Universidad Autónoma de Yucatán

Facultad de Matemáticas

Divisibilidad Infinita en Subfamilias de Distribuciones Elípticas

TESIS

Para obtener el grado de
Maestra en Ciencias Matemáticas

Autor:
L.A. Mariana Pérez Rojas

Directores de tesis:
Dr. José Luis Batún Cutz
Dr. Henry Gaspar Pantí Trejo

Mérida, Yucatán, México a 23 de noviembre de 2015

Agradecimientos

A mis asesores, Dr. José Luis Batún Cutz y Dr. Henry Gaspar Pantí Trejo, por su paciencia, dedicación y por todos los conocimientos que me transmitieron durante estos años.

A mis sinodales, M. en C. Luci del Carmen Torres Sánchez y Dr. Juan Carlos Pardo Millán, por el tiempo invertido en la revisión de esta tesis y por los comentarios que me proporcionaron.

A mis padres, por ser siempre una fuente inagotable de apoyo y motivación.

A Rodrigo, por su paciencia, cariño y consejos.

A la UADY, por permitirme hacer mis estudios de licenciatura y maestría en sus instalaciones. A todos mis profesores y amigos de la Facultad de Matemáticas.

Al CONACYT, por el apoyo económico brindado durante mis estudios de maestría.

Índice general

Introducción

Este trabajo de tesis relaciona dos temas de gran importancia en la teoría de Probabilidad y Estadística; las distribuciones elípticas y las leyes infinitamente divisibles.

La familia de distribuciones elípticas surge de la idea de extender la distribución normal multivariada a distribuciones que conserven algunas de sus propiedades más importantes, como la cerradura bajo aditividad, condicionamiento y marginalización [16], por mencionar algunas. Su nombre proviene de que, en caso que exista la densidad, ésta tiene curvas de nivel con forma de elipsoides en $\mathbb{R}^n$.

Desde la primera presentación de esta familia hecha por Kelker [6] ha habido un desarrollo constante en la investigación sobre las propiedades y aplicaciones de este tipo de distribuciones. Se pueden encontrar aplicaciones de las distribuciones elípticas en diversas áreas, por ejemplo en teoría de portafolios [15], en el análisis estadístico de datos direccionales [11], en series de tiempo financieras [3] y en general para construir modelos estadísticos en los que el supuesto de normalidad no se satisface.

Las propiedades de las distribuciones elípticas se definirán a partir de su relación con otra familia de distribuciones, llamadas distribuciones esféricas. Las distribuciones esféricas cumplen la propiedad de ser simétricas bajo cierta transformación que se definirá mas adelante, de esta simetría se derivan sus demás propiedades.

Otro concepto fundamental para el desarrollo de esta tesis es el introducido en 1929 por Bruno De Finetti [5], llamado divisibilidad infinita. Un vector aleatorio se dice que es infinitamente divisible si su distribución se puede expresar como la distribución de una suma de n vectores aleatorios independientes e idénticamente distribuidos (*i.i.d.*), para cualquier entero positivo n. Las distribuciones infinitamente divisibles son de interés ya que forman una generalización del Teorema de Límite Central, la generalización se obtiene al relajar las condiciones impuestas en dicho teorema, por ejemplo no considerar la condición de varianza finita para los vectores *i.i.d.*

Por otro lado, las distribuciones infinitamente divisibles están íntimamente relacionadas con los procesos de Lévy (procesos con incrementos independientes y estacionarios). Para ser precisos, la colección de todas las distribuciones infinitamente divisibles están en relación uno a uno con la colección de todos los procesos de Lévy, ver por ejemplo [20]. Más aun, a partir de la función característica de un vector infinitamente divisible es posible encontrar una terna (A, ν, γ) que caracteriza de manera única al proceso de Lévy correspondiente.

Algunas de las subfamilias de distribuciones elípticas de mayor interés desde el punto de vista teórico como aplicado según Jensen [14] y presentadas con mayor detalle por Fang [16] son:

1. Normal Multivariada.
2. Estable.
3. Uniforme Multivariada.
4. Logística.
5. Tipo Kotz.
6. Pearson tipo VII.
7. t Multivariada.
8. Pearson tipo II.
9. Mezcla Normal Varianza.

El objetivo de este trabajo es probar la propiedad de divisibilidad infinita para estas distribuciones, esto es de interés por diversas razones. Desde el punto de vista teórico, conocer cuáles distribuciones elípticas son infinitamente divisibles nos puede ayudar a crear nuevas distribuciones elípticas con esta propiedad. Por otro lado, desde el punto de vista práctico la motivación surge de la gran cantidad de aplicaciones que se han encontrado en diversas áreas de las ciencias para los procesos de Lévy y de la relación ya mencionada entre las distribuciones infinitamente divisibles y los procesos de Lévy. Además, conocer que una distribución es infinitamente divisible nos permite hacer inferencia sobre los parámetros del proceso de Lévy correspondiente.

Este mismo objetivo ya ha sido trabajado anteriormente por algunos autores para ciertas subfamilias, por ejemplo en [18] se presenta la primera prueba de divisibilidad infinita para la distribución t multivariada, al igual que su correspondiente representación de Lévy. Algunas de estas distribuciones se conoce desde hace tiempo que son infinitamente divisibles (ver [20]), como es el caso de las distribuciones Normal y Estable.

La tesis está estructurada como sigue. En el primer capítulo se presentan las definiciones y resultados sobre las distribuciones elípticas y la divisibilidad infinita que serán de utilidad en los capítulos posteriores. En el segundo capítulo se definen cada una de las distribuciones listadas anteriormente junto con sus propiedades más importantes. Finalmente, en el tercer capítulo se prueba la propiedad de divisibilidad infinita en cada una de las distribuciones, haciendo uso de los resultados obtenidos en el primer y segundo capítulo.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Notación

En este trabajo de tesis se utilizarán negritas para representar vectores (usualmente en $\mathbb{R}^n$) y mayúsculas para denotar aleatoriedad. Las letras griegas serán la excepción, proporcionando su dimensión al momento en que se utilicen.

$\mathbf{X}$	:	Vector aleatorio en $\mathbb{R}^n$.
$\mathbf{X}'$	:	Transpuesta del vector $\mathbf{X}$.
$\lvert\mathbf{x}\rvert$	:	Norma del vector $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)'$ dada por $\lvert\mathbf{x}\rvert = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$.
S^{n-1}	:	Esfera unitaria definida como $S^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \lvert\mathbf{x}\rvert = 1\}$.
$\mathrm{r}(A)$	:	Rango de la matriz A.
$\mathcal{O}(n)$	:	Conjunto de matrices ortogonales de $n \times n$.
$\mathbf{1}_A$	:	Función indicadora del conjunto A.
F	:	Función de distribución o distribución.
$\int_{\mathbb{R}^n} dF(\mathbf{x})$	:	Integral múltiple con respecto a la distribución F.
$F * G(t)$	:	Convolución de las medidas F y G, definida como $F * G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t-x) dG(x)$.
$\psi(\mathbf{t})$	:	Función Característica en $\mathbb{R}^n$.

$\Re(z)$	:	Parte real de $z \in \mathbb{C}$.
$\Gamma(z)$	:	Función gamma de parámetro $z \in \mathbb{C}$ definida como $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt, (\Re(z) > 0)$.
$B(\alpha, \beta)$	:	Función beta de parámetros $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ definida como $B(\alpha, \beta) = 2\int_0^{\pi/2}(\operatorname{sen}\theta)^{2\alpha-1}(\cos\theta)^{2\beta-1}d\theta, (\Re(\alpha), \Re(\beta) > 0)$.
$a^{[k]}$	:	Símbolo de Pochhammer, definido como $a^{[k]} = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)},\ a \in \mathbb{C},\ k$ entero no negativo.
$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \mathbf{Y}$	:	Igualdad en distribución de los vectores aleatorios $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$.

A continuación se presentarán los conceptos y resultados más importantes que se utilizan en el desarrollo de la tesis.

1.2. Distribuciones Esféricas

La función característica es un elemento que se estará utilizando constantemente durante la tesis ya que permite probar propiedades distribucionales del vector de manera más fácil que al utilizar la función de distribución.

Definición 1.2.1. (Función Característica) La función característica de un vector aleatorio $\mathbf{X}\in \mathbb{R}^n$ con distribución F, es una función $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definida como:

$$\psi(\mathbf{t}) := E[e^{i\mathbf{t}'\mathbf{X}}] = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\mathbf{t}'\mathbf{x}}dF(\mathbf{x}).$$

Algunas de sus propiedades elementales son las siguientes:

1. La función característica siempre existe y satisface $|\psi(\mathbf{t})| \leq \psi(\mathbf{0}) = 1$, para toda $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$.
2. Si $\mathbf{X}_i$ tiene función característica ψ_i, $i = 1, 2$ y $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ son independientes, entonces la función característica de $\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2$ es el producto $\psi_1(\mathbf{t})\psi_2(\mathbf{t})$.
3. La función característica de un vector aleatorio determina de manera única su distribución.

Estas y otras propiedades se pueden consultar en [20].

Observación 1.2.1. Se utilizará la notación $\psi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})$ para referirse a la función característica del vector aleatorio $\mathbf{X}$.

Dado que la distribución uniforme juega un papel importante en las propiedades de las distribuciones esféricas, la definimos a continuación.

Definición 1.2.2. (Distribución uniforme en S^{n-1}) Se dice que $\mathbf{U}^{(n)} = (\mathrm{U}_1, ..., \mathrm{U}_n)'$ es un vector aleatorio uniformemente distribuido sobre la esfera unitaria S^{n-1} si tiene función de densidad dada por

$$f_{\mathbf{U}^{(n)}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{S_n}, \quad |\mathbf{x}| = 1,$$

donde $S_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ es el área de la esfera unitaria.

Como se mencionó en la Introducción, las distribuciones elípticas son una generalización de las distribuciones esféricas, es por esto que se empezará por definir a éstas últimas para más adelante establecer su relación con las distribuciones elípticas.

Definición 1.2.3. (Distribución esférica) Un vector aleatorio $\mathbf{X}$ se dice que tiene distribución esférica si para cada matriz $\Gamma \in \mathcal{O}(n)$,

$$\Gamma\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \mathbf{X},$$

donde $\mathcal{O}(n)$ denota al conjunto de matrices ortogonales de $n \times n$.

Observación 1.2.2. Si $\mathbf{X}$ es un vector esférico en $\mathbb{R}^n$, escribiremos $\mathbf{X} \sim S_n(\cdot)$.

De la definición anterior se sigue que las distribuciones esféricas son invariantes bajo tansformaciones ortogonales, geométricamente esto significa que dos vectores con igual norma tendrán la misma distribución. Además, se verifica que $\mathbf{U}^{(n)}$ es esférica, ya que todos los vectores sobre la esfera unitaria tienen densidad constante.

Definamos a Φ_n como

$$\Phi_n = \{\phi(\cdot) : \phi(t_1^2 + \cdots + t_n^2) \text{ es una función característica n-dimensional}\}.$$

Existen definiciones equivalentes para las distribuciones esféricas, en [16] se presentan las siguientes:

Proposición 1.2.1 ([16], p. 27)**.** *Un vector aleatorio* $\mathbf{X}= (\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)'$ *se dice que tiene distribución esférica si y sólo si su función característica* $\psi(\boldsymbol{t})$ *satisface alguna de las siguientes afirmaciones equivalentes:*

i) Para cada $\Gamma \in \mathcal{O}(n)$,
$$\psi(\Gamma'\boldsymbol{t}) = \psi(\boldsymbol{t}), \quad \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^n.$$

ii) Existe una función escalar ϕ *tal que* $\psi(\boldsymbol{t}) = \phi(\boldsymbol{t}'\boldsymbol{t})$, *es decir,* $\phi \in \Phi_n$.

Como se puede notar, la función característica de un vector esférico está determinada por la función ϕ de la Proposición 1.2.1 inciso *ii*), por esta razón $\phi(\cdot)$ es llamado el generador característico de la distribución esférica. Se usará la notación $\mathbf{X} \sim S_n(\phi)$ para hacer referencia al generador característico ϕ.

Es posible hallar una expresión para ϕ en términos de la función característica de la distribución uniforme en S^{n-1}. Esto se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 1.2.1 ([16], p. 29). *Una función $\phi \in \Phi_n$ si y sólo si*

$$\phi(t) = \int_0^\infty \Omega_n(tr^2)dF(r), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

donde F es una función de distribución sobre $[0,\infty)$ y

$$\Omega_n(\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y}) = \frac{1}{S_n}\int_{S^{n-1}} e^{i\boldsymbol{y}'\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{x},$$

es decir, $\Omega_n(\boldsymbol{t}'\boldsymbol{t})$ es la función característica de $\boldsymbol{U}^{(n)}$.

El teorema anterior nos proporciona una forma de calcular el generador característico de una distribución esférica sin la necesidad de calcular su función característica. Además, nos proporciona la relación entre la distribución F y $\mathbf{X}$ y establece la siguiente representación.

Corolario 1.2.1 ([16], p. 30). *Sea $\phi(\boldsymbol{t}'\boldsymbol{t})$ la función característica del vector aleatorio $\mathbf{X}$, $\phi \in \Phi_n$. Entonces $\mathbf{X}$ tiene representación estocástica*

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} R\mathbf{U}^{(n)}$$

donde R es una variable aleatoria no negativa independiente de $\boldsymbol{U}^{(n)}$, y $R \sim F(r)$ está relacionada con ϕ por la relación (1.1).

A la variable aleatoria R del corolario anterior se le llama la variable generadora, a F la función de distribución generadora y a $\mathbf{U}^{(n)}$ la base uniforme de la distribución esférica.

A continuación se enunciarán algunos teoremas que serán de utilidad más adelante, se presentan sin demostración por no ser de importancia para el objetivo de esta tesis.

Teorema 1.2.2 ([16], p. 30). *Suponga que $\mathbf{X} \stackrel{d}{=} R\mathbf{U}^{(n)} \sim S_n(\phi)$ y $P(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}) = 0$, entonces*

$$|\mathbf{X}| \stackrel{d}{=} R, \quad \mathbf{X}/|\mathbf{X}| \stackrel{d}{=} \boldsymbol{U}^{(n)}.$$

Además, $|\mathbf{X}|$ y $\mathbf{X}/|\mathbf{X}|$ son independientes.

Teorema 1.2.3 ([16], p. 20). *Sea $\mathbf{U}^{(n)} = (\mathrm{U}_1, ..., \mathrm{U}_n)'$, entonces la densidad marginal de $(\mathrm{U}_1, ..., \mathrm{U}_k)'$, $k \le n$, está dada por*

$$\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma((n-k)/2)\pi^{k/2}}\left(1 - \sum_{i=1}^{k} u_i^2\right)^{\frac{n-k}{2}-1}, \quad \sum_{i=1}^{k} u_i^2 < 1.$$

Teorema 1.2.4 ([16], p. 31). *Sea $\mathbf{X} = (\mathrm{X}_1, ..., \mathrm{X}_n)'$ vector aleatorio. Entonces $\mathbf{X}$ tiene distribución esférica si y sólo si para cualquier $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, se tiene*

$$\boldsymbol{a}'\mathbf{X} \stackrel{d}{=} |\boldsymbol{a}|\,\mathrm{X}_1.$$

En general, un vector aleatorio esférico no necesariamente tiene densidad, sin embargo, de la Proposición 1.2.1 se puede observar que de tenerla, ésta sería de la forma $g(\mathbf{x}'\mathbf{x})$ para cierta función no negativa $g(\cdot)$. A la función g se le llama el *generador de densidad* de $\mathbf{X}$, se usará la notación $\mathbf{X}\sim S_n(g)$ para referirse a ella. Esta función debe satisfacer la condición

$$\int_0^\infty y^{n/2-1} g(y)dy < \infty.$$

Esta condición se obtiene ya que de otro modo no se podría definir la densidad de la variable R, esto se aprecia más claramente a partir del siguiente teorema.

Teorema 1.2.5 ([16])**.** *Si $\mathbf{X} \overset{d}{=} R\mathbf{U}^{(n)} \sim S_n(g)$, entonces $\mathbf{X}$ tiene generador de densidad $g(\cdot)$ si y sólo si R tiene densidad $f(\cdot)$ y la relación entre f y g es:*

$$f(r) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} r^{n-1} g(r^2). \tag{1.2}$$

Es de interés dar una expresión de la función característica de un vector con distribución uniforme en S^{n-1}. Puesto que esta expresión se encuentra dada en términos de funciones hipergeométricas, definimos a la función hipergeométrica generalizada como:

$${}_pF_q(a_1, ..., a_p; b_1, ..., b_q; z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{a_1^{[k]} \cdots a_p^{[k]}}{b_1^{[k]} \cdots b_q^{[k]}} \frac{z^k}{k!},$$

donde p, q son enteros positivos y $a_1, ..., a_p, b_1, ..., b_q, z \in \mathbb{C}$.

En el caso que $p = 0$, $q > 0$, la función hipergeométrica generalizada se define como

$${}_0F_q(b_1, ..., b_q; z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{b_1^{[k]} \cdots b_q^{[k]}} \frac{z^k}{k!},$$

análogamente se define el caso $q = 0$, $p > 0$.

El siguiente teorema presenta tres expresiones para la función característica de $\mathbf{U}^{(n)}$ junto con sus demostraciones.

Teorema 1.2.6 ([16], p. 70)**.** *Sea $\Omega_n(|\boldsymbol{t}|^2)$, $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^n$ la función característica de $\mathbf{U}^{(n)}$, entonces $\Omega_n(|\boldsymbol{t}|^2)$ se puede expresar de las siguientes formas equivalentes:*

i) $\Omega_n(|\boldsymbol{t}|^2) = \frac{1}{B((n-1)/2, \frac{1}{2})} \int_0^\pi \exp(i|\boldsymbol{t}|\cos\theta)(\operatorname{sen}\theta)^{n-2} d\theta.$

ii) $\Omega_n(|\boldsymbol{t}|^2) = \frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k |t|^{2k}}{(2k)!} \frac{\Gamma((2k+1)/2)}{\Gamma((n+2k)/2)}.$

iii) $\Omega_n(|\boldsymbol{t}|^2) = {}_0F_1\left(\frac{n}{2}; -\frac{|\boldsymbol{t}|^2}{4}\right)$ *donde* ${}_0F_1$ *es la función hipergeométrica generalizada con* $p = 0,\ q = 1$.

Demostración. i) Ya que $\mathbf{U}^{(n)}$ es un vector esférico, por el Teorema 1.2.4, tenemos que

$$\mathbf{t}'\mathbf{U}^{(n)} \stackrel{d}{=} |\mathbf{t}|\mathrm{U}_1, \quad \mathbf{U}^{(n)} = (\mathrm{U}_1, ..., \mathrm{U}_n)'.$$

Además, del Teorema 1.2.3, la densidad de U_1 esta dada por

$$f(u_1) = \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma((n-1)/2)\sqrt{\pi}}\left(1-u_1^2\right)^{\frac{n-1}{2}-1}, \quad u_1^2 < 1.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\Omega_n(|\mathbf{t}|^2) &= E[\exp(i\mathbf{t}'\mathbf{U}^{(n)})] = E[\exp(i|\mathbf{t}|\mathrm{U}_1)] \\ &= \int_{-1}^{1}\exp(i|\mathbf{t}|u_1)\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma((n-1)/2)\sqrt{\pi}}\left(1-u_1^2\right)^{(n-1)/2-1}du_1 \\ &= \frac{1}{B((n-1)/2, 1/2)}\int_0^{\pi}\exp(i|\mathbf{t}|\cos\theta)(\operatorname{sen}\theta)^{n-2}d\theta.\end{aligned}$$

Para obtener la última igualdad se utiliza el cambio de variable $u_1 = \cos\theta$, la igualdad $\Gamma(1/2) = \pi^{1/2}$ y la identidad $B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

ii) Por el inciso i), las identidades $B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ y por la representación en series de Taylor de $f(z) = \exp(z)$, $z \in \mathbb{C}$, se tiene

$$\begin{aligned}\Omega_n(|\mathbf{t}|^2) &= \frac{1}{B((n-1)/2, 1/2)}\int_0^{\pi}\exp(i|\mathbf{t}|\cos\theta)(\operatorname{sen}\theta)^{n-2}d\theta \\ &= \frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma((n-1)/2)}\int_0^{\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(i|\mathbf{t}|\cos\theta)^l}{l!}(\operatorname{sen}\theta)^{n-2}d\theta \\ &= \frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma((n-1)/2)}\sum_{l=0}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{(i|\mathbf{t}|\cos\theta)^l}{l!}(\operatorname{sen}\theta)^{n-2}d\theta.\end{aligned}$$

Donde el intercambio entre la suma y la integral se obtiene aplicando el teorema de Fubini. Ahora, por la definición de la función beta y por la periodicidad de las funciones seno y coseno:

$$\int_0^{\pi}(\operatorname{sen}\theta)^{n-2}(\cos\theta)^l d\theta = \begin{cases} B((n-1)/2, (l+1)/2) & \text{, si } l \text{ es par} \\ 0 & \text{, si } l \text{ es impar.}\end{cases}$$

Entonces, para $l = 2k$:

$$\begin{aligned}\Omega_n(|\mathbf{t}|^2) &= \frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma((n-1)/2)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i|\mathbf{t}|)^{2k}}{(2k)!}B((n-1)/2, (2k+1)/2) \\ &= \frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k|\mathbf{t}|^{2k}}{(2k)!}\frac{\Gamma((2k+1)/2)}{\Gamma((n+2k)/2)}.\end{aligned}$$

iii) La fórmula de duplicación de la función gamma ([24], p. 256) dice que:

$$\Gamma(2z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2^{2z-\frac{1}{2}} \Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right), \quad z \in \mathbb{C},\ \Re(z) > 0.$$

Despejando $\Gamma(z+\frac{1}{2})$ de la igualdad anterior tenemos

$$\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}\Gamma(2z)2^{\frac{1}{2}-2z}}{\Gamma(z)}. \tag{1.3}$$

Por la ecuación (1.3) con $z = k$

$$\frac{\Gamma(k+1/2)}{\sqrt{\pi}(2k)!} = \frac{\sqrt{2\pi}\Gamma(2k)2^{\frac{1}{2}-2k}}{\sqrt{\pi}\Gamma(k)(2k)!} = \frac{4^{-k}}{k!}. \tag{1.4}$$

Por otro lado, del inciso ii)

$$\Omega_n(|\mathbf{t}|^2) = \frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k|\mathbf{t}|^{2k}}{(2k)!} \frac{\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(n/2+k)}. \tag{1.5}$$

Finalmente, sustituyendo la ecuación (1.4) en (1.5)

$$\begin{aligned}
\Omega_n(|\mathbf{t}|^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k|\mathbf{t}|^{2k}}{4^k k!} \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n/2+k)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n/2)^{[k]}} \frac{\left(\frac{-|\mathbf{t}|^2}{4}\right)^k}{k!} \\
&= {}_0F_1\left(\frac{n}{2}; \frac{-|\mathbf{t}|^2}{4}\right).
\end{aligned}$$

□

Corolario 1.2.2. *Sea* $\mathbf{X}$ *un vector aleatorio con distribución esférica y generador de densidad* g*, entonces su generador característico se puede calcular de la siguiente manera*

$$\phi(x) = 2\pi^{n/2} \int_0^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(n/2+k)k!} \left(-\frac{xr^2}{4}\right)^k\right] r^{n-1} g(r^2) dr.$$

Demostración. Usando los Teoremas 1.2.1, 1.2.5 y 1.2.6 inciso iii) tenemos que

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \int_0^{\infty} \Omega_n(xr^2) dF(r) \\
&= \int_0^{\infty} {}_0F_1\left(\frac{n}{2}; \frac{-xr^2}{4}\right) f(r) dr \\
&= \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n/2+k)} \frac{1}{k!} \left(\frac{-xr^2}{4}\right)^k \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} r^{n-1} g(r^2) dr \\
&= 2\pi^{n/2} \int_0^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(n/2+k)k!} \left(-\frac{xr^2}{4}\right)^k\right] r^{n-1} g(r^2) dr.
\end{aligned}$$

$\square$

1.3. Distribuciones Elípticas

En esta sección se definen a las distribuciones elípticas, las cuáles se obtienen a partir de las distribuciones esféricas presentadas en la sección anterior, por lo que las propiedades de las distribuciones elípticas se derivan de las propiedades estudiadas para las distribuciones esféricas.

Definición 1.3.1. (Distribución Elíptica, [16] p. 31) Un vector aleatorio $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ se dice que tiene distribución elíptica con parámetros μ y Σ si

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \mu + A'\mathbf{Y},\ \mathbf{Y} \sim S_k(\phi),$$

donde μ es un vector de $n \times 1$, Σ matriz simétrica definida no negativa de $n \times n$ con $\mathrm{r}(\Sigma) = k$, $k \leq n$, A matriz de $k \times n$ tal que $A'A = \Sigma$.

Observación 1.3.1. Al vector $\mathbf{Y}$ de la definición anterior se le llamará el vector esférico asociado a $\mathbf{X}$. Se escribirá $\mathbf{X} \sim EC_n(\mu, \Sigma, \phi)$ para denotar un vector elíptico con parámetros μ, Σ y ϕ generador característico del vector esférico asociado $\mathbf{Y}$.

En [16] p. 43 se prueba que Σ, ϕ y A no son únicos a menos que se imponga la condición adicional $\det(\Sigma) = 1$.

Definición 1.3.2. (Definiciones Equivalentes, [16]) Si $\mathbf{X} \sim EC_n(\mu, \Sigma, \phi)$ con $\mathrm{r}(\Sigma)= k$ entonces:

i) La función característica de $\mathbf{X}$ es de la forma

$$\psi(\mathbf{t}) = e^{i\mathbf{t}'\mu}\phi(\mathbf{t}'\Sigma\mathbf{t}),$$

para toda $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$.

ii) $\mathbf{X}$ tiene representación estocástica

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \mu + RA'\mathbf{U}^{(k)},$$

donde $\mathbf{U}^{(k)}$ es el vector uniforme en S^{n-1}, R es una variable aleatoria no negativa independiente de $\mathbf{U}^{(k)}$ y $A'A = \Sigma$.

Proposición 1.3.1. *([16], p. 46) Sea $\mathbf{X} \sim EC_n(\mu,\Sigma,\phi)$, supongamos que $\mathbf{X}$ tiene densidad f, entonces f tiene la forma:*

$$f(\mathbf{x}) = C_n|\Sigma|^{-1/2}g((\mathbf{x} - \mu)'\Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \mu)),$$

donde C_n es la constante de normalización y $g(\cdot)$ es el generador de densidad del vector esférico asociado a $\mathbf{X}$.

De la proposición anterior observamos que una condición necesaria para que una distribución posea densidad es que la matriz Σ debe ser de rango completo. En el caso que $\mathbf{X}$ tenga densidad, se podrá utilizar la notación $EC_n(\mu, \Sigma, g)$ en lugar de $EC_n(\mu, \Sigma, \phi)$ para hacer referencia a la función g.

La siguiente proposición nos indica que el vector esférico asociado a un vector elíptico es su versión estándar, esto nos será de utilidad más adelante ya que como veremos, para probar la propiedad de divisibilidad infinita de un vector elíptico es suficiente con probar esta propiedad para su vector esférico asociado.

Proposición 1.3.2. *Sea* $\mathbf{X}$ *un vector aleatorio elíptico con distribución* $EC_n(\mu, \Sigma, \phi)$*,* Σ *de rango completo, entonces su vector esférico asociado* $\mathbf{Y}$ *tiene distribución* $EC_n(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}_n, \phi)$*.*

Demostración. Ya que $\mathbf{X}$ es un vector elíptico, por la Definición 1.3.2 tenemos que

$$\psi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = e^{i\mathbf{t}'\mu}\phi(\mathbf{t}'\Sigma\mathbf{t}).$$

Tomando $\mu = \mathbf{0}$ y $\Sigma = \mathbf{I}_n$:

$$\psi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \phi(\mathbf{t}'\mathbf{t}).$$

Pero por definición ϕ es el generador característico del vector esférico asociado por lo que $\phi(\mathbf{t}'\mathbf{t}) = \psi_{\mathbf{Y}}(\mathbf{t})$, es decir, $\mathbf{Y} \sim EC_n(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n, \phi)$. □

1.4. Divisibilidad Infinita

La divisibilidad infinita es una propiedad sumamente estudiada por varias razones. Teóricamente su importancia radica en su íntima relación con los procesos de Lévy, ya que como se prueba en [20], si $\{\mathbf{X}_t\}_{t\geq 0}$ es un proceso de Lévy en $\mathbb{R}^n$, entonces para cada t, $\mathbf{X}_t$ sigue una distribución infinitamente divisible. Por otro lado, en [9] se menciona que su aplicación más importante ocurre en la modelación, ya que algunos modelos sólo pueden ser definidos en términos de distribuciones infinitamente divisibles.

Definición 1.4.1. (Distribución Infinitamente Divisible) Un vector aleatorio $\mathbf{X}$ en $\mathbb{R}^n$ es infinitamente divisible si cumple que para cada $m = 1, 2, \ldots$ existe una sucesión de vectores aleatorios independientes e idénticamente distribuidos $\mathbf{X}_{1,m}, \ldots, \mathbf{X}_{m,m}$ tales que:

$$\mathbf{X} \overset{d}{=} \mathbf{X}_{1,m} + \cdots + \mathbf{X}_{m,m}. \tag{1.6}$$

La definición de divisibilidad infinita también se puede dar en términos de la distribución o de la función característica del vector aleatorio, como vemos a continuación. Sea $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ un vector aleatorio con función de distribución F y función característica $\psi(\mathbf{t})$, entonces $\mathbf{X}$ es infinitamente divisible si y sólo si para cualquier $m \in \mathbb{N}$, existe una función de distribución $F_m \in \mathbb{R}^n$ tal que:

$$F = F_m^{*m}, \tag{1.7}$$

donde F_m^{*m} denota la m-ésima convolución de F_m consigo misma. Además, se dice que $\mathbf{X}$ es infinitamente divisible si y sólo si, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe una función característica $\psi_m(\mathbf{t})$ tal que:

$$\psi(\mathbf{t}) = (\psi_m(\mathbf{t}))^m, \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n. \tag{1.8}$$

Observación 1.4.1. Ya que las definiciones anteriores son equivalentes, se utilizará el término $\mathbf{X}$ infinitamente divisible para referirse a (1.6), F infinitamente divisible para referirse a (1.7) y ψ infinitamente divisible para referirse a (1.8).

La propiedad de divisibilidad infinita también se puede obtener a través del generador característico de una distribución esférica, los siguientes resultados nos servirán de apoyo para demostrarlo.

Proposición 1.4.1. *Sea $\mathbf{X}$ un vector esférico infinitamente divisible, entonces para cada $m \in \mathbb{N}$, los vectores aleatorios $\mathbf{X}_{i,m}$, $i = 1, ..., m$ como en la Definición 1.4.1 tienen distribución esférica.*

Demostración. Por la definición de vector esférico tenemos que $\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \Gamma\mathbf{X}$, además ya que $\mathbf{X}$ infinitamente divisible,

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &\stackrel{d}{=} \mathbf{X}_{1,m} + \cdots + \mathbf{X}_{m,m} \\ &\stackrel{d}{=} \Gamma\mathbf{X}_{1,m} + \cdots + \Gamma\mathbf{X}_{m,m}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Ya que $\mathbf{X}_{i,m}$, $i = 1, ..., m$ son $i.i.d.$, también los vectores $\Gamma\mathbf{X}_{1,m}, ..., \Gamma\mathbf{X}_{m,m}$ lo son. Utilizando (1.9) tenemos que

$$\psi_{\mathbf{X}_{i,m}}(\mathbf{t}) = (\psi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}))^{1/m} = (\psi_{\Gamma\mathbf{X}}(\mathbf{t}))^{1/m} = \psi_{\Gamma\mathbf{X}_{i,m}}(\mathbf{t}).$$

Por lo que $\mathbf{X}_{i,m} \stackrel{d}{=} \Gamma\mathbf{X}_{i,m}$ para $i = 1, ..., m$, de aquí se sigue que cada $\mathbf{X}_{i,m}$ es esférico. $\square$

El siguiente teorema nos proporciona una relación entre la divisibilidad infinita de un vector esférico y la de su generador característico.

Teorema 1.4.1. *Sea $\mathbf{X} = (\mathrm{X}_1, ..., \mathrm{X}_n)'$ un vector aleatorio esférico con función característica $\psi(\cdot)$ y generador característico $\phi(\cdot)$. Si $\mathbf{X}$ es infinitamente divisible entonces $\phi(t^2)$ es infinitamente divisible.*

Demostración. Si $\mathbf{X}$ es infinitamente divisible, entonces para cualesquiera $m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$, se tiene

$$\psi(\mathbf{t}) = (\psi_m(\mathbf{t}))^m,$$

con ψ_m cierta función característica en $\mathbb{R}^n$. Por la Proposición 1.4.1 y ya que $\mathbf{X}$ es esférico, $\psi_m(\mathbf{t})$ es la función característica de un vector esférico, además por la Proposición 1.2.1 inciso ii) la ecuación anterior es equivalente a

$$\phi(\mathbf{t}'\mathbf{t}) = (\phi_m(\mathbf{t}'\mathbf{t}))^m, \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n. \tag{1.10}$$

Donde $\phi_m(\cdot)$ es el generador característico de $\psi_m(\cdot)$. Tomando $\mathbf{t}_0 = (t, 0, ..., 0)'$, $t \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$\psi(\mathbf{t}_0) = E[e^{it\mathrm{X}_1}] = \phi(t^2),$$

de aquí que $\phi(t^2)$ es una función característica en $\mathbb{R}$, análogamente $\phi_m(t^2)$ es una función característica en $\mathbb{R}$. Utilizando la ecuación (1.10) con $\mathbf{t} = \mathbf{t}_0$, se cumple que para cualquier $m \in \mathbb{N}$,

$$\phi(t^2) = (\phi_m(t^2))^m, \quad t \in \mathbb{R},$$

por lo que $\phi(t^2)$ es infinitamente divisible.

□

Proposición 1.4.2. *Sea Σ matriz de $n \times n$ con $r(\Sigma) = k$, $k \leq n$. Si $\Sigma = A'A$ con A matriz de $k \times n$, entonces la matriz definida como $M = AA'$ es invertible.*

Demostración. Por propiedades del rango de una matriz (ver [27]) tenemos que si A es una matriz de $k \times n$ entonces

$$r(A) = r(A') = r(A'A).$$

Pero por hipótesis, $A'A = \Sigma$ y $r(\Sigma) = k$ por lo que $r(A) = k$. Además, usando nuevamente la propiedad del rango para A' tenemos

$$r(A') = r(A) = r(AA'),$$

por lo que M es una matriz de $k \times k$ con $r(M) = k$, es decir, M es una matriz invertible. □

La siguiente proposición demuestra que para probar la divisibilidad infinita de una distribución elíptica es suficiente probar esta propiedad para su distribución esférica asociada.

Proposición 1.4.3. *Sea $\mathbf{X} \sim EC_n(\mu, \Sigma, \phi)$, Σ de rango $k \leq n$, entonces $\mathbf{X}$ es infinitamente divisible si y sólo si su vector esférico asociado $\mathbf{Y} \sim S_k(\phi)$ es infinitamente divisible.*

Demostración. Primero supongamos que $\mathbf{Y}$ es infinitamente divisible, por lo que para todo $m \in \mathbb{N}$ existen vectores aleatorios $\mathbf{Y}_{1,m}, ..., \mathbf{Y}_{m,m}$ *i.i.d.* tales que

$$\mathbf{Y} \stackrel{d}{=} \mathbf{Y}_{1,m} + \cdots + \mathbf{Y}_{m,m}.$$

Sea A matriz de $k \times n$ tal que $A'A = \Sigma$, entonces

$$A'\mathbf{Y} \stackrel{d}{=} A'\mathbf{Y}_{1,m} + \cdots + A'\mathbf{Y}_{m,m},$$

de aquí que

$$\mu + A'\mathbf{Y} \stackrel{d}{=} \left(A'\mathbf{Y}_{1,m} + \frac{\mu}{m}\right) + \cdots + \left(A'\mathbf{Y}_{m,m} + \frac{\mu}{m}\right).$$

Ya que $\mathbf{Y}_{1,m}, ..., \mathbf{Y}_{m,m}$ son *i.i.d.*, también lo son los vectores $A'\mathbf{Y}_{i,m} + \frac{\mu}{m}$, $i = 1, ..., m$. Además, como $\mathbf{Y}$ es el vector esférico asociado a $\mathbf{X}$, se cumple

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \mu + A'\mathbf{Y}.$$

Tomando $\mathbf{X}_{i,m} = A'\mathbf{Y}_{i,m} + \frac{\mu}{m}$, $i = 1, ..., m$ tenemos:

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \mathbf{X}_{1,m} + \cdots + \mathbf{X}_{m,m},$$

por lo que el vector $\mathbf{X}$ es infinitamente divisible.

Si ahora tenemos que $\mathbf{X}$ es infinitamente divisible, entonces para toda $m \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \mathbf{X}_{1,m} + \cdots + \mathbf{X}_{m,m}. \tag{1.11}$$

Como $\mathbf{Y}$ es el vector esférico asociado a $\mathbf{X}$ tenemos que

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \mu + A'\mathbf{Y}. \tag{1.12}$$

Por la Proposición 1.4.2, la matriz de dimensión $k \times k$ dada por AA' es invertible, por lo que despejando $\mathbf{Y}$ de la ecuación (1.12) y utilizando la igualdad (1.11) obtenemos

$$\mathbf{Y} \stackrel{d}{=} (AA')^{-1}A(\mathbf{X}_{1,m} - \mu/m) + \cdots + (AA')^{-1}A(\mathbf{X}_{m,m} - \mu/m).$$

Tomando $\mathbf{Y}_{i,m} = (AA')^{-1}A(\mathbf{X}_{i,m} - \mu/m)$ para $i = 1, ..., m$ se tiene que

$$\mathbf{Y} \stackrel{d}{=} \mathbf{Y}_{1,m} + \cdots + \mathbf{Y}_{m,m},$$

finalmente, como $\mathbf{X}_{1,m}, ..., \mathbf{X}_{m,m}$ son *i.i.d.* entonces también $\mathbf{Y}_{1,m}, ..., \mathbf{Y}_{m,m}$ lo son, por lo que $\mathbf{Y}$ es infinitamente divisible. $\square$

A partir de la siguiente proposición se pueden construir distribuciones esféricas infinitamente divisibles tomando una variable aleatoria no negativa R infinitamente divisible.

Proposición 1.4.4. *Sea* $\mathbf{X}$ *un vector aleatorio esférico con representación estocástica* $\mathbf{X} \stackrel{d}{=} R\mathbf{U}^{(n)}$. *Si la variable* R *con distribución* F *es infinitamente divisible, entonces* $\mathbf{X}$ *es infinitamente divisible.*

Demostración. Por el Corolario 1.2.1 tenemos que R y $\mathbf{U}^{(n)}$ son independientes, por lo tanto la función característica de $\mathbf{X}$ esta dada por

$$\psi_{R\mathbf{U}^{(n)}}(\mathbf{t}) = \int_0^\infty E(e^{ir\mathbf{t}'\mathbf{U}^{(n)}})dF(r), \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n.$$

Utilizando que R es infinitamente divisible y por propiedades de la convolución tenemos:

$$\begin{aligned}\psi_{R\mathbf{U}^{(n)}}(\mathbf{t}) &= \int_0^\infty E(e^{ir\mathbf{t}'\mathbf{U}^{(n)}})dF_m^{*m}(r)\\ &= \left[\int_0^\infty E(e^{ir\mathbf{t}'\mathbf{U}^{(n)}})dF_m(r)\right]^m\\ &=(\psi_m(\mathbf{t}))^m.\end{aligned}$$

Donde $\psi_m(\mathbf{t})$ es la función característica de $R_m\mathbf{U}^{(n)}$, con $R_m \sim F_m$ una variable aleatoria no negativa independiente de $\mathbf{U}^{(n)}$. Por lo que $\mathbf{X}$ es infinitamente divisible. $\square$

Las siguiente definiciones nos servirán cuando probemos la propiedad de divisibilidad infinita en las distribuciones elípticas de nuestro interés.

Definición 1.4.2. A la distribución concentrada en un sólo punto $\gamma \in \mathbb{R}^n$ se le conoce como la distribución δ y es denotada por δ_γ.

Teorema 1.4.2. *([20], p.149) Si el vector aleatorio $\mathbf{X}$ con distribución F es infinitamente divisible y F no es una distribución δ, entonces su soporte no está acotado.*

Teorema 1.4.3 ([20])**.** *Si el vector aleatorio $\mathbf{X}$ con función característica ψ es infinitamente divisible, entonces $\psi(\boldsymbol{t})$ no tiene ceros, es decir $\psi(\boldsymbol{t}) \neq 0$ para toda $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^n$.*

Corolario 1.4.1. *Si el vector aleatorio $\mathbf{X}$ con generador característico ϕ es infinitamente divisible, entonces $\phi(x)$ no tiene ceros positivos, es decir $\phi(x) \neq 0$ para toda $x \geq 0$.*

Demostración. Se sigue del Teorema 1.4.3 y de la igualdad $\psi(\mathbf{t}) = \phi(\mathbf{t}'\mathbf{t})$. $\square$

El siguiente teorema es fundamental para la teoría de distribuciones infinitamente divisibles ya que caracteriza, a través de tres elementos, a la función característica de todas las distribuciones infinitamente divisibles.

Teorema 1.4.4. ***(Fórmula de Lévy-Khintchine)*** *Un vector aleatorio $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ con función característica $\psi(\boldsymbol{t})$ es infinitamente divisible si y sólo si existe una terna (A, ν, γ) tal que*

$$\psi(\boldsymbol{t}) = exp\left[-\frac{1}{2}\boldsymbol{t}' A\boldsymbol{t} + i\gamma'\boldsymbol{t} + \int_{\mathbb{R}^n}(e^{i\boldsymbol{t}'\mathbf{x}} - 1 - i\boldsymbol{t}'\mathbf{x}\ \boldsymbol{1}_D(\mathbf{x}))\nu(d\mathbf{x})\right],$$

donde $D = \{\mathbf{x} : |\mathbf{x}| \leq 1\}$, A es una matriz $n \times n$ simétrica no negativa definida, $\gamma \in \mathbb{R}^n$ y ν es una medida en $\mathbb{R}^n$ que satisface:

$$\nu(\{\boldsymbol{0}\}) = 0 \quad y \quad \int_{\mathbb{R}^n}(|\mathbf{x}|^2 \wedge 1)\nu(d\mathbf{x}) < \infty.$$

Capítulo 2

Distribuciones Esféricas y Elípticas

Como se mencionó en el capítulo anterior, en este trabajo se estudiarán las siguientes subfamilias de distribuciones elípticas junto con su divisibilidad infinita:

1. Normal Multivariada.
2. Estable.
3. Uniforme Multivariada.
4. Logística.
5. Tipo Kotz.
6. Pearson tipo VII.
7. t Multivariada.
8. Pearson tipo II.
9. Mezcla Normal Varianza.

Excepto para la distribución Estable, las definiciones se darán en términos de su generador de densidad.

2.1. Normal Multivariada

Definición 2.1.1. El vector aleatorio $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ tiene distribución Normal multivariada con parámetros $\mu \in \mathbb{R}^n$ y Σ matriz definida no negativa de $n \times n$ ($\mathbf{X} \sim N_n(\mu, \Sigma)$), si para cada $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$, la distribución de $\mathbf{t}'\mathbf{X}$ es normal univariada.

Teorema 2.1.1. *Si* $\mathbf{X} \sim N_n(\mu, \Sigma)$ *entonces* $\mathbf{X}$ *tiene función característica dada por*

$$\psi(\boldsymbol{t}) = \exp\left(i\mu'\boldsymbol{t} - \frac{1}{2}\boldsymbol{t}'\Sigma\boldsymbol{t}\right), \quad \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^n.$$

Demostración. Tenemos que $\psi(\mathbf{t}) = E[e^{i\mathbf{t}'\mathbf{X}}] = \psi_{\mathbf{t}'\mathbf{X}}(1)$. Pero por la definición anterior $\mathbf{t}'\mathbf{X}$ tiene distribución normal con media $\mathbf{t}'\mu$ y varianza $\mathbf{t}'\Sigma\mathbf{t}$, por lo que $\mathbf{t}'\mathbf{X} \sim N(\mu'\mathbf{t}, \mathbf{t}'\Sigma\mathbf{t})$, y utilizando la función característica de una normal univariada se obtiene el resultado. □

Una consecuencia del teorema anterior y de la Definición 1.3.2 inciso *i*) es el siguiente corolario.

Corolario 2.1.1. *El generador característico de* $\mathbf{X} \sim N_n(\mu, \Sigma)$ *está dado por*

$$\phi(u) = e^{-u/2}, \quad u \geq 0.$$

Teorema 2.1.2. *Si* $\mathbf{X}$ *es* $N_n(\mu, \Sigma)$ *y* Σ *definida positiva, entonces tiene densidad de la forma*

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)'\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)\right].$$

Corolario 2.1.2. *El generador de densidad de* $\mathbf{X} \sim N_n(\mu, \Sigma)$ *con* Σ *definida positiva está dado por*

$$g(u) = e^{-u/2}.$$

Demostración. Se obtiene del Teorema 2.1.2 y de la Proposición 1.3.1. □

De los Corolarios 2.1.1 y 2.1.2 podemos observar que en la distribución normal multivariada, su generador característico y su generador de densidad coinciden.

2.2. Estable

Existen varias maneras de definir a las distribuciones estables multivariadas, a continuación se presenta la definición dada en [16].

Definición 2.2.1. ([16], p. 93) Se dice que $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ tiene distribución estable si su función característica es como sigue

$$\psi(\mathbf{t}) = \exp(r(\mathbf{t}'\mathbf{t})^{\alpha/2}), \quad 0 < \alpha \leq 2,\ r < 0.$$

La distribución Estable tiene como casos particulares a distribuciones importantes, por ejemplo con $\alpha = 1$, $r = -1$ se obtiene la distribución Cauchy multivariada presentada en [16] y si se tiene $\alpha = 2$, $r = -\frac{1}{2}$ se obtiene la distribución Normal multivariada.

2.3. Uniforme Multivariada

Esta distribución ya fue previamente definida en el Capítulo 1. Recordando la Definición 1.2.2, se dice que $\mathbf{U}^{(n)}$ es un vector aleatorio uniformemente distribuido sobre la esfera unitaria si tiene función de densidad dada por

$$f_{\mathbf{U}^{(n)}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{S_n}, \quad |\mathbf{x}| = 1,$$

donde $S_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ es el área de la esfera unitaria.

La distribución uniforme multivariada es una distribución esférica importante ya que como se mostró en el Corolario 1.2.1, la representación estocástica de cualquier vector aleatorio elíptico es el producto de un vector uniforme y una variable aleatoria no negativa R independiente de $\mathbf{U}^{(n)}$.

2.4. Logística

La distribución logística multivariada ha sido estudiada por diversos autores y a través de diferentes definiciones, la distribución logística elíptica simétrica no tiene ni marginales ni condicionales logísticas (ver [4]), sin embargo, su nombre se debe a que su generador de densidad tiene la forma de una densidad logística univariada.

A continuación se presentan algunos resultados de la distribución logística elíptica simétrica.

Definición 2.4.1 ([16], p.92)**.** Sea $\mathbf{X}$ un vector aleatorio en $\mathbb{R}^n$, se dice que $\mathbf{X}$ tiene distribución logística elíptica simétrica multivariada con parámetros $\mu \in \mathbb{R}^n$ y Σ matriz de $n \times n$ definida positiva, denotado como $\mathbf{X} \sim ML_n(\mu, \Sigma, g)$, si su generador de densidad es de la forma

$$g(u) = C_n \frac{e^{-u}}{(1+e^{-u})^2}, \quad u \geq 0,$$

donde

$$C_n^{-1} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \int_0^\infty y^{n/2-1} \frac{e^{-y}}{(1+e^{-y})^2} dy.$$

Observación 2.4.1. Por practicidad, de aquí en adelante nos referiremos a la distribución logística elíptica simétrica simplemente como distribución logística.

Aunque no se tiene una expresión sencilla para la función característica de un vector con distribución logística, ésta se puede escribir de la siguiente manera.

Proposición 2.4.1. *La función característica del vector aleatorio* $\mathbf{X} \sim ML_n(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}_n)$, $n > 2$, *está dada por:*

$$\psi(\boldsymbol{t}) = C_n \pi^{n/2} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} j^{1-n/2} e^{-\frac{1}{4j}\boldsymbol{t}'\boldsymbol{t}}.$$

Demostración. De acuerdo a la definición de función característica tenemos que

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{t}) &= E[e^{i\mathbf{t}'\mathbf{X}}] \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} C_n e^{i\mathbf{t}'\mathbf{x}} \frac{e^{-\mathbf{x}'\mathbf{x}}}{(1+e^{-\mathbf{x}'\mathbf{x}})^2} d\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Además, con ayuda de la representación en series de Taylor alrededor del cero de la función $f(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$ obtenemos

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1} j x^j, \quad |x| < 1.$$

Ya que $u > 0$ entonces $e^{-u} < 1$, por lo tanto

$$\begin{aligned} f(e^{-u}) &= \frac{e^{-u}}{(1+e^{-u})^2} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1} j e^{-ju}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Sustituyendo (2.2) en (2.1) con $u = \mathbf{x}'\mathbf{x}$, y aplicando el teorema de Fubini obtenemos que

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{t}) &= \int_{\mathbb{R}^n} C_n e^{i\mathbf{t}'\mathbf{x}} \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1} j e^{-j\mathbf{x}'\mathbf{x}} d\mathbf{x} \\ &= C_n \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1} j \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\mathbf{t}'\mathbf{x}} e^{-j\mathbf{x}'\mathbf{x}} d\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Por otro lado, la integral anterior se puede expresar como,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\mathbf{t}'\mathbf{x}} e^{-j\mathbf{x}'\mathbf{x}} d\mathbf{x} = \pi^{n/2} j^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\mathbf{t}'\mathbf{x}} \frac{e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}'(2j\mathbf{I}_n)\mathbf{x}}}{(2\pi)^{n/2}(2j)^{-n/2}} d\mathbf{x}. \tag{2.4}$$

Tomando $\Sigma = \frac{1}{2j}\mathbf{I}_n$, entonces la integral del lado derecho de (2.4) corresponde a la función característica de un vector normal multivariado con media $\mathbf{0}$ y matriz de covarianzas Σ. Por el Teorema 2.1.1 tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\mathbf{t}'\mathbf{x}} e^{-j\mathbf{x}'\mathbf{x}} d\mathbf{x} = \pi^{n/2} j^{-n/2} e^{-\frac{1}{4j}\mathbf{t}'\mathbf{t}}. \tag{2.5}$$

Sustituyendo (2.5) en la ecuación (2.3) obtenemos el resultado. $\square$

Corolario 2.4.1. *Para $n > 4$,*

$$C_n^{-1} = \pi^{n/2}(1 - 2^{2-n/2})\zeta(n/2 - 1),$$

donde $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$.

Demostración. Utilizando que $\psi(\mathbf{0}) = 1$ y por la Proposición 2.4.1 tenemos que

$$\begin{aligned} C_n^{-1} &= \pi^{n/2} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} j^{1-n/2} \\ &= \pi^{n/2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} j^{1-n/2} - 2 \sum_{j=1}^{\infty} (2j)^{1-n/2} \right) \end{aligned} \tag{2.6}$$

La última igualdad se obtiene separando la parte positiva de la negativa y es posible ya que ambas sumas convergen cuando $1 - n/2 < -1$, es decir si $n > 4$ lo cual se cumple por hipótesis. Entonces

$$\begin{aligned} C_n^{-1} &= \pi^{n/2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} j^{1-n/2} - 2^{2-n/2} \sum_{j=1}^{\infty} j^{1-n/2} \right) \\ &= \pi^{n/2} (1 - 2^{2-n/2}) \sum_{j=1}^{\infty} j^{1-n/2} \\ &= \pi^{n/2} (1 - 2^{2-n/2}) \zeta(n/2 - 1). \end{aligned}$$

□

Observación 2.4.2. Para el caso $2 \leq n \leq 4$, C_n^{-1} toma los siguientes valores:

$$C_2^{-1} = \frac{\pi}{2}, \quad C_3^{-1} = \pi^{3/2} \zeta(1/2) \quad \text{y} \quad C_4^{-1} = \pi^2 \ln(2).$$

A continuación se proporciona otra representación del generador característico de la distribución logística obtenida en [22] junto con su demostración. Es importante mencionar que durante la elaboración de los cálculos fue hallado un error tipográfico en el valor de C_n en [22]. Este error fue corregido en el Corolario 2.4.1.

Teorema 2.4.1. *El generador característico del vector aleatorio* $\mathbf{X} \sim ML_n(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}_n)$ *es*

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{4\pi} \right)^k \frac{C_n}{k! C_{n+2k}},$$

donde C_n *es como en el Corolario 2.4.1.*

Demostración. Por el Corolario 1.2.2 y el teorema de Fubini tenemos que el generador característico está dado por

$$\begin{aligned} \phi(x) &= 2\pi^{n/2} \int_0^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(n/2 + k) k!} \left(-\frac{x r^2}{4} \right)^k \right] r^{n-1} g(r^2) dr \\ &= 2\pi^{n/2} C_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma((n+2k)/2) k!} \left(-\frac{x}{4} \right)^k \int_0^{\infty} r^{2k+n-1} \frac{e^{-r^2}}{(1 + e^{-r^2})^2} dr. \end{aligned}$$

Con ayuda de la ecuación (2.2) con $u = r^2$ obtenemos

$$\begin{aligned}\int_0^\infty r^{2k+n-1}\frac{e^{-r^2}}{(1+e^{-r^2})^2}dr &= \int_0^\infty r^{2k+n-1}\sum_{j=1}^\infty(-1)^{j-1}je^{-jr^2}dr\\ &= \sum_{j=1}^\infty(-1)^{j-1}j\int_0^\infty r^{2k+n-1}e^{-jr^2}dr.\end{aligned}$$

Donde el cambio de orden entre la suma y la integral es posible gracias al teorema de Fubini. A través del cambio de variable $t = jr^2$ resulta

$$\int_0^\infty r^{2k+n-1}e^{-jr^2}dr = \frac{1}{2j^{(n+2k)/2}}\int_0^\infty t^{\frac{n+2k}{2}-1}e^{-t}dt.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty r^{2k+n-1}\frac{e^{-r^2}}{(1+e^{-r^2})^2}dr &= \sum_{j=1}^\infty(-1)^{j-1}j\frac{1}{2j^{(n+2k)/2}}\int_0^\infty t^{\frac{n+2k}{2}-1}e^{-t}dt\\ &= \sum_{j=1}^\infty(-1)^{j-1}j\frac{1}{2j^{(n+2k)/2}}\Gamma((n+2k)/2).\end{aligned}$$

De modo que el generador característico se puede expresar como

$$\begin{aligned}\phi(x) &= 2\pi^{n/2}C_n\sum_{k=0}^\infty\frac{1}{\Gamma((n+2k)/2)k!}\left(-\frac{x}{4}\right)^k\sum_{j=1}^\infty(-1)^{j-1}j\frac{1}{2j^{(n+2k)/2}}\Gamma((n+2k)/2)\\ &= C_n\pi^{n/2}\sum_{k=0}^\infty\frac{1}{k!}\left(-\frac{x}{4}\right)^k\sum_{j=1}^\infty(-1)^{j-1}j^{1-(n+2k)/2}\\ &= C_n\sum_{k=0}^\infty\frac{1}{k!}\left(-\frac{x}{4\pi}\right)^k\left[\pi^{(n+2k)/2}\sum_{j=1}^\infty(-1)^{j-1}j^{1-(n+2k)/2}\right]\\ &= C_n\sum_{k=0}^\infty\frac{1}{k!}\left(-\frac{x}{4\pi}\right)^k C_{n+2k}^{-1}\\ &= \sum_{k=0}^\infty\left(-\frac{x}{4\pi}\right)^k\frac{C_n}{k!C_{n+2k}}.\end{aligned}$$

La penúltima desigualdad se obtiene de la ecuación (2.6), esto concluye la prueba. □

2.5. Kotz

Definición 2.5.1. Se dice que $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ tiene distribución simétrica tipo Kotz, denotado por $\mathbf{X} \sim MK_n(\mu, \Sigma)$ si su generador de densidad g es de la forma

$$g(r) = C_n r^{N-1}\exp(-ur^s), \quad u, s > 0,\ 2N + n > 2,$$

donde

$$C_n = \frac{s\Gamma(n/2)u^{(2N+n-2)/2s}}{\pi^{n/2}\Gamma((2N+n-2)/2s)}.$$

Teorema 2.5.1. *El generador característico de la distribución tipo Kotz esta dado por*

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma((2N+n-2)/(2s)+k/s)}{(n/2)^{[k]}\Gamma((2N+n-2)/(2s))} \frac{1}{k!} \left(-\frac{x}{4u^{1/s}}\right)^k,$$

donde $a^{[k]} = \Gamma(a+k)/\Gamma(a)$*, es el símbolo de Pochhamer.*

Demostración. Calculando el generador característico a través del Corolario 1.2.2 y por el teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \int_0^{\infty} 2r^{n-1}\pi^{n/2} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{2k}}{\Gamma((n+2k)/2)k!}\left(-\frac{x}{4}\right)^k\right] C_n r^{2(N-1)} \exp(-ur^{2s})dr \\
&= C_n 2\pi^{n/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma((n+2k)/2)k!}\left(-\frac{x}{4}\right)^k \int_0^{\infty} r^{2k+2N+n-3}\exp(-ur^{2s})dr.
\end{aligned}$$

Ahora bien, con el cambio de variable $t = ur^{2s}$ se tiene $r = \left(\frac{t}{u}\right)^{\frac{1}{2s}}$ y $dr = \frac{1}{2us}\left(\frac{t}{u}\right)^{\frac{1}{2s}-1} dt$, por lo que la integral en la igualdad anterior queda

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} r^{2k+2N+n-3}\exp(-ur^{2s})dr &= \int_0^{\infty} \left(\frac{t}{u}\right)^{\frac{1}{2s}(2k+2N+n-3)} \exp(-t)\frac{1}{2us}\left(\frac{t}{u}\right)^{\frac{1}{2s}-1} dt \\
&= \frac{1}{2s}u^{-\frac{2k+2N+n-2}{2s}} \int_0^{\infty} t^{\frac{2k+2N+n-2}{2s}-1}\exp(-t)dt \\
&= \frac{1}{2s}u^{-\frac{2k+2N+n-2}{2s}} \Gamma\left(\frac{2k+2N+n-2}{2s}\right).
\end{aligned}$$

De esta forma,

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= C_n 2\pi^{n/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma((n+2k)/2)k!}\left(-\frac{x}{4}\right)^k \frac{1}{2s}u^{-\frac{2k+2N+n-2}{2s}}\Gamma\left(\frac{2k+2N+n-2}{2s}\right) \\
&= \frac{C_n\pi^{n/2}}{su^{(2N+n-2)/(2s)}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma((n+2k)/2)k!}\left(-\frac{x}{4}\right)^k u^{-k/s}\Gamma\left(\frac{2k+2N+n-2}{2s}\right).
\end{aligned}$$

Como $C_n = \frac{s\Gamma(n/2)u^{(2N+n-2)/(2s)}}{\pi^{n/2}\Gamma((2N+n-2)/(2s))}$, la ecuación anterior se reduce a

$$\phi(x) = \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma((2N+n-2)/(2s))} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{2k+2N+n-2}{2s}\right)}{\Gamma((n+2k)/2)u^{k/s}k!}\left(-\frac{x}{4}\right)^k. \tag{2.7}$$

Y ya que $\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n/2+k)} = \frac{1}{(n/2)^{[k]}}$, la ecuación (2.7) se simplifica como

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma((2N+n-2)/(2s)+k/s)}{(n/2)^{[k]}\Gamma((2N+n-2)/(2s))} \frac{1}{k!} \left(-\frac{x}{4u^{1/s}}\right)^k.$$

□

2.6. Pearson Tipo VII

La distribución Pearson tipo VII, denotada por $\mathbf{X} \sim MPVII_n(\mu, \Sigma, g)$ incluye ciertas distribuciones importantes, tales como la distribución t multivariada y la Cauchy multivariada definidas en [16].

Definición 2.6.1 ([16] p.81)**.** Un vector aleatorio $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ tiene distribución Pearson Tipo VII multivariada de parámetros μ y Σ si su generador de densidad es de la forma

$$g(t) = C_n(1 + t/m)^{-N}, \quad N > n/2,\ m > 0,$$

donde

$$C_n = (\pi m)^{-n/2} \frac{\Gamma(N)}{\Gamma(N - n/2)}.$$

2.7. t Multivariada

Cuando en la distribución Pearson tipo VII se toma $N = \frac{1}{2}(n + m)$, con m entero positivo, se obtiene una distribución t Multivariada.

Definición 2.7.1. El vector aleatorio $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ tiene distribución t Multivariada con m grados de libertad y parámetros μ, Σ (denotado como $\mathbf{X} \sim Mt_n(m, \mu, \Sigma)$) si cumple con alguna de las siguientes definiciones equivalentes:

1. Su generador de densidad es de la forma

$$g(t) = C_n(1 + t/m)^{-\frac{1}{2}(n+m)}, \quad m \in \mathbb{N},$$

   donde

$$C_n = (\pi m)^{-n/2} \frac{\Gamma((n + m)/2)}{\Gamma(m/2)}.$$

2. Si tiene representación estocástica

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \mu + m^{1/2}\mathbf{Z}/S,$$

   donde $\mathbf{Z}$ y S son independientes, $\mathbf{Z} \sim N_n(\mathbf{0}, \Sigma)$, Σ matriz definida positiva y S^2 tiene distribución ji-cuadrada con m grados de libertad.

2.8. Pearson Tipo II

Definición 2.8.1. El vector aleatorio $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ tiene distribución Pearson Tipo II multivariada, denotado por $\mathbf{X} \sim MPII_n(\mu, \Sigma)$, si tiene generador de densidad g de la forma

$$g(u) = \frac{\Gamma(n/2 + m + 1)}{\Gamma(m + 1)\pi^{n/2}}(1 - u)^m, \quad 0 \leq u \leq 1,\ m > -1.$$

2.9. Mezcla Normal Varianza

Las distribuciones Mezcla Normal Media-Varianza son una clase de modelos generados al introducir aleatoriedad en el vector de medias y en la matriz de covarianzas de un vector con distribución normal multivariada.

Definición 2.9.1. ([8], p. 68) Se dice que un vector aleatorio $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ tiene distribución mezcla normal media-varianza si

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \mu + Y\beta + \sqrt{Y}A\mathbf{W},$$

donde $\mu, \beta \in \mathbb{R}^n$, A es una matriz de $k \times n$ tal que $\Sigma = A'A$ es una matriz simétrica definida positiva, $\mathbf{W} \sim N_k(\mathbf{0}, \mathbf{I}_k)$ y Y es una variable aleatoria no negativa independiente de $\mathbf{W}$ con distribución G.

Equivalentemente, una medida de probabilidad F en $\mathbb{R}^n$ es una mezcla normal media-varianza si

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|y\Sigma|^{1/2}} \int_0^\infty N'_n(\mu + \beta y, y\Sigma)(\mathbf{x})dG(y),$$

donde $N'_n(\mu+\beta y, y\Sigma)(\mathbf{x})$ es la densidad de un vector $\mathbf{X}$ de distribución Normal con media $\mu+\beta y$ y matriz de covarianzas $y\Sigma$ y G es una función de probabilidad no negativa llamada mezclador o función mezcla. También se utilizará la notación $F = N_n(\mu + y\beta, y\Sigma) \circ G$.

Capítulo 3

Divisibilidad Infinita en Distribuciones Elípticas

En este capítulo se prueba la propiedad de divisibilidad infinita de las distribuciones presentadas en el Capítulo 2.

3.1. Normal Multivariada

Proposición 3.1.1. *La distribución Normal Multivariada es infinitamente divisible.*

Demostración. Sea $\mathbf{X} \sim N_n(\mu, \Sigma)$ con función característica $\psi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})$. Por la Proposición 1.3.2, su vector esférico asociado $\mathbf{Y}$ tiene distribución normal estándar, es decir, $\mathbf{Y} \sim N_k(\mathbf{0}, \mathbf{I}_k)$. Además $\mathbf{Y}$ es infinitamente divisible, ya que:

$$\begin{aligned}
\psi_{\mathbf{Y}}(\mathbf{t}) &= \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{t}'\mathbf{t}\right) \\
&= \left(\exp\left(-\frac{\mathbf{t}'\mathbf{t}}{2m}\right)\right)^m \\
&= (\psi_m(\mathbf{t}))^m, \quad m \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

donde $\psi_m(\mathbf{t})$ es la función característica de un vector aleatorio con distribución $N_k(\mathbf{0}, \mathbf{I}_k/m)$, es decir, $\mathbf{Y}$ es infinitamente divisible. Así, por la Proposición 1.4.3 se obtiene que $\mathbf{X}$ es infinitamente divisible. $\square$

Otra forma de probar la divisibilidad infinita de un vector normal multivariado es comparando su función característica $\psi(\mathbf{t}) = \exp(i\mu'\mathbf{t} - \frac{1}{2}\mathbf{t}'\Sigma\mathbf{t})$ con la representación de Lévy-Khintchine. Se verifica que la terna de Lévy-Khintchine se obtiene al definir $A = \Sigma$, $\gamma = \mu$ y a ν como la medida cero, es decir $\nu(C) = 0$ para toda $C \in \mathbb{R}^n$.

3.2. Estable

Proposición 3.2.1. *La distribución estable es infinitamente divisible.*

Demostración. Sea $\mathbf{X}$ vector aleatorio con distribución estable y función característica $\psi(\mathbf{t})$. Por la Definición 2.2.1 tenemos que

$$\psi(\mathbf{t}) = \exp(r(\mathbf{t}'\mathbf{t})^{\alpha/2}), \quad 0 < \alpha \leq 2, \; r < 0.$$

Es decir que para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{t}) =& \exp\left(\frac{r}{m}(\mathbf{t}'\mathbf{t})^{\alpha/2}\right)^m \\ =&(\psi_m(\mathbf{t}))^m,\end{aligned}$$

donde $\psi_m(\mathbf{t})$ es la función característica de una distribución estable. Por lo que la distribución estable sí cumple con la propiedad de divisibilidad infinita.

□

3.3. Uniforme Multivariada

Proposición 3.3.1. *La distribución Uniforme Multivariada no es infinitamente divisible.*

Demostración. Se observa que el soporte de la distribución uniforme sobre la esfera unitaria es acotado. De aquí, por el Teorema 1.4.2 se obtiene que la distribución uniforme no es infinitamente divisible.

□

3.4. Logística

No se ha logrado verificar al divisibilidad infinita de la distribución Logística.

3.5. Kotz

Recordemos que la función hipergeométrica generalizada, está definida como:

$${}_pF_q(a_1, ..., a_p; b_1, ..., b_q; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_1^{[k]} \cdots a_p^{[k]}}{b_1^{[k]} \cdots b_q^{[k]}} \frac{z^k}{k!}, \quad a_1, ..., a_p, b_1, ..., b_q, z \in \mathbb{C}.$$

Proposición 3.5.1. *Para el caso $s = 1$, el generador característico de la distribución Kotz está dado por*

$$\phi(x) = {}_1F_1\left((2N + n - 2)/2; n/2; -\frac{x}{4u}\right),$$

Demostración. Sustituyendo $s = 1$ en la expresión del generador característico dado en el Teorema 2.5.1 y por la definición de función hipergeométrica tenemos:

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma((2N+n-2)/2+k)}{(n/2)^{[k]}\Gamma((2N+n-2)/2)} \frac{1}{k!} \left(-\frac{x}{4u}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((2N+n-2)/2)^{[k]}}{(n/2)^{[k]}} \frac{\left(-\frac{x}{4u}\right)^k}{k!} \\ &= {}_1F_1\left((2N+n-2)/2; n/2; -\frac{x}{4u}\right).\end{aligned}$$

$\square$

El caso $s = 1$ es la distribución original introducida por Kotz [21], a la función hipergeométrica ${}_1F_1$ se le conoce como función hipergeométrica confluente.

Observación 3.5.1. La distribución simétrica tipo Kotz con $N = 1$ y $s = 1$ tiene generador característico de la forma

$$\phi(x) = \exp\left(-\frac{x}{4u}\right).$$

Es decir, la distribución Kotz se reduce a una distribución normal multivariada, la cual se probó en la Proposición 3.1.1 que es infinitamente divisible.

Proposición 3.5.2. *La función ${}_1F_1$ se deriva de la función ${}_2F_1$ a través de*

$${}_1F_1(a; c; z) = \lim_{b\to\infty} {}_2F_1(a, b; c; z/b).$$

Demostración. Por propiedades de la función ${}_2F_1(a, b; c; z)$ se tiene que para $|z| < 1$, la serie que define a ${}_2F_1(a, b; c; z)$ converge uniformemente (ver [13]), entonces

$$\begin{aligned}\lim_{b\to\infty} {}_2F_1(a, b; c; z/b) &= \lim_{b\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{[k]}b^{[k]}}{c^{[k]}} \frac{1}{k!} (z/b)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{[k]}}{c^{[k]}} \frac{1}{k!} z^k \lim_{b\to\infty} \frac{b^{[k]}}{b^k} \quad \text{para } |z| < b.\end{aligned}$$

Ahora bien,

$$b^{[k]} = b(b+1)\cdots(b+k-1) = b^k + P(b),$$

donde $P(b)$ es un polinomio de grado $k-1$. Por lo que

$$\begin{aligned}\lim_{b\to\infty} {}_2F_1(a, b; c; z/b) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{[k]}}{c^{[k]}} \frac{1}{k!} z^k \lim_{b\to\infty} \left(1 + \frac{P(b)}{b^k}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{[k]}}{c^{[k]}} \frac{1}{k!} z^k \\ &= {}_1F_1(a; c; z).\end{aligned}$$

$\square$

Comentario 3.5.1 ([29]). Para la función hipergeométrica ${}_2F_1(a, b; c; z)$ con a entero negativo, $a = -p$, $p \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$ {}_2F_1(-p, b; c; z) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{b^{[k]}}{c^{[k]}} (-z)^k. $$

Es decir, la función hipergeométrica se convierte en un polinomio finito de grado k.

Corolario 3.5.1. *La función hipergeométrica confluente con $a = -p$, $p \in \mathbb{N}$ cumple:*

$$ {}_1F_1(-p; c; z) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{1}{c^{[k]}} (-z)^k $$

Demostración. Usando la Proposición 3.5.2 y el Teorema 3.5.1:

$$ \begin{aligned} {}_1F_1(-p; c; z) &= \lim_{b\to\infty} {}_2F_1(-p, b; c; z/b) \\ &= \lim_{b\to\infty} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{b^{[k]}}{c^{[k]}} (-z/b)^k \\ &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{1}{c^{[k]}} (-z)^k \lim_{b\to\infty} \left(1 + \frac{P(b)}{b^k}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{1}{c^{[k]}} (-z)^k. \end{aligned} $$

Por lo que la función hipergeométrica confluente también se convierte en un polinomio de grado finito para el caso $a = -p$. □

Proposición 3.5.3. *Cuando $s = 1$ el generador característico de la distribución Kotz está dado por*

$$ \phi(x) = \exp\left(-\frac{x}{4u}\right) \sum_{m=0}^{N-1} \binom{N-1}{m} \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n/2+m)} \left(-\frac{x}{4u}\right)^m. $$

Demostración. La transformación de Kummer [29] nos dice que:

$$ {}_1F_1\left((2N+n-2)/2; n/2; -\frac{x}{4u}\right) = \exp\left(-\frac{x}{4u}\right) {}_1F_1\left(-(N-1); n/2; \frac{x}{4u}\right). $$

Además, por la Proposición 3.5.1 y el Corolario 3.5.1 tenemos que

$$ \begin{aligned} \phi(x) &= \exp\left(-\frac{x}{4u}\right) {}_1F_1\left(-(N-1); n/2; \frac{x}{4u}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{x}{4u}\right) \sum_{m=0}^{N-1} \binom{N-1}{m} \frac{1}{(n/2)^{[m]}} \left(-\frac{x}{4u}\right)^m \\ &= \exp\left(-\frac{x}{4u}\right) \sum_{m=0}^{N-1} \binom{N-1}{m} \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n/2+m)} \left(-\frac{x}{4u}\right)^m. \end{aligned} $$

□

Proposición 3.5.4. *Cuando los coeficientes de $F(a;c;x)$, $x \in \mathbb{R}$ cumplen*

$$-n \leq a < -n+1, \quad c > 0.$$

La función $F(a;c;x)$ tiene exactamente n ceros positivos, los cuales son todos simples.

Demostración. Se prueba en [12] a través del número de variaciones de signo en los coeficientes de $F(a;c;x)$ y el teorema de Sturm. □

Proposición 3.5.5. *La distribución simétrica tipo Kotz con $s = 1$, $N > 1$, no es infinitamente divisible.*

Demostración. De la Proposición 3.5.3 tenemos que $\phi(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, si y sólo si

$${}_1F_1\left(-(N-1); n/2; \frac{x}{4u}\right) = 0.$$

Por la Proposición 3.5.4 y por el Corolario 1.4.1, la distribución Kotz con $s = 1$, $N > 1$ tiene ceros por lo que no es infinitamente divisible. □

3.6. Pearson Tipo VII

Proposición 3.6.1. *La distribución Pearson Tipo VII es infinitamente divisible.*

Demostración. Se probará la divisibilidad infinita a través del vector esférico $\mathbf{Y}$ asociado a $\mathbf{X} \sim MPVII_n(m, \mu, \Sigma)$. Por la Proposición 1.3.2 tenemos que $\mathbf{Y} \sim MPVII_n(m, \mathbf{0}, \mathbf{I}_n)$, y utilizando la Definición 2.6.1, tenemos que la densidad de $\mathbf{Y}$ es

$$f(\mathbf{y}) = \frac{\Gamma(N)}{(\pi m)^{n/2}\Gamma(N-n/2)}\left[1 + \frac{\mathbf{y}'\mathbf{y}}{m}\right]^{-N}.$$

Sea $\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{Y}}{\sqrt{m}}$, mostraremos que $\mathbf{Z}$ es infinitamente divisible. Observemos que la densidad de $\mathbf{Z}$ esta dada por

$$g(\mathbf{z}) = \frac{\Gamma(N)}{(\pi)^{n/2}\Gamma(N-n/2)}\left[1 + |\mathbf{z}|^2\right]^{-N}.$$

En efecto, por el teorema de cambio de variable:

$$\begin{aligned}
g(\mathbf{z}) = f(\mathbf{z})\det(\mathbf{J}_z) &= \frac{\Gamma(N)}{(\pi m)^{n/2}\Gamma(N-n/2)}\left[1 + |\mathbf{z}|^2\right]^{-N}\frac{\partial(y_1, y_2, ..., y_n)}{\partial(z_1, z_2, ..., z_n)} \\
&= \frac{\Gamma(N)}{(\pi m)^{n/2}\Gamma(N-n/2)}\left[1 + |\mathbf{z}|^2\right]^{-N}\begin{vmatrix} \sqrt{m} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{m} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{m} \end{vmatrix} \\
&= \frac{\Gamma(N)}{(\pi)^{n/2}\Gamma(N-n/2)}\left[1 + |\mathbf{z}|^2\right]^{-N}.
\end{aligned}$$

En [17] se demuestra que la densidad $g(\mathbf{z}) = \frac{\Gamma(N)}{(\pi)^{n/2}\Gamma(N-n/2)}\left[1+|\mathbf{z}|^2\right]^{-N}$ es infinitamente divisible e incluso se proporciona su representación de Lévy. Pero ya que

$$\mathbf{Y} = \sqrt{m}\mathbf{Z},$$

y la multiplicación por constantes no altera esta propiedad, entonces $\mathbf{Y}$ es infinitamente divisible. Finalmente por la Proposición 1.4.3 también el vector $\mathbf{X}\sim MPVII_n(m,\mu,\Sigma)$ es infinitamente divisible. □

3.7. t Multivariada

Proposición 3.7.1. *La distribución t multivariada es infinitamente divisible.*

Demostración. Este resultado se sigue de que la distribución t es un caso particular de la distribución Pearson Tipo VII con $N = (n+m)/2$, m entero positivo. □

3.8. Pearson Tipo II

Proposición 3.8.1. *La distribución Pearson Tipo II no es infinitamente divisible.*

Demostración. Del mismo modo que en la distribución Uniforme Multivariada, ya que $\mathbf{X} \sim MPII_n(\mu,\Sigma)$ tiene soporte acotado, aplicando el Teorema 1.4.2 se tiene que la distribución Pearson Tipo II no es infinitamente divisible. □

3.9. Mezcla Normal Varianza

El siguiente lema obtenido de [8] presenta las propiedades más importantes de las distribuciones mezcla normal media varianza.

Lema 3.9.1. *Sean G, G_1, G_2 distribuciones de probabilidad,*

a) Si $G = G_1 * G_2$, entonces

$$(N_n(\mu_1+y\beta,y\Sigma)\circ G_1)*(N_n(\mu_2+y\beta,y\Sigma)\circ G_2) = \\ N_n(\mu_1+\mu_2+y\beta,y\Sigma)\circ G.$$

b) Si G es infinitamente divisible, entonces también $N_n(\mu+y\beta,y\Sigma)\circ G$ lo es.

Demostración. *a*) Sea $\mathcal{L}_G(u)$ la transformada de Laplace de G, aplicando el teorema de Fubini tenemos que la función característica de la mezcla $N_n(\mu+\beta y,y\Sigma)\circ G$ se puede expresar como:

$$\begin{aligned}
\psi(\mathbf{t}) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\mathbf{t}'\mathbf{x}} F(d\mathbf{x}) && (3.1)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\mathbf{t}'\mathbf{x}} \int_0^\infty N_n'(\mu+\beta y, y\Sigma)(\mathbf{x}) dG(y) d\mathbf{x}\\
&= \int_0^\infty \left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\mathbf{t}'\mathbf{x}} N_n'(\mu+\beta y, y\Sigma)(\mathbf{x}) d\mathbf{x}\right] dG(y)\\
&= \int_0^\infty e^{i\mathbf{t}'\mu} e^{y(i\mathbf{t}'\beta - \frac{1}{2}\mathbf{t}'\Sigma\mathbf{t})} dG(y)\\
&= e^{i\mathbf{t}'\mu} \int_0^\infty e^{-(\frac{1}{2}\mathbf{t}'\Sigma\mathbf{t} - i\mathbf{t}'\beta)y} dG(y)\\
&= e^{i\mathbf{t}'\mu} \mathcal{L}_G\left(\frac{1}{2}\mathbf{t}'\Sigma\mathbf{t} - i\mathbf{t}'\beta\right). && (3.2)
\end{aligned}$$

Sean $\mathcal{L}_{G_1}(u)$, $\mathcal{L}_{G_2}(u)$ las transformadas de Laplace de G_1, G_2, respectivamente, por el teorema de convolución (ver [24], p. 1020),

$$\mathcal{L}_{G_1 * G_2}(z) = \mathcal{L}_{G_1}(z)\mathcal{L}_{G_2}(z).$$

Sea $F = N_n(\mu_1+\mu_2+\beta y, y\Sigma) \circ G$, $F_i = N_n(\mu_i+\beta y, y\Sigma) \circ G_i$, $i = 1, 2$. Como $G = G_1 * G_2$,

$$\begin{aligned}
\psi_{F_1}(\mathbf{t})\psi_{F_2}(\mathbf{t}) &= e^{i\mathbf{t}'\mu_1}\mathcal{L}_{G_1}\left(\frac{1}{2}\mathbf{t}'\Sigma\mathbf{t} - i\mathbf{t}'\beta\right) e^{i\mathbf{t}'\mu_2}\mathcal{L}_{G_2}\left(\frac{1}{2}\mathbf{t}'\Sigma\mathbf{t} - i\mathbf{t}'\beta\right)\\
&= e^{i\mathbf{t}'(\mu_1+\mu_2)}\mathcal{L}_G\left(\frac{1}{2}\mathbf{t}'\Sigma\mathbf{t} - i\mathbf{t}'\beta\right)\\
&= \psi_F(\mathbf{t}),
\end{aligned}$$

por lo que $F_1 * F_2 = F$.

b) Dado que G es infinitamente divisible, tenemos que para cualquier $m \in \mathbb{N}$ existe una distribución G_m, tal que

$$G = G_m^{*m}.$$

Por el inciso anterior,

$$N(\mu+\beta y, y\Sigma) \circ G = (N(\mu/m+\beta y, y\Sigma) \circ G_m)^{*m}.$$

Es decir, $N(\mu+\beta y, y\Sigma) \circ G$ es infinitamente divisible.

□

Observación 3.9.1. Una distribución mezcla normal media-varianza $F = N_n(\mu+y\beta, y\Sigma) \circ G$ tiene distribución elíptica si y sólo si $\beta = \mathbf{0}$, esto se puede observar de la Definición 1.3.2 inciso i). A este tipo de distribuciones se les llama distribución mezcla normal varianza, pues la media no es afectada por la mezcladora.

El siguiente corolario nos provee una manera de verificar la divisibilidad infinita de una mezcla normal varianza a través de la divisibilidad infinita de la distribución mezcla.

Corolario 3.9.1. *La distribución mezcla normal varianza es infinitamente divisible si G es infinitamente divisible. El recíproco no necesariamente es cierto.*

Demostración. Por el inciso b) del Lema 3.9.1 para $\beta = 0$, tenemos que si G es infinitamente divisible, entonces $F = N_n(\mu, y\Sigma) \circ G$ es una distribución mezcla normal varianza que cumple la propiedad de divisibilidad infinita. □

Como ya se mencionó, la afirmación contraria del corolario anterior no siempre es verdad, es decir, se puede tener un mezclador que no sea infinitamente divisible y sin embargo obtener una mezcla normal varianza infinitamente divisible. El siguiente ejemplo ilustra este hecho, su construcción fue motivada por un ejemplo dado en [7].

Ejemplo 3.9.1. *Existen distribuciones mezcla normal varianza infinitamente divisibles cuyo mezclador no es infinitamente divisible.*

Definamos a la función $H(x)$ como:

$$\begin{aligned} H(x) &= 0 & x &< 1 \\ &= .26 & 1 \leq x &< 2 \\ &= .52 & 2 \leq x &< 3 \\ &= .48 & 3 \leq x &< 4 \\ &= .74 & 4 \leq x &< 5 \\ &= 1.0 & x &\geq 5. \end{aligned}$$

La función H satisface las condiciones siguientes:

i) H no es una distribución: Ya que no es una función monótona no decreciente.

ii) $H * H$ es una distribución: Tenemos que H es una función simple ya que

$$H = .26 \cdot \mathbf{1}_{[1,2)} + .52 \cdot \mathbf{1}_{[2,3)} + .48 \cdot \mathbf{1}_{[3,4)} + .74 \cdot \mathbf{1}_{[4,5)} + \mathbf{1}_{[5,\infty)}.$$

Además, si $a \leq t - x < b$ entonces $t - b < x \leq t - a$, con $a, b \in \mathbb{R}$, por lo que la función $H(t - x)$ se puede expresar como

$$\begin{aligned} H(t-x) = 0 \cdot \mathbf{1}_{(t-1,\infty)}(x) &+ .26 \cdot \mathbf{1}_{(t-2,t-1]}(x) + .52 \cdot \mathbf{1}_{(t-3,t-2]}(x) \\ &+ .48 \cdot \mathbf{1}_{(t-4,t-3]}(x) + .74 \cdot \mathbf{1}_{(t-5,t-4]}(x) + \mathbf{1}_{(-\infty,t-5]}(x). \end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{aligned}
H * H(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} H(t-x)dH(x) \\
&= .26\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_{(t-2,t-1]}(x)dH(x) + .52\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_{(t-3,t-2]}(x)dH(x) \\
&\quad + .48\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_{(t-4,t-3]}(x)dH(x) + .74\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_{(t-5,t-4]}(x)dH(x) \\
&\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_{(-\infty,t-5]}(x)dH(x) \\
&= .26[H(t-1) - H(t-2)] + .52[H(t-2) - H(t-3)] \\
&\quad + .48[H(t-3) - H(t-4)] + .74[H(t-4) - H(t-5)] + H(t-5).
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
H * H(t) = &.26\left[H(t-1) + H(t-2) + H(t-4) + H(t-5)\right] \\
&- .04H(t-3).
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Ahora comprobaremos que $H * H(t)$ es una distribución, calculándola de manera explícita obtenemos:

$$\begin{aligned}
H * H(t) &= 0 && t < 2 \\
&= .0676 && 2 \le t < 3 \\
&= .2028 && 3 \le t < 4 \\
&= .2496 && 4 \le t < 5 \\
&= .364 && 5 \le t < 6 \\
&= .636 && 6 \le t < 7 \\
&= .7504 && 7 \le t < 8 \\
&= .7972 && 8 \le t < 9 \\
&= .9324 && 9 \le t < 10 \\
&= 1 && t \ge 10.
\end{aligned}$$

De la expresión anterior se observa que $H * H(t)$ es una función continua por la derecha, monótona no decreciente, que cumple

$$\lim_{t\to-\infty} H * H(t) = 0, \qquad \lim_{t\to+\infty} H * H(t) = 1.$$

Así, se tiene que $H * H$ es función de distribución aún cuando H no lo sea.

iii) $\int_0^\infty (2\pi u)^{-\frac{n}{2}} \exp(-|\mathbf{x}|^2/(2u))dH(u)$ es una densidad: Verifiquemos que es no negativa. Ya que H es una función simple con saltos en $1, 2, 3, 4, 5$, se tiene $H(u) - H(u^-) = 0$

para cualquier $u \neq 1, 2, 3, 4, 5$, es decir que la función deseada se reduce a

$$\begin{aligned}\int_0^\infty & (2\pi u)^{-\frac{n}{2}} \exp(-|\mathbf{x}|^2/(2u))dH(u) \\ &= \sum_{u=1}^{5} (2\pi u)^{-\frac{n}{2}} \exp(-|\mathbf{x}|^2/(2u))[H(u) - H(u^-)].\end{aligned}$$

Definamos la función $h(u) = (2\pi u)^{-\frac{n}{2}} \exp(-|\mathbf{x}|^2/(2u))[H(u) - H(u^-)]$, tenemos que $(2\pi u)^{-\frac{n}{2}}$ $\exp(-|\mathbf{x}|^2/(2u)) > 0$ para toda $u = 1, ..., 5$ por lo que el único término negativo de la suma se da cuando $u = 3$.

Por otro lado, ya que las funciones

$$f(u) = (2\pi u)^{-\frac{n}{2}} \text{ y } g(u) = \exp(-|\mathbf{x}|^2/(2u)$$

son decrecientes, su producto también lo es. Es decir, $f(2)g(2) > f(3)g(3)$, y como $H(2) - H(2^-) = .26 > H(3) - H(3^-) = -.04$ se tiene que

$$\begin{aligned}h(2) + h(3) =& f(2)g(2)[H(2) - H(2^-)] + f(3)g(3)[H(3) - H(3^-)] \\ >& 0.\end{aligned}$$

Ya que la suma de estos dos términos es positiva y todos los demás términos son positivos,

$$\int_0^\infty (2\pi u)^{-\frac{n}{2}} \exp(-|\mathbf{x}|^2/(2u))dH(u) \geq 0.$$

Para concluir que $\int_0^\infty (2\pi u)^{-\frac{n}{2}} \exp(-|\mathbf{x}|^2/(2u))dH(u)$ es una densidad, verificamos que integra 1 sobre todo $\mathbb{R}^n$. Sean H^+ y H^- la parte positiva y negativa, respectivamente, de H. Entonces $H = H^+ - H^-$, por lo que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty & (2\pi u)^{-\frac{n}{2}} \exp(-|\mathbf{x}|^2/(2u))dH(u)d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty (2\pi u)^{-\frac{n}{2}} \exp(-|\mathbf{x}|^2/(2u))dH^+(u)d\mathbf{x} \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty (2\pi u)^{-\frac{n}{2}} \exp(-|\mathbf{x}|^2/(2u))dH^-(u)d\mathbf{x}\end{aligned}$$

Dado que $(2\pi u)^{-\frac{n}{2}} \exp(-|\mathbf{x}|^2/(2u)) \geq 0$, con ayuda del teorema de Fubini:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty & (2\pi u)^{-\frac{n}{2}} \exp(-|\mathbf{x}|^2/(2u)) dH(u) d\mathbf{x} \\
&= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi u)^{-\frac{n}{2}} \exp(-|\mathbf{x}|^2/(2u)) d\mathbf{x} dH^+(u) \\
&\quad - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi u)^{-\frac{n}{2}} \exp(-|\mathbf{x}|^2/(2u)) d\mathbf{x} dH^-(u) \\
&= \int_0^\infty dH^+(u) - \int_0^\infty dH^-(u) \\
&= \int_0^\infty dH(u) \\
&= \sum_{u=1}^{5} [H(u) - H(u^-)] \\
&= \sum_{u=1}^{5} [H(u) - H(u-1)] \\
&= H(5) - H(0) = 1.
\end{aligned}$$

Por lo que se verifica que la función dada es densidad.

Ahora, definamos a la función H^{*0} como sigue

$$H^{*0}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Se verificará que la función $H^k(x)$ es una distribución para cualquier $k \geq 2$. Ya se demostró para $k = 2$, ahora para $k = 3$ tenemos:

$$\begin{aligned}
H^{*3}(t) &= H * (H * H(t)) \\
&= H * (.26\,[H(t-1) + H(t-2) + H(t-4) + H(t-5)] - .04H(t-3)) \\
&= .26\,[H * H(t-1) + H * H(t-2) + H * H(t-4) + H * H(t-5)] - .04H * H(t-3))
\end{aligned}$$

Haciendo uso de $H * H(t)$, llegamos a que la forma explícita de $H^{*3}(t)$ es:

$$\begin{aligned}
H^{*3}(t) =& 0 && t < 3\\
=& .017576 && 3 \leq t < 4\\
=& .070304 && 4 \leq t < 5\\
=& .11492 && 5 \leq t < 6\\
=& .169 && 6 \leq t < 7\\
=& .32032 && 7 \leq t < 8\\
=& .463528 && 8 \leq t < 9\\
=& .536472 && 9 \leq t < 10\\
=& .67968 && 10 \leq t < 11\\
=& .831 && 11 \leq t < 12\\
=& .88508 && 12 \leq t < 13\\
=& .929696 && 13 \leq t < 14\\
=& .982424 && 14 \leq t < 15\\
=& 1 && t \geq 15.
\end{aligned}$$

Por lo que $H^{*3}(t)$ es distribución. Por otro lado, $H^{*k}(t)$ se puede ver como:

$$H^{*k}(t) = \begin{cases} (H^{*2})^{l}(t), & k = 2l,\ l \in \mathbb{N}. \\ (H^{*2})^{l-1} * (H^{*3})(t), & k = 2l+1,\ l \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Ya que la convolución de distribuciones es una distribución entonces $H^{*k}(t)$ es distribución para toda $k \geq 2$.

Se define a la función mezcla como sigue. Sea

$$G(x) = e^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (k!)^{-1} H^{*k}(x).$$

Veamos que $G(x)$ es distribución:

$i)$ Ya que H^{*k} es continua por la derecha para toda $k = 0, 1, ...$ y $G(x)$ se puede ver como combinación lineal de la función H^{*k}, se cumple la continuidad por la derecha de $G(x)$.

$ii)$ Dado que H^{*k} es distribución para $k \geq 2$, estas funciones son no decrecientes, además por la definición de H^{*0}, esta función también es no decreciente, por lo que sólo habría que verificar que no se pierde esta propiedad cuando $k = 1$.

Ya que $H(x)$ es no decreciente excepto del intervalo $[2, 3)$ al $[3, 4)$, definimos $2 \leq x_1 < 3$ y $3 \leq x_2 < 4$ y vemos que

$$H(x_1) + \frac{1}{2} H^{*2}(x_1) = .52 + \frac{1}{2}(.0676) = .5538 \text{ y}$$

$$H(x_2) + \frac{1}{2}H^{*2}(x_2) = .48 + \frac{1}{2}(.1014) = .5814$$

De manera general, $H(x_1) + \frac{1}{2}H^{*2}(x_1) \leq H(x_2) + \frac{1}{2}H^{*2}(x_2)$ para cualquier $x_1 \leq x_2$. Por lo que G es no decreciente.

iii) Ya que $\lim_{x\to-\infty} H^{*k}(x) = 0$, para $k = 0, 1, ...,$ y $\sum_{k=0}^{\infty} |(k!)^{-1}H^{*k}(x)| \leq \sum_{k=0}^{\infty}(k!)^{-1} < \infty$, podemos intercambiar el límite y la sumatoria de forma que

$$\lim_{x\to-\infty} G(x) = e^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(k!)^{-1}(0) = 0.$$

Por el mismo argumento y ya que $\lim_{x\to+\infty} H^{*k}(x) = 1$, para $k = 0, 1, ...,$ se tiene

$$\lim_{x\to+\infty} G(x) = e^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(k!)^{-1}(1)^k = e^{-1}e = 1.$$

Así, obtenemos que el mezclador $G(x)$ es una función de distribución.

Proposición 3.9.1. *Sea* $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ *un vector aleatorio con distribución mezcla normal varianza* F *y mezcladora* $U \sim G$*, entonces su función característica esta dada por:*

$$\psi(\boldsymbol{t}) = e^{i\boldsymbol{t}'\mu}\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{t}'\Sigma\boldsymbol{t}u}dG(u).$$

Demostración. Se obtiene directamente de la ecuación (3.2) con β=0. □

Utilizaremos la proposición anterior con $\mu = \mathbf{0}$ y $\Sigma = \mathbf{1}_{n\times n}$ para calcular la función característica del vector aleatorio $\mathbf{X}$ con mezclador G y a partir de la forma de ésta, se verificará que $\mathbf{X}$ es infinitamente divisible.

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{t}) &= \int_0^{\infty} \exp(-\mathbf{t}'\mathbf{t}u/2)dG(u)\\ &= e^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(k!)^{-1}\int_0^{\infty}\exp(-\mathbf{t}'\mathbf{t}u/2)dH^{*k}(u),\end{aligned}$$

donde la suma y la integral se pueden intercambiar ya que $\exp(x)$ es una función no negativa. Por propiedades de convolución de medidas tenemos que

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{t}) &= e^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(k!)^{-1}\left(\int_0^{\infty}\exp(-\mathbf{t}'\mathbf{t}u/2)dH(u)\right)^k\\ &= \exp\left[\int_0^{\infty}\exp(-\mathbf{t}'\mathbf{t}u/2)dH(u) - 1\right].\end{aligned}$$

Por la condición *iii*) de H sabemos que $\int_{\mathbb{R}^+}(2\pi u)^{-\frac{n}{2}}\exp(-|\mathbf{x}|^2/(2u))dH(u)$ es una densidad sobre $\mathbb{R}^n$, además tomando U $= u$ tenemos que $\mathbf{X}\sim N_n(\mathbf{0},u\mathbf{I}_n)$, por lo tanto

$$\begin{aligned}E[e^{i\mathbf{t}'\mathbf{X}}] =&E[\cos(\mathbf{t}'\mathbf{X})]+iE[\mathrm{sen}(\mathbf{t}'\mathbf{X})]\\ =&e^{-\frac{1}{2}\mathbf{t}'\mathbf{t}u}.\end{aligned}$$

Igualando las partes reales e imaginarias obtenemos $E[\cos(\mathbf{t}'\mathbf{X})]=e^{-\frac{1}{2}\mathbf{t}'\mathbf{t}u}$. De aquí que la función característica de $\mathbf{X}$ se puede ver como

$$\psi(\mathbf{t})=\exp\left[\int_{\mathbb{R}^n}(\cos(\mathbf{t}'\mathbf{x})-1)(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_0^\infty u^{-\frac{n}{2}}\exp(-|\mathbf{x}|^2/(2u))dH(u)d\mathbf{x}\right].$$

Tomando los valores

$$A=\mathbf{0}_{n\times n},\quad \gamma=\mathbf{0}_{n\times 1},\quad \text{y}\quad \nu(d\mathbf{x})=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_0^\infty u^{-\frac{n}{2}}\exp(-|\mathbf{x}|^2/(2u))dH(u)d\mathbf{x},$$

verificamos que la medida ν satisface $\nu(\{\mathbf{0}\})=0$ y

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}(|\mathbf{x}|^2\wedge 1)\nu(d\mathbf{x})=&\int_{\mathbb{R}^n}(|\mathbf{x}|^2\wedge 1)(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_0^\infty u^{-\frac{n}{2}}\exp(-|\mathbf{x}|^2/(2u))dH(u)d\mathbf{x}\\ \leq&\int_{\mathbb{R}^n}(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_0^\infty u^{-\frac{n}{2}}\exp(-|\mathbf{x}|^2/(2u))dH(u)d\mathbf{x}\\ <&\infty.\end{aligned}$$

La última desigualdad dado que $(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_0^\infty u^{-\frac{n}{2}}\exp(-|\mathbf{x}|^2/(2u))dH(u)$ es densidad. Por la fórmula de Lévy-Khintchine tenemos que $\mathbf{X}$ es infinitamente divisible, pero $G(x)$ no es infinitamente divisible ya que procediendo de manera similar al cálculo de la función característica de la mezcla, tenemos que

$$\begin{aligned}\psi_G(t)=&\int_0^\infty\exp(itu)dG(u)\\ =&e^{-1}\sum_{k=0}^\infty\frac{1}{k!}\int_0^\infty\exp(itu)dH^{*k}(u)\\ =&e^{-1}\sum_{k=0}^\infty\frac{1}{k!}\left(\int_0^\infty\exp(itu)dH(u)\right)^k\\ =&\exp\left[\int_0^\infty\exp(itu)dH(u)-1\right].\end{aligned}$$

Por lo que H es la medida de la representación de Lévy-Khintchine de la función característica de G, pero H no es una distribución, por lo que G no es infinitamente divisible.

Conclusiones

Los procesos de Lévy juegan un papel importante en diferentes áreas de la ciencia, como son la física, ingeniería, economía, ciencias actuariales y matemáticas financieras [2]. Conocer si cierta distribución de probabilidad cumple con la propiedad de divisibilidad infinita es de gran utilidad ya que, a través de la fórmula de Lévy-Khintchine y de su función característica, es posible encontrar la terna que determina de manera única al proceso de Lévy correspondiente.

Esta relación motivó el presente trabajo de tesis, cuyo objetivo es verificar la divisibilidad infinita de ciertas clases de distribuciones elípticas elegidas por su importancia, estas fueron:

1. Normal Multivariada.
2. Estable.
3. Uniforme Multivariada.
4. Logística.
5. Tipo Kotz.
6. Pearson tipo VII.
7. t Multivariada.
8. Pearson tipo II.
9. Mezcla Normal Varianza.

Cabe recalcar que se utilizaron las definiciones de las distribuciones dadas en [16]. En el primer y segundo capítulo se desarrolló la teoría necesaria para lograr el objetivo de la tesis, dentro de estos capítulos se encuentran algunas de las aportaciones más importantes, tales como:

El Teorema 1.4.1, en donde se demuestra que probar la divisibilidad infinita de distribuciones elípticas nos asegura esta propiedad para el generador característico $\phi(t^2)$.

La Proposición 1.4.3, que nos indica que probar la divisibilidad infinita en un vector elíptico es equivalente a probar la divisibilidad infinita de su vector esférico asociado.

La Proposición 1.4.4, donde nos muestra que si la variable generadora R de un vector esférico es infinitamente divisible, entonces el vector $\mathbf{X}$ también lo es.

El resultado principal de este trabajo fue la prueba de divisibilidad infinita de las siguientes distribuciones: Normal multivariada, Estable, Pearson tipo VII, t Multivariada. Para las distribuciones Normal y Estable se probó que sus funciones características cumplen con la definición de divisibilidad infinita, tomando los parámetros adecuados, mientras que para la Pearson tipo VII se tuvo que recurrir a un cambio de variable y a una demostración hecha en [17]. La demostración de la divisibilidad infinita de la t Multivariada fue inmediata, ya que es un caso particular de la Pearson tipo VII.
También se probó que las distribuciones Mezcla Normal Varianza son infinitamente divisibles cuando su función mezcla lo es, recalcando que el recíproco no es necesariamente cierto, se presentó un ejemplo en el que la función mezcla no es infinitamente divisible y sin embargo da lugar a una distribución Mezcla Normal Varianza con esta propiedad.

Además, se verificó que algunas de las distribuciones presentadas no son infinitamente divisibles, estas fueron las distribuciones: Uniforme Multivariada, Kotz y Pearson tipo II. Las distribuciones Uniforme y Pearson tipo II se demostraron de igual manera, observando que ambos tienen un soporte acotado y concluyendo con el Teorema 1.4.2. Para la distribución tipo Kotz se encontró una expresión de su función característica y se probó, para un valor particular de uno de sus parámetros, que no era infinitamente divisible.

Por último, se hallaron dos expresiones para la función característica de la distribución Logística, sin embargo no se logró aceptar o rechazar la divisibilidad infinita de esta distribución.

Bibliografía

[1] Andreas E. Kyprianou (2006) *Introductory Lectures on Fluctuations of Lévy Processes with Applications*, Springer.

[2] Antonis Papapantoleon (2000) *An Introduction to Lévy Processes with Applications in Finance*, Mathematics Subject Classification.

[3] Arnaldo A. Rebolledo Peba (2013) *Un Modelo GARCH Multivariado Elíptico y su aplicación al Riesgo en Portafolios*, Tesis.

[4] Barry C. Arnorld (1996) *Distributions with Logistic Marginals and/or Conditionals*, Distributions with Fixed Marginals and Related Topics IMS Lecture Notes - Monograph Series Vol. 28.

[5] Bruno De Finetti (1929) *Sulle funzioni ad incremento aleatorio*, Rend. Acc. Naz. Lincei. 10, 163-168.

[6] Douglas Kelker (1970) *Distribution Theory of Spherical Distributions and a Location-Scale Parameter Generalization*, The Indian Journal of Statistics, Serie A, Vol. 32, No. 4, 419-430.

[7] Douglas Kelker (1971) *Infinite Divisibility and Variance Mixtures of the Normal Distribution*, The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 42, No. 2, p. 802-808.

[8] Ernst August Frhr. v. Hammerstein (2010), *Generalized Hyperbolic Distributions: Theory and Applications to CDO pricing*, Tesis.

[9] F.W. Steutel (1979), *Infinite Divisibility in Theory and Practice*, Scandinavian Journal of Statistics.

[10] G. Samorodnitsky, M.S. Taqqu (1994), *Stable Non-Gaussian Random Processes*, Chapman & Hall.

[11] Geoffrey S. Watson (1984) *Statistics on Spheres*, Wiley-Interscience.

[12] H. Skovgaard (1953) *Note on the Number of Real Zeros of the Confluent Hypergeometric Function F(a;b;x)*, Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 448-452.

[13] HERBERT BUCHHOLZ (1969) *The Confluent Hypergeometric Function*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[14] JENSEN, D.R. (1985) *Multivariate Distributions*, Encyclopedio of Statistical Sciences, 6, (eds S., Kotz, N.L., Johnson, and C.B. Read), Wiley, pp. 43-55.

[15] JOEL OWEN, RAMON RABINOVITCH (1983) *On the Class of Elliptical Distributions and their Applications to the Theory of Portfolio Choice*, The Journal of Finance.

[16] KAI-TAI FANG, SAMUEL KOTZ, KAI WANG NG (1990) *Symmetric Multivariate and Related Distributions*, Chapman and Hall.

[17] KATSUO TAKANO (1989) *The Lévy Representation of the Characteristic Function of the Probability Density* $\Gamma(m+\frac{d}{2})\{\pi^{d/2}\Gamma(m)\}^{-1}(1+|x|^2)^{-m-d/2}$, Bull. Fac. Sci., Ibaraki Univ., No. 21.

[18] KATSUO TAKANO (1994) *On Bessel equations and the Lévy representation of the multivariate t distribution*, Ibaraki University.

[19] KATSUO TAKANO (1994) *On Infinitely Divisible Distributions of Modified Bessel Functions*, Bull. Fac. Sci., Ibaraki Univ., No. 26.

[20] KEN-ITI SATO (1999) *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, Cambridge University Press.

[21] KOTZ, S. (1975) *Multivariate Distributions at a Cross-Road*, Statistical Distributions in Scientific Work, J.K. Ord, D. Reidel Publ. Co.

[22] LI, RUN-ZE (1994) *The Characteristic Functions of Some Subclasses of Spherical Distributions*, Chinese Journal of Applied Probability and Statistics Vol. 10 No. 3, pp. 290-296.

[23] MARTIN HAUGH (2010) *Multivariate Distributions and Dimension Reduction Techniques*, IEOR E4602: Quantitative Risk Management.

[24] MILTON ABRAMOWITZ, IRENE A. STEGUN (1972) *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, National Bureau of Standards.

[25] OLE E. BARNDORFF-NIELSEN, THOMAS MIKOSCH, SIDNEY I. RESNICK (2001) *Lévy Processes Theory and Applications*, Springer.

[26] R. C. GRIFFITHS (1970) *Infinitely Divisible Multivariate Gamma Distributions*, Springer.

[27] R. PIZIAK, P. L. ODELL (1999) *Full Rank Factorization of Matrices*, Mathematics Magazine Vol. 72, No. 3, p. 193-201.

[28] Samuel Kotz, Saralees Nadarajah (2004) *Multivariate t Distributions and Their Applications*, Cambridge University Press.

[29] Z.X. Wang, D.R. Guo (1989) *Special Functions*, World Scientific Publishing Co.