que $f(p_1) = p_0 + s(q_1)$, por lo que

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} f & -s \\ 0 & h\end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f(p_1) - s(q_1) \\ h(q_1)\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_0 + s(q_1) - s(q_1) \\ q_0\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Así $Im \left(\begin{smallmatrix} f & -s \\ 0 & h\end{smallmatrix}\right) = Ker\ (i\pi_L, t)$.

Sea $m \in M$ y sea $q \in Q_0$ tal que $d(m) = \pi_N(q)$, luego $0 = d(t(q) - m)$ así que existe $l \in L$ y $p \in P_0$ tales que $i(l) = t(q) - m$ y $\pi_L(p) = l$. De esta forma se tiene que $(i\pi_L, t)\binom{-p}{q} = i\pi_L(-p) + t(q) = -i(l) + t(q) = m - t(q) + t(q) = m$ así que $(i\pi_L, t)$ es suprayectiva. ■

Proposición 5.2.2 *Considere el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, "f"'] & P_1 \amalg Q_1 \arrow[r, "{(0,1)}"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} f & -s \\ 0 & h\end{smallmatrix}\right)"'] & Q_1 \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_0 \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, "\pi_L"'] & P_0 \amalg Q_0 \arrow[r, "{(0,1)}"] \arrow[d, "{(i\pi_L, t)}"'] & Q_0 \arrow[r] \arrow[d, "\pi_N"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "i"] & M \arrow[r, "d"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

del lema 5.2.1. Si $f, h \in \mathfrak{p}^2(\Lambda)$ *y*

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, "f"'] & P_1 \amalg Q_1 \arrow[r, "{(0,1)}"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} f & -s \\ 0 & h\end{smallmatrix}\right)"'] & Q_1 \arrow[d, "h"] \\
P_0 \arrow[r, "\binom{1}{0}"] & P_0 \amalg Q_0 \arrow[r, "{(0,1)}"] & Q_0
\end{tikzcd}$$

es sucesión que casi se divide en $\mathcal{P}(\Lambda)$, entonces $L \xrightarrow{i} M \xrightarrow{d} N$ *es sucesión que casi se divide en $\Lambda - mod$.*

Demostración.

Por el lema de la serpiente (lema 1.2.6) se tiene sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Ker\ f \xrightarrow{\binom{1}{0}|} Ker\ \begin{pmatrix} f & -s \\ 0 & h \end{pmatrix} \xrightarrow{(0,1)|} Ker\ h \xrightarrow{\delta} Cok\ f \xrightarrow{i'} Cok\ \begin{pmatrix} f & -s \\ 0 & h \end{pmatrix} \xrightarrow{d'} Cok\ h \longrightarrow 0$$

donde $\delta(q) = \overline{-s(q)}$ para $q \in Ker\ h$. Como $h \in \mathfrak{p}^2(\Lambda)$ entonces la inclusión canónica σ_h : $ker\ h \to Q_1$ no es retracción y así el morfismo

$$\begin{tikzcd}
ker\ h \arrow[r, "\sigma_h"] \arrow[d, "h"'] & Q_1 \arrow[d, "0"] \\
Q_0 \arrow[r, "0"] & 0
\end{tikzcd}$$

no es retracción, de modo que existen morfismos $\alpha : Ker\ h \to P_1$ y $\beta : Ker\ h \to Q_1$ tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
 & & Ker\ h \arrow[dll, dashed, "\binom{\alpha}{\beta}"'] \arrow[dl, "\sigma_h"] \arrow[dd, "0"] \\
P_1 \amalg Q_1 \arrow[r, "(0,1)"'] \arrow[dd, "\begin{pmatrix} f & -s \\ 0 & h \end{pmatrix}"'] & Q_1 \arrow[dd, "h"] & \\
 & & 0 \arrow[dll, dashed, "0"'] \arrow[dl, "0"] \\
P_0 \amalg Q_0 \arrow[r, "(0,1)"'] & Q_0 &
\end{tikzcd}$$

así $\beta = (0,1)\binom{\alpha}{\beta} = \sigma_h$ y $\binom{0}{0} = \begin{pmatrix} f & -s \\ 0 & h \end{pmatrix}\binom{\alpha}{\beta} = \binom{f\alpha - s\beta}{0}$ luego $f\alpha = s\sigma_h$, entonces para $q \in Ker\ h$ se tiene que $\delta(q) = \overline{-s(q)} = \overline{-s\sigma_h(q)} = \overline{f\alpha(q)} = \overline{0}$ por lo tanto

$$Cok\ f \xrightarrow{i'} Cok\ \begin{pmatrix} f & -s \\ 0 & h \end{pmatrix} \xrightarrow{d'} Cok\ h$$

es sucesión exacta corta. Ahora por la proposición 5.1.12 i' no es sección y d' no es retracción y por la proposición 5.1.13 $Cok\ h$ y $Cok\ f$ son inescindibles en $\Lambda - mod$.

Sea $t : Y \to Cok\ h$ morfismo que no es retracción y sea $Y_1 \xrightarrow{\varphi_Y} Y_0 \xrightarrow{\pi_Y} Y$ resolución proyectiva minimal de Y luego por el lema del levantamiento existen morfismos $\theta : Y_1 \to Q_1$ y $\mu : Y_0 \to Q_0$ tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
Y_1 \arrow[r, "\varphi_Y"] \arrow[d, "\theta"'] & Y_0 \arrow[r, "\pi_Y"] \arrow[d, "\mu"'] & Y \arrow[d, "t"] \\
Q_1 \arrow[r, "h"] & Q_0 \arrow[r, "\pi"] & Cok\ h
\end{tikzcd}$$

y por la proposición 5.1.12

$$\begin{tikzcd}
Y_1 \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\varphi_Y"'] & Q_1 \arrow[d, "h"] \\
Y_0 \arrow[r, "\mu"] & Q_0
\end{tikzcd}$$

no es retracción de modo que existe morfismo

$$\begin{tikzcd}
Y_1 \arrow[r, "\binom{u_1}{u_2}"] \arrow[d, "\varphi_Y"'] & P_1 \amalg Q_1 \arrow[d, "\begin{pmatrix} f & -s \\ 0 & h \end{pmatrix}"] \\
Y_0 \arrow[r, "\binom{v_1}{v_2}"] & P_0 \amalg Q_0
\end{tikzcd}$$

tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
& & Y_1 \arrow[dll, dashed, "\binom{u_1}{u_2}"'] \arrow[dl, "\theta"] \arrow[dd, "\varphi_Y"] \\
P_1 \amalg Q_1 \arrow[r, "(0,1)"'] \arrow[dd, "\begin{pmatrix} f & -s \\ 0 & h \end{pmatrix}"'] & Q_1 \arrow[dd, "h"] & \\
& & Y_0 \arrow[dll, dashed, "\binom{v_1}{v_2}"'] \arrow[dl, "\mu"] \\
P_0 \amalg Q_0 \arrow[r, "(0,1)"'] & Q_0 &
\end{tikzcd}$$

Así existe un morfismo $\omega : Y \to Cok \begin{pmatrix} f & -s \\ 0 & h \end{pmatrix}$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
Y_1 \arrow[r, "\varphi_Y"] \arrow[d, "\binom{u_1}{u_2}"'] & Y_0 \arrow[r, "\pi_Y"] \arrow[d, "\binom{v_1}{v_2}"'] & Y \arrow[d, dashed, "\omega"] \\
P_1 \amalg Q_1 \arrow[r, "\begin{pmatrix} f & -s \\ 0 & h \end{pmatrix}"] & P_0 \amalg Q_0 \arrow[r, "\pi"] & Cok\begin{pmatrix} f & -s \\ 0 & h \end{pmatrix}
\end{tikzcd}$$

Se sigue que el diagrama

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "\omega"'] \arrow[d, "t"] \\ Cok \begin{pmatrix} f & -s \\ 0 & h \end{pmatrix} \arrow[r, "d'"] & Cok\ h \end{tikzcd}$$

conmuta, de modo que d' es morfismo derecho que casi se divide y, por la proposición 1.5.13

$$Cok\ f \xrightarrow{i'} Cok \begin{pmatrix} f & -s \\ 0 & h \end{pmatrix} \xrightarrow{d'} Cok\ h$$

es sucesión que casi se divide en $\Lambda - mod$. Por otro lado por el primer teorema de isomorfía para módulos se tienen diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} P_0 \arrow[r, "\pi_L"] \arrow[d, "\rho_f"'] & L \\ Cok\ f \arrow[ur, dashed, "\pi'_L"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} P_0 \amalg Q_0 \arrow[r, "(i\pi_L, t)"] \arrow[d, "\rho"'] & M \\ Cok \begin{pmatrix} f & -s \\ 0 & h \end{pmatrix} \arrow[ur, dashed, "\pi'_M"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Q_0 \arrow[r, "\pi_N"] \arrow[d, "\rho_h"'] & N \\ Cok\ h \arrow[ur, dashed, "\pi'_N"'] & \end{tikzcd}$$

donde π'_L, π'_M y π'_N son isomorfismos. Así se tiene que

$$\begin{aligned} \pi'_M i' \rho_f &= \pi'_M \rho \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (i\pi_L, t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= i\pi_L \\ &= i\pi'_L \rho_f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi'_N d' \rho &= \pi'_N \rho_h (0,1) \\ &= \pi_N (0,1) \\ &= d(i\pi_L, t) \\ &= d\pi'_M \rho \end{aligned}$$

de modo que el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Cok\ f \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "\pi'_L"'] & Cok \begin{pmatrix} f & -s \\ 0 & h \end{pmatrix} \arrow[r, "d'"] \arrow[d, "\pi'_M"'] & Cok\ h \arrow[r] \arrow[d, "\pi'_N"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "i"] & M \arrow[r, "d"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

conmuta ya que ρ_f y ρ son epimorfismos, por lo tanto $L \xrightarrow{i} M \xrightarrow{d} N$ es isomorfa a $Cok\ f \xrightarrow{i'} Cok \begin{pmatrix} f & -s \\ 0 & h \end{pmatrix} \xrightarrow{d'} Cok\ h$ y así es sucesión que casi se divide en $\Lambda - mod$. ■

Proposición 5.2.3 *Considere el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, "f"'] & P_1 \amalg Q_1 \arrow[r, "(0,1)"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} f & -s \\ 0 & h \end{pmatrix}"'] & Q_1 \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_0 \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, "\pi_L"'] & P_0 \amalg Q_0 \arrow[r, "(0,1)"] \arrow[d, "(i\pi_L, t)"'] & Q_0 \arrow[r] \arrow[d, "\pi_N"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "i"] \arrow[d] & M \arrow[r, "d"] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

del lema 5.2.1. Si $f, h \in \mathfrak{p}^2(\Lambda)$ y $L \xrightarrow{i} M \xrightarrow{d} N$ es sucesión que casi se divide en $\Lambda - mod$, entonces

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, "f"'] & P_1 \amalg Q_1 \arrow[r, "(0,1)"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} f & -s \\ 0 & h \end{pmatrix}"'] & Q_1 \arrow[d, "h"] \\
P_0 \arrow[r, "\binom{1}{0}"] & P_0 \amalg Q_0 \arrow[r, "(0,1)"] & Q_0
\end{tikzcd}$$

es sucesión que casi se divide en $\mathfrak{p}(\Lambda)$.

Demostración.

Como $L \xrightarrow{i} M \xrightarrow{d} N$ es sucesión que casi se divide en $\Lambda - mod$ por la proposición V.1.14 de [ARS1] L es inescindible y por la proposición 5.1.12 f es inescindible en $\mathfrak{p}(\Lambda)$ de modo que, por el lema 1.5.13, es suficiente probar que

$$\begin{tikzcd}
P_1 \amalg Q_1 \arrow[r, "(0,1)"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} f & -s \\ 0 & h \end{pmatrix}"'] & Q_1 \arrow[d, "h"] \\
P_0 \amalg Q_0 \arrow[r, "(0,1)"] & Q_0
\end{tikzcd}$$

es morfismo derecho que casi se divide. Para esto probaremos que toda no retracción de X en $Q_1 \xrightarrow{h} Q_0$ con X inescindible en $\mathfrak{p}(\Lambda)$ se factoriza a través de

$$\begin{tikzcd}
P_1 \amalg Q_1 \arrow[r, "(0,1)"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} f & -s \\ 0 & h \end{pmatrix}"'] & Q_1 \arrow[d, "h"] \\
P_0 \amalg Q_0 \arrow[r, "(0,1)"] & Q_0
\end{tikzcd}$$

.

Caso I. $X = P' \xrightarrow{1} P'$ con P' proyectivo inescindible. Sea

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "1"'] & Q_1 \arrow[d, "h"] \\ P' \arrow[r, "\beta"] & Q_0 \end{tikzcd}$$

un morfismo en $\mathfrak{p}(\Lambda)$ y considere el siguiente morfismo

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[r, "\binom{0}{\alpha}"] \arrow[d, "1"'] & P_1 \amalg Q_1 \arrow[d, "\begin{pmatrix} f & -s \\ 0 & h \end{pmatrix}"] \\ P' \arrow[r, "\binom{-s\alpha}{\beta}"] & P_0 \amalg Q_0 \end{tikzcd}$$

Luego el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & & P' \arrow[dll, dashed, "\binom{0}{\alpha}"'] \arrow[dl, "\alpha"] \arrow[dd, "1"] \\ P_1 \amalg Q_1 \arrow[r, "(0,1)"'] \arrow[dd, "\begin{pmatrix} f & -s \\ 0 & h \end{pmatrix}"'] & Q_1 \arrow[dd, "h"] & \\ & & P' \arrow[dll, dashed, "\binom{-s\alpha}{\beta}"'] \arrow[dl, "\beta"] \\ P_0 \amalg Q_0 \arrow[r, "(0,1)"'] & Q_0 & \end{tikzcd}$$

Caso II. $X = P' \xrightarrow{0} 0$ con P' proyectivo inescindible. Sea

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "0"'] & Q_1 \arrow[d, "h"] \\ 0 \arrow[r, "0"] & Q_0 \end{tikzcd}$$

un morfismo en $\mathfrak{p}(\Lambda)$ de modo que $0 = th\alpha = is'\alpha$ luego $s'\alpha = 0$ y así $\pi_L s\alpha = 0$ se sigue que $Im\ s\alpha \subset Im\ f$ por lo tanto existe $\omega : P' \to P_1$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & P' \arrow[dl, dashed, "\omega"'] \arrow[d, "s\alpha"] & \\ P_1 \arrow[r, "f"] & Im\ f \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

considere el siguiente morfismo

$$\begin{tikzcd}
P' \arrow[r, "\binom{\omega}{\alpha}"] \arrow[d, "0"'] & P_1 \amalg Q_1 \arrow[d, "\begin{pmatrix} f & -s \\ 0 & h \end{pmatrix}"] \\
0 \arrow[r, "\binom{0}{0}"] & P_0 \amalg Q_0
\end{tikzcd}$$

Luego el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
 & & P' \arrow[dll, dashed, "\binom{\omega}{\alpha}"'] \arrow[dl, "\alpha"] \arrow[dd, "0"] \\
P_1 \amalg Q_1 \arrow[r, "(0,1)"'] \arrow[dd, "\begin{pmatrix} f & -s \\ 0 & h \end{pmatrix}"'] & Q_1 \arrow[dd, "h"] & \\
 & & 0 \arrow[dll, dashed, "\binom{0}{0}"'] \arrow[dl, "0"] \\
P_0 \amalg Q_0 \arrow[r, "(0,1)"'] & Q_0 &
\end{tikzcd}$$

ya que $\begin{pmatrix} f & -s \\ 0 & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f\omega - s\alpha \\ h\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s\alpha - s\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Caso III . $X = P_1' \xrightarrow{\theta} P_0'$ con P_1', P_0' proyectivos y $Cok\ \theta$ inescindible. Sea

$$\begin{tikzcd}
P_1' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\theta"'] & Q_1 \arrow[d, "h"] \\
P_0' \arrow[r, "\beta"] & Q_0
\end{tikzcd}$$

un morfismo en $\mathfrak{p}(\Lambda)$ que no es retracción. Luego se tiene diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
P_1' \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\alpha"'] & P_0' \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\beta"'] & Cok\ \theta \arrow[d, dashed, "\gamma"] \\
Q_1 \arrow[r, "h"] & Q_0 \arrow[r, "\pi_N"] & N
\end{tikzcd}$$

donde γ no es retracción por 5.1.12 de modo que existe $\mu : Cok\ \theta \to M$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
 & Cok\ \theta \arrow[dl, dashed, "\mu"'] \arrow[d, "\gamma"] \\
M \arrow[r, "d"] & N
\end{tikzcd}$$

así que por el lema del levantamiento existen morfismos $\binom{z_1}{z_2} : P_0' \to P_0 \amalg Q_0$ y $\binom{y_1}{y_2} : P_1' \to P_1 \amalg Q_1$ tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
P_1' \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, dashed, "\binom{y_1}{y_2}"'] & P_0' \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, dashed, "\binom{z_1}{z_2}"'] & Cok\ \theta \arrow[d, "\mu"] \\
P_1 \amalg Q_1 \arrow[r, "\begin{pmatrix} f & -s \\ 0 & h \end{pmatrix}"] & P_0 \amalg Q_0 \arrow[r, "(i\pi_L, t)"] & M
\end{tikzcd}$$

Así se tiene diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
P_1' \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\alpha - y_2"'] & P_0' \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\beta - z_2"'] & Cok\ \theta \arrow[d, "0"] \\
Q_1 \arrow[r, "h"] & Q_0 \arrow[r, "\pi_N"] & N
\end{tikzcd}$$

luego $dt(\beta - z_2) = \pi_N(\beta - z_2) = 0$ de modo que existe $\delta' : P_0' \to L$ tal que $i\delta' = t(\beta - z_2)$ así exite $\delta : P_0' \to P_0$ tal que $\pi_L \delta = \delta'$ por lo tanto $i\pi_L\delta = i\delta' = t(\beta - z_2)$. Por otro lado

$$\begin{aligned}
i\pi_L\Big(- \delta\theta + s(\alpha - y_2)\Big) &= i\pi_L\Big(- \delta\theta\Big) + i\pi_L\Big(s(\alpha - y_2)\Big) \\
&= t\Big(- (\beta - z_2)\Big)\theta + th(\alpha - y_2) \\
&= t\Big(- (\beta - z_2)\theta + h(\alpha - y_2)\Big) \\
&= t(0) = 0
\end{aligned}$$

de modo que existe $\varphi : P_1' \to P_1$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
 & P_1' \arrow[dl, dashed, "\varphi"'] \arrow[d, "-\delta\theta + s(\alpha - y_2)"] & \\
P_1 \arrow[r, "f"] & Im\ f \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Luego el siguiente diagrama conmuta

$$
\begin{tikzcd}
 & & P'_1 \arrow[dll, dashed, "{\binom{\varphi}{\alpha-y_2}}"'] \arrow[dl, "\alpha-y_2"] \arrow[dd, "\theta"] \\
P_1 \amalg Q_1 \arrow[r, "{(0,1)}"] \arrow[dd, "{\begin{pmatrix} f & -s \\ 0 & h \end{pmatrix}}"'] & Q_1 \arrow[dd, "h"'] & \\
 & & P'_0 \arrow[dll, dashed, "{\binom{-\delta}{\beta-z_2}}"'] \arrow[dl, "\beta-z_2"] \arrow[dd, "\pi"] \\
P_0 \amalg Q_0 \arrow[r, "{(0,1)}"] \arrow[dd, "{(i\pi_L,t)}"'] & Q_0 \arrow[dd, "\pi_N"'] & \\
 & & Cok\ \theta \arrow[dll, dashed, "0"'] \arrow[dl, "0"] \\
M \arrow[r, "d"] & N &
\end{tikzcd}
$$

de donde el siguiente diagrama conmuta:

$$
\begin{tikzcd}
 & & P'_1 \arrow[dll, dashed, "{\binom{\varphi+y_1}{\alpha}}"'] \arrow[dl, "\alpha"] \arrow[dd, "\theta"] \\
P_1 \amalg Q_1 \arrow[r, "{(0,1)}"'] \arrow[dd, "{\begin{pmatrix} f & -s \\ 0 & h \end{pmatrix}}"'] & Q_1 \arrow[dd, "h"] & \\
 & & P'_0 \arrow[dll, dashed, "{\binom{z_1-\delta}{\beta}}"'] \arrow[dl, "\beta"] \\
P_0 \amalg Q_0 \arrow[r, "{(0,1)}"'] & Q_0 &
\end{tikzcd}
$$

■

Proposición 5.2.4 *Sean S un Λ-módulo simple no inyectivo, $Q \xrightarrow{\rho} S$ cubierta proyectiva de S, $S \xrightarrow{j} I$ envolvente inyectiva de S y $P_1 \xrightarrow{f} P_0 \xrightarrow{\pi} I$ resolución proyectiva de I entonces*

$$
\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r, "{\binom{1}{0}}"] \arrow[d, "f"'] & P_1 \amalg Q \arrow[r, "{(0,1)}"] \arrow[d, "{(f,h)}"'] & Q \arrow[d, "0"] \\
P_0 \arrow[r, "1"] & P_0 \arrow[r, "0"] & 0
\end{tikzcd}
$$

es sucesión que casi se divide en $\mathcal{P}(\Lambda)$ donde h es tal que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} & Q \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "j\rho"] \\ P_0 \arrow[r, "\pi"] & I \end{tikzcd}$$

Demostración.

Como S es simple entonces Q es inescindible y por la proposición 5.1.13 $Q \xrightarrow{0} 0$ es inescindible en $\mathcal{P}(\Lambda)$ de modo que por el lema 1.5.13, es suficiente probar que

$$\begin{tikzcd} P_1 \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, "f"'] & P_1 \amalg Q \arrow[d, "(f{,}h)"] \\ P_0 \arrow[r, "1"] & P_0 \end{tikzcd}$$

es morfismo izquierdo que casi se divide. Para esto probaremos que toda no sección de $P_1 \xrightarrow{f} P_0$ en X con X inescindible en $\mathcal{P}(\Lambda)$ se factoriza a través de

$$\begin{tikzcd} P_1 \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, "f"'] & P_1 \amalg Q \arrow[d, "(f{,}h)"] \\ P_0 \arrow[r, "1"] & P_0 \end{tikzcd}$$

Caso I. $X = Q' \xrightarrow{0} 0$ con Q' proyectivo inescindible. Sea

$$\begin{tikzcd} P_1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & Q' \arrow[d, "0"] \\ P_0 \arrow[r, "0"] & 0 \end{tikzcd}$$

un morfismo en $\mathcal{P}(\Lambda)$ y considere el siguiente morfismo

$$\begin{tikzcd} P_1 \amalg Q \arrow[r, "(\alpha{,}0)"] \arrow[d, "(f{,}h)"'] & Q' \arrow[d, "0"] \\ P_0 \arrow[r, "0"] & 0 \end{tikzcd} .$$

Luego el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
& P_1 \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dd, "f"'] & P_1 \amalg Q \arrow[dll, dashed, "(\alpha,0)"] \arrow[dd, "(f,h)"] \\
Q' \arrow[dd, "0"'] & & \\
& P_0 \arrow[r, "1"] \arrow[dl, "0"'] & P_0 \arrow[dll, dashed, "0"] \\
0 & &
\end{tikzcd}$$

Caso II. $X = \; Q' \xrightarrow{1} Q'$ con Q' proyectivo inescindible. Sea

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & Q' \arrow[d, "1"] \\
P_0 \arrow[r, "\beta"] & Q'
\end{tikzcd}$$

un morfismo en $\mathcal{P}(\Lambda)$ y considere el siguiente morfismo

$$\begin{tikzcd}
P_1 \amalg Q \arrow[r, "(\alpha,\beta h)"] \arrow[d, "(f,h)"'] & Q' \arrow[d, "1"] \\
P_0 \arrow[r, "\beta"] & Q'
\end{tikzcd}$$

Luego el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
& P_1 \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dd, "f"'] & P_1 \amalg Q \arrow[dll, dashed, "(\alpha,\beta h)"] \arrow[dd, "(f,h)"] \\
Q' \arrow[dd, "1"'] & & \\
& P_0 \arrow[r, "1"] \arrow[dl, "\beta"'] & P_0 \arrow[dll, dashed, "\beta"] \\
Q' & &
\end{tikzcd}$$

Caso III. $X = \; Q'_1 \xrightarrow{\theta} Q'_0$ con Q'_1, Q'_0 proyectivos y $Cok\ \theta$ inescindible. Sea

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & Q'_1 \arrow[d, "\theta"] \\
P_0 \arrow[r, "\beta"] & Q'_0
\end{tikzcd}$$

morfismo en $\mathcal{P}(\Lambda)$ que no es sección. Luego se tiene diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} P_1 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha"'] & P_0 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\beta"'] & I \arrow[d, dashed, "\gamma"] \\ Q_1' \arrow[r, "\theta"] & Q_0' \arrow[r, "\pi'"] & Cok\ \theta \end{tikzcd}$$

donde γ no es sección por la proposición 5.1.12, así, por la proposición 1.5.9, existe morfismo $\delta : I/j(S) \to Cok\ \theta$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\pi_j"] \arrow[d, "\gamma"'] & I/j(S) \arrow[dl, dashed, "\delta"] \\ Cok\ \theta & \end{tikzcd}$$

Por otro lado para $p \in Ker\ \pi_j\pi$ se tiene que exite $q \in Q$ tal que $\pi(p) = j\rho(q) = \pi h(q)$ de modo que existe $p' \in P_1$ tal que $f(p') = p - h(q)$ luego $p = f(p') + h(q) = \Big(f, h\Big)(p', q)$ es decir $p \in Im\ (f.h)$. Así que, por $\pi_j\pi(f, h) = (\pi_j\pi f, \pi_I\pi h) = (0, \pi_I, j\rho) = (0, 0)$, se tiene que $Im\ (f, h) = Ker\ \pi_j\pi$. Luego $Cok\ (f, h) = I/j(S)$ y por el lema del levantamiento exiten morfismos $(\alpha_1, \alpha_2) : P_1 \amalg Q \to Q_1'$ y $\beta' : P_0 \to Q_0'$ tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd} P_1 \amalg Q \arrow[r, "{(f,h)}"] \arrow[d, "{(\alpha_1,\alpha_2)}"'] & P_0 \arrow[r, "\pi_j\pi"] \arrow[d, "\beta'"'] & I/j(S) \arrow[d, "\gamma"] \\ Q_1' \arrow[r, "\theta"] & Q_0' \arrow[r, "\pi'"] & Cok\ \theta \end{tikzcd}$$

conmuta. Así se tiene diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} P_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha-\alpha_1"'] & P_0 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\beta-\beta'"'] & I \arrow[d, "0"] \\ Q_1' \arrow[r, "\theta"] & Q_0' \arrow[r, "\pi'"] & Cok\ \theta \end{tikzcd}$$

de modo que existe morfismo $t : P_0 \to Q'_1$ tal que $\theta t = \beta - \beta'$. Así se tiene que

$$\begin{aligned}
\theta(\alpha, \alpha_2 + th) &= \theta\Big((\alpha_1, \alpha_2) + (\alpha - \alpha_1, th)\Big) \\
&= \theta(\alpha_1, \alpha_2) + \theta(\alpha - \alpha_1, th) \\
&= \beta'(f, h) + \Big(\theta(\alpha - \alpha_1), \theta th\Big) \\
&= (\beta' f, \beta' h) + \Big((\beta - \beta')f, \theta th\Big) \\
&= (\beta' f + \beta f - \beta' f, \beta' h + \theta th) \\
&= \Big(\beta f, \beta' h + (\beta - \beta')h\Big) \\
&= (\beta f, \beta' h + \beta h - \beta' h) \\
&= (\beta f, \beta h) = \beta(f, h)
\end{aligned}$$

de modo que se tiene diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& P_1 \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dd, "f"'] & P_1 \amalg Q \arrow[dll, dashed, "{(\alpha,\alpha_2+th)}"] \arrow[dd, "{(f,h)}"] \\
Q'_1 \arrow[dd, "\theta"'] & & \\
& P_0 \arrow[r, "1"] \arrow[dl, "\beta"'] & P_0 \arrow[dll, dashed, "\beta"] \\
Q'_0 & &
\end{tikzcd}$$

■

Proposición 5.2.5 *Sea I un Λ-módulo simple e inyectivo entonces*

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, "f"'] & P_1 \amalg P_0 \arrow[r, "{(0,1)}"] \arrow[d, "{(f,1)}"'] & P_0 \arrow[d, "0"] \\
P_0 \arrow[r, "1"] & P_0 \arrow[r, "0"] & 0
\end{tikzcd}$$

es sucesión que casi se divide en $\mathcal{P}(\Lambda)$, donde $P_1 \xrightarrow{f} P_0 \xrightarrow{\pi} I$ es resolución proyectiva minimal de I.

Demostración.

Como I es simple entonces P_0 es inescindible y por la proposición 5.1.13 $P_0 \xrightarrow{0} 0$ es inescindible en $\mathcal{P}(\Lambda)$ de modo que, por el lema 1.5.13, es suficiente probar que

$$\begin{tikzcd} P_1 \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, "f"'] & P_1 \amalg P_0 \arrow[d, "(f,1)"] \\ P_0 \arrow[r, "1"] & P_0 \end{tikzcd}$$

es morfismo izquierdo que casi se divide. Para esto probaremos que toda no sección de $P_1 \xrightarrow{f} P_0$ en X con X inescindible en $\mathcal{P}(\Lambda)$ se factoriza a través de

$$\begin{tikzcd} P_1 \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, "f"'] & P_1 \amalg P_0 \arrow[d, "(f,1)"] \\ P_0 \arrow[r, "1"] & P_0 \end{tikzcd} .$$

Caso I. $X = Q \xrightarrow{0} 0$ con Q proyectivo inescindible. Sea

$$\begin{tikzcd} P_1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & Q \arrow[d, "0"] \\ P_0 \arrow[r, "0"] & 0 \end{tikzcd}$$

un morfismo en $\mathcal{P}(\Lambda)$ y considere el siguiente morfismo

$$\begin{tikzcd} P_1 \amalg P_0 \arrow[r, "(\alpha,0)"] \arrow[d, "(f,1)"'] & Q \arrow[d, "0"] \\ P_0 \arrow[r, "0"] & 0 \end{tikzcd} .$$

Luego el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & P_1 \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dd, "f"] & P_1 \amalg P_0 \arrow[dll, dashed, "(\alpha,0)"] \arrow[dd, "(f,1)"] \\ Q \arrow[dd, "0"'] & & \\ & P_0 \arrow[r, "1"] \arrow[dl, "0"'] & P_0 \arrow[dll, dashed, "0"] \\ 0 & & \end{tikzcd}$$

Caso II. $X = Q \xrightarrow{1} Q$ con Q proyectivo inescindible. Sea

$$\begin{tikzcd} P_1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & Q \arrow[d, "1"] \\ P_0 \arrow[r, "\beta"] & Q \end{tikzcd}$$

un morfismo en $\mathcal{P}(\Lambda)$ y considere el siguiente morfismo

$$\begin{tikzcd} P_1 \amalg P_0 \arrow[r, "(\alpha,\beta)"] \arrow[d, "(f,1)"'] & Q \arrow[d, "1"] \\ P_0 \arrow[r, "\beta"] & Q \end{tikzcd} .$$

Luego el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & P_1 \arrow[rr, "\binom{1}{0}"] \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dd, "f"] & & P_1 \amalg P_0 \arrow[dlll, dashed, "(\alpha,\beta)"] \arrow[dd, "(f,1)"] \\ Q \arrow[dd, "1"'] & & & \\ & P_0 \arrow[rr, "1"] \arrow[dl, "\beta"'] & & P_0 \arrow[dlll, dashed, "\beta"] \\ Q & & & \end{tikzcd}$$

Caso III. $X = Q_1 \xrightarrow{\theta} Q_0$ con Q_1, Q_0 proyectivos y $Cok\ \theta$ inescindible. Sea

$$\begin{tikzcd} P_1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & Q_1 \arrow[d, "\theta"] \\ P_0 \arrow[r, "\beta"] & Q_0 \end{tikzcd}$$

morfismo en $\mathcal{P}(\Lambda)$ que no es sección. Luego se tiene diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} P_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & P_0 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\beta"'] & I \arrow[d, dashed, "\gamma"] \\ Q_1 \arrow[r, "\theta"] & Q_0 \arrow[r] & Cok\ \theta \end{tikzcd}$$

donde γ no es sección por la proposición 5.1.12. Si $ker\ \gamma = \{0\}$ entonces se tiene diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "1"'] & Cok\ \theta \arrow[dl, dashed, "\gamma'"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

lo que contradice que γ no es sección de modo que $Ker\ \gamma = I$ ya que I es simple y así $\gamma = 0$, se sigue que existe morfismo $\delta : P_0 \to Q_1$ tal que $\theta\delta = \beta$. Ahora considere el siguiente morfismo

$$\begin{tikzcd}
P_1 \amalg P_0 \arrow[r, "(\alpha,\delta)"] \arrow[d, "(f{,}1)"'] & Q_1 \arrow[d, "\theta"] \\
P_0 \arrow[r, "\beta"] & Q_0
\end{tikzcd}$$

Luego el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
 & P_1 \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dd, "f"] & P_1 \amalg P_0 \arrow[dll, dashed, "(\alpha,\delta)"] \arrow[dd, "(f{,}1)"] \\
Q_1 \arrow[dd, "\theta"'] & & \\
 & P_0 \arrow[r, "1"] \arrow[dl, "\beta"'] & P_0 \arrow[dll, dashed, "\beta"] \\
Q_0 & &
\end{tikzcd}$$

■

Teorema 5.2.6 *Sea $X := X_1 \xrightarrow{\varphi_X} X_2$ inescindible en $\mathcal{P}(\Lambda)$ tal que no es Ext-inyectivo, luego existe una sucesión que casi se divide en $\mathcal{P}(\Lambda)$*

$$\eta : 0 \longrightarrow X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{d} Z \longrightarrow 0$$

1 .- Si $Cok\ X$ es inyectivo se tiene que

i) Si $Cok\ X$ no es simple y es envolvente inyectiva del simple S entonces

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, "\varphi_X"'] & X_1 \amalg P \arrow[r, "(0{,}1)"] \arrow[d, "(\varphi_X{,}h)"'] & P \arrow[d, "0"] \\
X_2 \arrow[r, "1"] & X_2 \arrow[r, "0"] & 0
\end{tikzcd}$$

es sucesión que casi se divide en $\mathcal{P}(\Lambda)$, donde $P \xrightarrow{\pi} S$ es cubierta proyectiva de S y h hace conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & & X_2 \arrow[d] \\
P \arrow[r, "\pi"] \arrow[urr, dashed, "h"] & S \arrow[r] & Cok\ X.
\end{tikzcd}$$

ii) Si $Cok\ X$ es simple entonces

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, "\varphi_X"'] & X_1 \amalg X_2 \arrow[r, "(0,1)"] \arrow[d, "(\varphi_X{,}1)"'] & X_2 \arrow[d, "0"] \\
X_2 \arrow[r, "1"] & X_2 \arrow[r, "0"] & 0
\end{tikzcd} .$$

es sucesión que casi se divide en $\mathcal{P}(\Lambda)$.

2 .- Si $Cok\ X$ no es inyectivo entonces existe una sucesión que casi se divide en $\Lambda - mod$

$$\eta' : 0 \longrightarrow Cok\ X \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

donde $N \cong Tr\ D\ Cok\ X$. Más aún:

i) El levantamiento de η' determinado por el lema de la herradura (lema 5.2.1) es isomorfo a η.

ii) $0 \longrightarrow Cok\ X \xrightarrow{Cok\ i} Cok\ Y \xrightarrow{Cok\ d} Cok\ Z \longrightarrow 0$ es isomorfa a η'.

Demostración.

1. i) y **1. ii)** se siguen de las proposiciones 5.2.4 y 5.2.5.

Para la segunda parte de acuerdo con la proposición V. 1.14 y el teorema V. 1.15 de [ARS1] existe η' con $N \cong Tr\ D\ Cok\ X$, ahora, sea $N_1 \xrightarrow{\varphi_N} N_2 \xrightarrow{\pi_N} N$ resolución proyectiva minimal de N, de modo que, por la proposición 5.2.3,

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, "\varphi_X"'] & X_1 \amalg N_1 \arrow[r, "(0,1)"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} \varphi_X & -s \\ 0 & \varphi_N \end{pmatrix}"'] & N_1 \arrow[d, "\varphi_N"] \\
X_2 \arrow[r, "\binom{1}{0}"] & X_2 \amalg N_2 \arrow[r, "(0,1)"] & N_2
\end{tikzcd}$$

es sucesión que casi se divide en $\mathcal{P}(\Lambda)$ y, por el corolario 1.5.14, es isomorfa a η, de modo que $Z : Z_1 \xrightarrow{\varphi_Z} Z_2$ es inescindible en $\mathfrak{p}^2(\Lambda)$. Luego se tiene diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Cok\ X \arrow[r, "Cok\ i"] \arrow[d, "\alpha"'] & Cok\ Y \arrow[r, "Cok\ d"] \arrow[d, "\beta"'] & Cok\ Z \arrow[d, "\gamma"] \\
Cok\ X \arrow[r, "f"] & E \arrow[r, "g"] & N
\end{tikzcd}$$

donde α y γ son isomorfismos por la proposición 5.1.12, y por el lema de tres

$$0 \longrightarrow Cok\ X \xrightarrow{Cok\ i} Cok\ Y \xrightarrow{Cok\ d} Cok\ Z \longrightarrow 0$$

es isomorfa a η'. ■

Teorema 5.2.7 *Sea $Z : Z_1 \xrightarrow{\varphi_Z} Z_2$ inescindible en $\mathcal{P}(\Lambda)$ tal que no es Ext-proyectivo, luego existe una sucesión que casi se divide en $\mathcal{P}(\Lambda)$*

$$\eta : 0 \longrightarrow X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{d} Z \longrightarrow 0$$

1.- *Si $Z \notin \mathfrak{p}^2(\Lambda)$ entonces $Z_2 = 0$ y Z_1 es inescindible, luego Z_1 es cubierta proyectiva del simple S.*

   i) *Si S no es inyectivo entonces*

$$\begin{tikzcd} P_1 \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, "\rho"'] & P_1 \amalg Z_1 \arrow[r, "(0{,}1)"] \arrow[d, "(\rho{,}h)"'] & Z_1 \arrow[d, "0"] \\ P_2 \arrow[r, "1"] & P_2 \arrow[r, "0"] & 0 \end{tikzcd}$$

   es sucesión que casi se divide en $\mathcal{P}(\Lambda)$, donde $S \xrightarrow{j} I$ es envolvente inyectiva de S , $P_1 \xrightarrow{\rho} P_2 \longrightarrow I$ es resolución proyectiva minimal de I y h hace conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & & P_2 \arrow[d] \\ Z_1 \arrow[r] \arrow[urr, dashed, "h"] & S \arrow[r, "j"] & I. \end{tikzcd}$$

   ii) *Si S es inyectivo entonces*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, "\rho"'] & P \amalg Z_1 \arrow[r, "(0{,}1)"] \arrow[d, "(\rho{,}1)"'] & Z_1 \arrow[d, "0"] \\ Z_1 \arrow[r, "1"] & Z_1 \arrow[r, "0"] & 0 \end{tikzcd} .$$

   es sucesión que casi se divide en $\mathcal{P}(\Lambda)$, donde $P \xrightarrow{\rho} Z_1 \longrightarrow S$ es resolución proyectiva minimal de S.

2 .- Si $Z \in \mathfrak{p}^2(\Lambda)$ entonces $Cok\ Z$ no es proyectivo y existe una sucesión que casi se divide en $\Lambda - mod$

$$\eta' : 0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} Cok\ Z \longrightarrow 0$$

donde $M \cong D\ Tr\ Cok\ Z$. Más aún:

i) El levantamiento de η' determinado por el lema de la herradura (lema 5.2.1) es isomorfo a η.

ii) $0 \longrightarrow Cok\ X \xrightarrow{Cok\ i} Cok\ Y \xrightarrow{Cok\ d} Cok\ Z \longrightarrow 0$ es isomorfa a η'.

Demostración.

1. i) y **1. ii)** se siguen de las proposiciones 5.2.4 y 5.2.5.

Para la segunda parte de acuerdo con la proposición V. 1.14 y el teorema V. 1.15 de [ARS1] existe η' con $M \cong D\ Tr\ Cok\ Z$, ahora bien sea $M_1 \xrightarrow{\varphi_M} M_2 \xrightarrow{\pi_M} M$ resolución proyectiva minimal de M, de modo que, por la proposición 5.2.3,

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, "\varphi_M"'] & M_1 \amalg Z_1 \arrow[r, "(0{,}1)"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} \varphi_M & -s \\ 0 & \varphi_Z \end{pmatrix}"'] & Z_1 \arrow[d, "\varphi_Z"] \\
M_2 \arrow[r, "\binom{1}{0}"] & M_2 \amalg Z_2 \arrow[r, "(0{,}1)"] & Z_2
\end{tikzcd}$$

es sucesión que casi se divide en $\mathcal{P}(\Lambda)$ y, por el corolario 1.5.15, es isomorfa a η, de modo que $X : X_1 \xrightarrow{\varphi_X} X_2$ es inescindible en $\mathfrak{p}^2(\Lambda)$. Luego se tiene diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Cok\ X \arrow[r, "Cok\ i"] \arrow[d, "\alpha"'] & Cok\ Y \arrow[r, "Cok\ d"] \arrow[d, "\beta"'] & Cok\ Z \arrow[d, "\gamma"] \\
M \arrow[r, "f"] & L \arrow[r, "g"] & Cok\ Z
\end{tikzcd}$$

donde α y γ son isomorfismos por la proposición 5.1.12, y por el lema de tres

$$0 \longrightarrow Cok\ X \xrightarrow{Cok\ i} Cok\ Y \xrightarrow{Cok\ d} Cok\ Z \longrightarrow 0$$

es isomorfa a η'. ∎

Conclusiones

Muchos de los resultados de este trabajo forman parte de la literatura actual, sin embargo, se busco realizar las pruebas con herramientas puramente homológicas, para el alcance de alumnos de los últimos semestre de licenciatura. También se lograron generalizar algunos resultados que, en principio se conocian únicamente para campos perfectos, a álgebras de Artin sobre anillos conmutativos.

Para continuar con esta linea de investigación se pretende determinar dentro de la teoría de representaciones de álgebras de Artin cuales son los resultados que siguen siendo validos para subcategorías que tienen débilmente sucesiones que casi se dividen y encontrar las generalizaciones adecuadas para aquellos resultados que se invaliden bajo estas hipótesis. También, determinar las condiciones para que una sucesión que casi se divide en la categoría $\mathfrak{p}(\Lambda)$ con objetos en $\mathfrak{p}^2(\Lambda)$ siga siendo una sucesión que casi se divide, pero en la categoría $cPdos$ y tratar de dar una fórmula alternativa para estas sucesiones.

Bibliografía

[AF1] Frank W. Anderson, Kent R. Fuller. *Rings and Categories of Modules.* Graduate Texts in Mathematics 13. Springer-Verlag. Second edition, 1992.

[AR1] Maurice Auslander, Idun Reiten. *Applications of Contravariantly Finite Subcategories.* Advances in mathematics **86** (1991) 111-152.

[ARS1] M. Auslander, I. Reiten, S. O. Smal∅. *Representations Theory of Artin Algebras.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics 36, 1995.

[AS1] M. Auslander, S. O. Smal∅. *Preprojective Modules Over Artin Algebras.* Journal of algebra. **66** (1980) 61-122.

[A1] August Benjamin Rye. *The 2-Kronecker Quiver and Systems of Linear Differential Equations.* Tesis. Norwegian University of Science and Technology. 2013.

[BSZ1] R. Bautista, L. Salmerón, R. Zuazua. *Differential Tensor Algebras and their Module Categories*, London Mathematical Society Lecture Notes Series 362. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[CCJP1] S. Chan, R. Cuitún, R. Jiménez, J. Pérez. *La Envolvente Inyectiva y el Teorema de Bass-Papp.* Abstraction $\&$ Application **12** (2015) 51-68.

[CP1] J. Canales, J. Pérez. *El teorema de Silver*, Abstraction $\&$ Application **13** (2015) 27-36.

[G1] Ernesto A. Guerrero Lara. *Categorias Lift y Objetos con Autoextensiones triviales.* M. Tesis UADY 2008, 103p.

[IST1] K. Igusa, S. O. Smal∅, G. Todorov. *Finite projectivity and contravariant finiteness.* Proceedings of the American Mathematical Society. Vol. 109. No. 4, August 1990.

[Kl1] Mark Kleiner. *Approximations and Almost Split Sequences in Homologically Finite Subcategories*, Journal of Algebra **198**, (1997) 135-163.

[KP1] M. Kleiner, E. Pérez, *Computation of Almost Split Sequences with Applications to Relatively Projective and Prinjective Modules.* Algebras and Representation Theory **6:** 251-284, 2003.

[LPC1] Shiping Liu, Puiman Ng., Charles Paquette. *Almost Split Secuences and Approximations.* Algebr Represent Theor **16** (2013) 1809-1827.

[M1] S. Mac Lane. *Homology*. Springer-Verlag, 1963.

[Rot1] Joseph J. Rotman. *An Introduction to Homological Algebra.* Second Edition. Springer, 2009.

[R1] L. H. Rowen. *Ring Theory*, Academic press, Inc., San diego, 1991.

[Sil1] L. Silver. *Noncommutative Localizations and Applications*, Journal of Algebra **7** (1967) 44-76.

[S1] S. O. Smal$\varnothing$. *Functorial Finite Subcategories Over triangular matrix rings.* Proceedings of the America mathematical society. Vol. 111. No. 3, March 1991, 651-656.