



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE YUCATÁN
FACULTAD DE MATEMÁTICAS

**Tamaño de muestra para validar modelos
con la técnica de regresión lineal, por medio
de intervalos y región de confianza**

TESIS

en opción al grado de:

MAESTRÍA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTADA POR

L.A. Nayeli Sabina Collí Ventura

DIRIGIDA POR

Dr. Jorge Armando Argáez Sosa

M.C. Salvador Medina Peralta

M.C. Luis Colorado Martínez

MÉRIDA, YUCATÁN, MÉXICO, NOVIEMBRE 2016

*A Dios que me dio la vida,
A mi esposo que ha estado a mi lado animándome y
ayudándome en todo,
A mis papás y abuelas que me han cuidado y apoyado,
A mis asesores que me apoyaron y creyeron en mi,
A mi hermano odioso por sus palabras tan oportunas.*

Agradecimientos

M. en C. Salvador Medina Peralta, Dr. Jorge Armando Argáez Sosa y M. en C. Luis Colorado Martínez, asesores, por su ayuda, guía, paciencia y por el tiempo y consejos que me dieron durante la realización de este trabajo.

M. en C. María Diódora Kantún Chim quien ayudó a mejorar este trabajo.

A mis padres **María Savina Ventura Uicab** y **Ricardo Antonio Collí Rivas** y a mi abuela **Isabel Rivas Caamal** y bisabuela **Candelaria Caamal Vda. de Rivas** por todo lo que hicieron para que pudiera llegar hasta este punto, que aunque una de ellas ya no esté presente fue parte fundamental para que yo siguiera adelante.

A mi novio, ahora esposo **Rodrigo Cuitún Coronado** por toda su ayuda para poder entrar a la maestría, por su paciencia al explicarme las cosas cuando no entendí, por todo el apoyo brindado para poder finalizar este proyecto y por haber creído en que soy capaz de hacer las cosas cuando yo no lo hacía.

A mis amigos, **Yare**, por sus palabras de aliento y preocupación por acabar, y **Enrique** por las veces que me recordó no dejarme vencer, que todo problema tiene solución solo tienes que insistir para encontrar la forma de resolverlo y que terminar este trabajo es un paso más para mejores oportunidades.

A todos ellos, ¡GRACIAS!.

Índice general

Agradecimientos	II
Resumen	1
1 Introducción	3
2 La técnica de regresión lineal en la validación de modelos	7
2.1 Proceso de modelación	7
2.2 Clasificación de los modelos matemáticos	10
2.3 Validación del modelo	11
2.3.1 Valoración subjetiva	12
2.3.2 Técnicas visuales	12
2.3.3 Medidas de desviación	13
2.3.4 Pruebas estadísticas	15
2.4 La técnica de regresión	18
2.4.1 Prueba de Brown-Mood	21
3 Tamaño de muestra para validar modelos usando regresión lineal	23
3.1 Tamaño de muestra usando el enfoque de pruebas de hipótesis (Colosimo <i>et al.</i> , 2007)	24
3.2 Tamaño de muestra bajo enfoque de intervalos de confianza	30
3.2.1 Tamaño de muestra para inferir β_1 de manera independiente	31
3.2.2 Tamaño de muestra para inferir β_0 de manera independiente	33
3.3 Tamaño de muestra para inferir β_0 y β_1 de manera conjunta	35
3.4 Análisis de funciones para obtener el tamaño de muestra	43

4	Estudio de simulación	47
4.1	Funciones para la simulación	49
4.2	Condiciones para la obtención de los tamaños de muestra	50
4.3	Evaluando la eficiencia de los métodos	50
4.4	Resultados de la simulación	53
4.4.1	Tamaños de muestra Promedio, Máximo y Conjunto	53
4.4.2	Eficiencia de los métodos Promedio, Máximo y Conjunto	66
4.4.3	Comparando los resultados para $R^2 = 0.80, 0.85, 0.90$ y 0.95	77
5	Caso de estudio	87
6	Conclusiones	91
7	Recomendaciones	94
A	Programas en R	95
B	Otros resultados del estudio de simulación	107
B.1	$R^2 = 0.85$	107
B.2	$R^2 = 0.90$	136
B.3	$R^2 = 0.95$	149
B.4	Comparaciones de R^2	160
	Bibliografía	175

Índice de figuras

2.1	Clasificación general de modelos matemáticos	10
2.2	Modelo exacto	19
3.1	Región de Confianza para β_0 y β_1	38
3.2	Cota para el error de estimación	39
3.3	Región de confianza dentro del límite	40
3.4	Función para n_{β_0}	44
3.5	Función para n_{β_1}	44
3.6	Función para n conjunta	46
4.1	Gráficos de caja para los tamaños de muestra promedio, máximo y conjunto correspondientes a la cota 0.1	54
4.2	Gráficos de caja para los tamaños de muestra promedio, máximo y conjunto correspondientes a la cota 0.2	54
4.3	Gráficos de caja para los tamaños de muestra promedio, máximo y conjunto correspondientes a la cota 0.5	55
4.4	Gráficos de caja para los tamaños de muestra promedio, máximo y conjunto correspondientes a la cota 0.8	55
4.5	Gráficos de caja para los tamaños de muestra promedio, máximo y conjunto correspondientes a la cota 1	56
4.6	Gráficos de caja para los tamaños de muestra promedio, máximo y conjunto correspondientes a la cota 2	56

4.7	Gráficos de caja para los tamaños de muestra de la cota 0.1, muestra piloto de 10 a 30	57
4.8	Gráficos de caja para los tamaños de muestra de la cota 0.1, muestra piloto de 15 a 30	58
4.9	Medias y medianas aumentando la muestra piloto, $R^2 = 0.80$	61
4.10	Medias y medianas aumentando la muestra piloto, $R^2 = 0.85$	62
4.11	Medias y medianas aumentando la muestra piloto, $R^2 = 0.90$	63
4.12	Medias y medianas aumentando la muestra piloto, $R^2 = 0.95$	64
4.13	Medias y medianas aumentando la cota, $R^2 = 0.80$	65
4.14	Gráficos de caja para la eficiencia del error de estimación del método promedio, $R^2 = 0.80$	66
4.15	Gráficos de caja para la eficiencia del error de estimación del método máximo, $R^2 = 0.80$	67
4.16	Gráficos de caja para la eficiencia del error de estimación del método conjunto, $R^2 = 0.80$	67
4.17	Gráficos de caja para la eficiencia del parámetro del método promedio, $R^2 = 0.80$	68
4.18	Gráficos de caja para la eficiencia del parámetro del método máximo, $R^2 = 0.80$	68
4.19	Gráficos de caja para la eficiencia del parámetro del método conjunto, $R^2 = 0.80$	69
4.20	Gráficos de caja para la eficiencia del error de estimación del método máximo aumentando la cota, $R^2 = 0.80$	70
4.21	Gráficos de caja para la eficiencia del error de estimación del método conjunto aumentando la cota, $R^2 = 0.80$	71
4.22	Gráficos de caja para la eficiencia del error de estimación del método máximo aumentando la cota, $R^2 = 0.95$	72
4.23	Gráficos de caja para la eficiencia del error de estimación del método conjunto aumentando la cota, $R^2 = 0.95$	72
4.24	Media y mediana de la eficiencia del parámetro, $R^2 = 0.80$	75
4.25	Media y mediana de la eficiencia del error de estimación, $R^2 = 0.80$	76

4.26	Comparaciones de los tamaños de muestra, cota 0.1	78
4.27	Comparaciones media y mediana del tamaño de muestra para $R^2 = 0.8, 0.85, 0.9, 0.95$	79
4.28	Comparaciones de la eficiencia del error de estimación y del parámetro del método conjunto	80
4.29	Comparaciones de la eficiencia del error de estimación y del parámetro del método conjunto	81
4.30	Comparaciones de la eficiencia del error de estimación y del parámetro del método conjunto	81
4.31	Comparaciones de la eficiencia del error de estimación y del parámetro del método conjunto	82
4.32	Comparaciones de la eficiencia del error de estimación y del parámetro del método conjunto	82
4.33	Comparaciones de la eficiencia del error de estimación y del parámetro del método conjunto	83
4.34	Comparaciones media y mediana de la eficiencia del error de estimación para $R^2 = 0.8, 0.85, 0.9, 0.95$, método promedio	84
4.35	Comparaciones media y mediana de la eficiencia del parámetro para $R^2 = 0.8, 0.85, 0.9, 0.95$, método promedio	85
B.1	Gráficos de caja para los tamaños de muestra promedio, máximo y conjunto correspondientes a la cota 0.1	107
B.2	Gráficos de caja para los tamaños de muestra promedio, máximo y conjunto correspondientes a la cota 0.2	108
B.3	Gráficos de caja para los tamaños de muestra promedio, máximo y conjunto correspondientes a la cota 0.5	108
B.4	Gráficos de caja para los tamaños de muestra promedio, máximo y conjunto correspondientes a la cota 0.8	109
B.5	Gráficos de caja para los tamaños de muestra promedio, máximo y conjunto correspondientes a la cota 1	109

B.6	Gráficos de caja para los tamaños de muestra promedio, máximo y conjunto correspondientes a la cota 2	110
B.7	Medias y medianas aumentando la cota, $R^2 = 0.85$	111
B.8	Gráficos de caja para la eficiencia del error de estimación del método promedio, $R^2 = 0.85$	127
B.9	Gráficos de caja para la eficiencia del error de estimación del método máximo, $R^2 = 0.85$	127
B.10	Gráficos de caja para la eficiencia del error de estimación del método conjunto, $R^2 = 0.85$	128
B.11	Gráficos de caja para la eficiencia del parámetro del método promedio, $R^2 = 0.85$	128
B.12	Gráficos de caja para la eficiencia del parámetro del método máximo, $R^2 = 0.85$	129
B.13	Gráficos de caja para la eficiencia del parámetro del método conjunto, $R^2 = 0.85$	130
B.14	Gráficos de caja para la eficiencia del error de estimación del método máximo aumentando la cota, $R^2 = 0.85$	131
B.15	Gráficos de caja para la eficiencia del error de estimación del método conjunto aumentando la cota, $R^2 = 0.85$	131
B.16	Media y mediana de la eficiencia del parámetro, $R^2 = 0.85$	134
B.17	Media y mediana de la eficiencia del error de estimación, $R^2 = 0.85$	135
B.18	Gráficos de caja para los tamaños de muestra promedio, máximo y conjunto correspondientes a la cota 0.1	136
B.19	Gráficos de caja para los tamaños de muestra promedio, máximo y conjunto correspondientes a la cota 0.2	136
B.20	Gráficos de caja para los tamaños de muestra promedio, máximo y conjunto correspondientes a la cota 0.5	137
B.21	Gráficos de caja para los tamaños de muestra promedio, máximo y conjunto correspondientes a la cota 0.8	137
B.22	Gráficos de caja para los tamaños de muestra promedio, máximo y conjunto correspondientes a la cota 1	138

B.23 Gráficos de caja para los tamaños de muestra promedio, máximo y conjunto correspondientes a la cota 2	138
B.24 Medias y medianas aumentando la cota, $R^2 = 0.90$	139
B.25 Gráficos de caja para la eficiencia del error de estimación del método promedio, $R^2 = 0.90$	140
B.26 Gráficos de caja para la eficiencia del error de estimación del método máximo, $R^2 = 0.90$	140
B.27 Gráficos de caja para la eficiencia del error de estimación del método conjunto, $R^2 = 0.90$	141
B.28 Gráficos de caja para la eficiencia del parámetro del método promedio, $R^2 = 0.90$	141
B.29 Gráficos de caja para la eficiencia del parámetro del método máximo, $R^2 = 0.90$	142
B.30 Gráficos de caja para la eficiencia del parámetro del método conjunto, $R^2 = 0.90$	143
B.31 Gráficos de caja para la eficiencia del error de estimación del método máximo aumentando la cota, $R^2 = 0.90$	144
B.32 Gráficos de caja para la eficiencia del error de estimación del método conjunto aumentando la cota, $R^2 = 0.90$	144
B.33 Media y mediana de la eficiencia del parámetro, $R^2 = 0.90$	147
B.34 Media y mediana de la eficiencia del error de estimación, $R^2 = 0.90$	148
B.35 Gráficos de caja para los tamaños de muestra promedio, máximo y conjunto correspondientes a la cota 0.1	149
B.36 Gráficos de caja para los tamaños de muestra promedio, máximo y conjunto correspondientes a la cota 0.2	149
B.37 Gráficos de caja para los tamaños de muestra promedio, máximo y conjunto correspondientes a la cota 0.5	150
B.38 Gráficos de caja para los tamaños de muestra promedio, máximo y conjunto correspondientes a la cota 0.8	150
B.39 Gráficos de caja para los tamaños de muestra promedio, máximo y conjunto correspondientes a la cota 1	151

B.40 Gráficos de caja para los tamaños de muestra promedio, máximo y conjunto correspondientes a la cota 2	151
B.41 Medias y medianas aumentando la cota, $R^2 = 0.95$	152
B.42 Gráficos de caja para la eficiencia del error de estimación del método promedio, $R^2 = 0.95$	153
B.43 Gráficos de caja para la eficiencia del error de estimación del método máximo, $R^2 = 0.95$	153
B.44 Gráficos de caja para la eficiencia del error de estimación del método conjunto, $R^2 = 0.95$	154
B.45 Gráficos de caja para la eficiencia del parámetro del método promedio, $R^2 = 0.95$	154
B.46 Gráficos de caja para la eficiencia del parámetro del método máximo, $R^2 = 0.95$	155
B.47 Gráficos de caja para la eficiencia del parámetro del método conjunto, $R^2 = 0.95$	156
B.48 Media y mediana de la eficiencia del parámetro, $R^2 = 0.95$	158
B.49 Media y mediana de la eficiencia del error de estimación, $R^2 = 0.95$	159
B.50 Gráficos de caja para la eficiencia comparando R^2 , cota 0.1	160
B.51 Gráficos de caja para la eficiencia comparando R^2 , cota 0.2	160
B.52 Gráficos de caja para la eficiencia comparando R^2 , cota 0.5	161
B.53 Gráficos de caja para la eficiencia comparando R^2 , cota 0.8	161
B.54 Gráficos de caja para la eficiencia comparando R^2 , cota 1	162
B.55 Gráficos de caja para la eficiencia comparando R^2 , cota 2	162
B.56 Gráficos de caja para la eficiencia del error de estimación del método máximo aumentando la cota, $R^2 = 0.95$	163
B.57 Gráficos de caja para la eficiencia del error de estimación del método máximo aumentando la cota, $R^2 = 0.95$	163
B.58 Gráficos de caja para la eficiencia del error de estimación del método máximo aumentando la cota, $R^2 = 0.95$	164
B.59 Gráficos de caja para la eficiencia del error de estimación del método máximo aumentando la cota, $R^2 = 0.95$	164

B.60 Gráficos de caja para la eficiencia del error de estimación del método máximo aumentando la cota, $R^2 = 0.95$	165
B.61 Gráficos de caja para la eficiencia del error de estimación del método máximo aumentando la cota, $R^2 = 0.95$	165
B.62 Comparaciones media y mediana de la eficiencia del error de estimación para $R^2 = 0.8, 0.85, 0.9, 0.95$, método máximo	166
B.63 Comparaciones media y mediana de la eficiencia del parámetro para $R^2 = 0.8, 0.85, 0.9, 0.95$, método máximo	167
B.64 Comparaciones media y mediana de la eficiencia del error de estimación para $R^2 = 0.8, 0.85, 0.9, 0.95$, método conjunto	168
B.65 Comparaciones media y mediana de la eficiencia del parámetro para $R^2 = 0.8, 0.85, 0.9, 0.95$, método conjunto	169
B.66 Comparaciones de los tamaños de muestra, cota 0.2	170
B.67 Comparaciones de los tamaños de muestra, cota 0.5	171
B.68 Comparaciones de los tamaños de muestra, cota 0.8	172
B.69 Comparaciones de los tamaños de muestra, cota 1	173
B.70 Comparaciones de los tamaños de muestra, cota 2	174

Índice de cuadros

4.1	Media y mediana de los tamaños de muestra para modelos con $R^2 = 0.80$.	59
4.2	Media y mediana de los tamaños de muestra para modelos con $R^2 = 0.85$.	59
4.3	Media y mediana de los tamaños de muestra para modelos con $R^2 = 0.90$.	59
4.4	Media y mediana de los tamaños de muestra para modelos con $R^2 = 0.95$.	60
4.5	Eficiencia media y mediana del método promedio, $R^2 = 0.80$	73
4.6	Eficiencia media y mediana del método máximo, $R^2 = 0.80$	73
4.7	Eficiencia media y mediana del método conjunto, $R^2 = 0.80$	74
5.1	Promedios observados de ganancia de peso (kg) de 34 experimentos y sus correspondientes predichos con el modelo <i>Wakax POS</i>	88
5.2	Tamaños de muestra para validar el modelo <i>Wakax POS</i>	89
5.3	Tamaños de muestra para validar el modelo <i>Wakax POS</i> quitando las parejas de ceros	90
B.1	Proporciones para medir la eficiencia de los métodos para $R^2 = 0.80$, cotas 0.1 y 0.2	112
B.2	Proporciones para medir la eficiencia de los métodos para $R^2 = 0.80$, cotas 0.1 y 0.2 continuación	113
B.3	Proporciones para medir la eficiencia de los métodos para $R^2 = 0.80$, cotas 0.1 y 0.2 continuación	114
B.4	Proporciones para medir la eficiencia de los métodos para $R^2 = 0.80$, cotas 0.1 y 0.2 continuación	115

B.5	Proporciones para medir la eficiencia de los métodos para $R^2 = 0.80$, cotas 0.1 y 0.2 continuación	116
B.6	Proporciones para medir la eficiencia de los métodos para $R^2 = 0.80$, cotas 0.5 y 0.8	117
B.7	Proporciones para medir la eficiencia de los métodos para $R^2 = 0.80$, cotas 0.5 y 0.8 continuación	118
B.8	Proporciones para medir la eficiencia de los métodos para $R^2 = 0.80$, cotas 0.5 y 0.8 continuación	119
B.9	Proporciones para medir la eficiencia de los métodos para $R^2 = 0.80$, cotas 0.5 y 0.8 continuación	120
B.10	Proporciones para medir la eficiencia de los métodos para $R^2 = 0.80$, cotas 0.5 y 0.8 continuación	121
B.11	Proporciones para medir la eficiencia de los métodos para $R^2 = 0.80$, cotas 1 y 2	122
B.12	Proporciones para medir la eficiencia de los métodos para $R^2 = 0.80$, cotas 1 y 2 continuación	123
B.13	Proporciones para medir la eficiencia de los métodos para $R^2 = 0.80$, cotas 1 y 2 continuación	124
B.14	Proporciones para medir la eficiencia de los métodos para $R^2 = 0.80$, cotas 1 y 2 continuación	125
B.15	Proporciones para medir la eficiencia de los métodos para $R^2 = 0.80$, cotas 1 y 2 continuación	126
B.16	Eficiencia media y mediana del método promedio, $R^2 = 0.85$	132
B.17	Eficiencia media y mediana del método máximo, $R^2 = 0.85$	132
B.18	Eficiencia media y mediana del método conjunto, $R^2 = 0.85$	133
B.19	Eficiencia media y mediana del método promedio, $R^2 = 0.90$	145
B.20	Eficiencia media y mediana del método máximo, $R^2 = 0.90$	145
B.21	Eficiencia media y mediana del método conjunto, $R^2 = 0.90$	146
B.22	Eficiencia media y mediana del método promedio, $R^2 = 0.95$	156
B.23	Eficiencia media y mediana del método máximo, $R^2 = 0.95$	157
B.24	Eficiencia media y mediana del método conjunto, $R^2 = 0.95$	157

Resumen

En este trabajo se propuso un método para determinar el tamaño de muestra adecuado con cierta probabilidad para validar un modelo por medio de la técnica de regresión lineal simple. El método consiste en encontrar el tamaño deseado por medio de intervalos y región de confianza de los parámetros del modelo de regresión lineal. Una vez obtenidos los tamaños de muestra por medio de intervalos se tuvieron dos respuestas, una para cada parámetro, por lo que se decidió utilizar el promedio y el máximo entre estas dos. Así se tienen tres resultados para el tamaño de muestra: el promedio, el máximo y el conjunto (correspondiente a la región de confianza). Para evaluar la eficiencia de los métodos propuestos para encontrar el tamaño de muestra, primero se fijaron las características de los modelos, en este caso como es para validar modelos, se especificó el intercepto igual a cero y la pendiente igual a uno (características que corresponde a la exactitud), para simular los valores del modelo se fijó una media de 5 para los valores predichos por el modelo (z), con cuatro tipos de precisión ($R^2 = 0.80, 0.85, 0.90, 0.95$), entonces se obtuvieron 4 modelos exactos con la precisión indicada. Para cada uno de ellos se simularon 500 muestras piloto de tamaño 5, 10, 15, 20, 25 y 30, se obtuvieron 500 ternas como respuesta del tamaño de muestra (promedio, máximo y conjunto) para cada una de las cotas del error de estimación especificadas (0.1, 0.2, 0.5, 0.8, 1, 2). La eficiencia se fijó como el número de éxitos dividido entre 500. Este procedimiento se realizó 250 veces para poder hacer conclusiones respecto a la eficiencia. Así se simularon en total 18,000,000 modelos. El estudio de simulación se

realizó en el lenguaje de programación R (R Core Team, 2014). Los modelos simulados en este caso fueron obtenidos bajo el supuesto de normalidad y varianza constante.

Para efecto de calcular el tamaño de muestra necesario para validar un modelo con la técnica de regresión lineal, se recomienda una muestra piloto entre 10 y 15 unidades experimentales.

Con base en los resultados obtenidos en el estudio de simulación se concluye que el mejor método para obtener el tamaño de muestra para validar modelos por medio de la técnica de regresión lineal es el conjunto, debido a que tiene buena eficiencia tanto para el vector de parámetros como para el error de estimación, además de que se generan tamaños de muestra más pequeños y se tiene la certeza de que la región conserva la confianza deseada.

Capítulo 1

Introducción

Una de las preguntas que se hace con mayor frecuencia para la aplicación de un método estadístico es: ¿cuántas mediciones hay que incluir en la muestra?. Por lo que determinar el tamaño de muestra es un aspecto fundamental en la investigación científica, ya que recolectar las unidades experimentales puede ser difícil o costoso. Cuando se desarrolla un modelo, se requiere validarlo para conocer su capacidad predictiva, es decir, saber si éste es exacto y preciso. La exactitud se refiere a la proximidad de los valores predichos (Z_i) con los observados (Y_i), o que las diferencias entre ellos ($D_i = Y_i - Z_i$) sean cercanas a cero; la precisión se refiere a la dispersión de los puntos. Una de las técnicas más utilizadas para validar modelos es por medio de una regresión lineal simple entre los valores observados y los predichos obtenidos con modelo a evaluar (Analla, 1998; Tedeschi, 2006). Es decir, se propone el modelo $Y_i = \beta_0 + \beta_1 Z_i + \varepsilon_i$, donde β_0 y β_1 son los parámetros del intercepto y la pendiente respectivamente, mientras que ε_i es el error de la i -ésima observación. Los errores se suponen independientes e idénticamente distribuidos y también que siguen una distribución normal con media cero y varianza constante σ^2 ($N(0, \sigma^2)$).

Para determinar si el modelo es exacto se realizan pruebas de hipótesis t de Student o una prueba F conjunta (Tedeschi, 2006; Montgomery *et al.*, 2002) acerca de si el intercepto y la pendiente son cero y uno respectivamente. Para determinar si el modelo es preciso,

en la literatura se propone observar el coeficiente de determinación (R^2), el cual indica la variabilidad explicada por el modelo de regresión o dicho de otra forma indica la relación que tiene la variable de respuesta con la regresora. Se sabe además que $R^2 = r_{xz}^2$, es decir, que el coeficiente de determinación es el cuadrado de la correlación que existe entre ellas. Por lo tanto se cumple que $0 \leq R^2 \leq 1$, valores de R^2 cercanos a uno indican un mejor ajuste, que los datos no están tan dispersos y por tanto puede considerarse que el modelo es preciso.

Cuando la técnica de regresión lineal es aplicada para validar un modelo, no se indica el método inferencial utilizado para determinar el tamaño de muestra para la validación, se puede trabajar con los datos disponibles: si la muestra es suficientemente grande se divide en dos partes, una para obtener los parámetros del modelo y otra para validarlo. A veces los datos son tomados de la literatura existente, artículos de investigación o datos históricos. También se puede recolectar datos nuevos para la validación.

En general, cuando se desea determinar qué tamaño de muestra es el adecuado para realizar la investigación se puede utilizar un enfoque por medio de pruebas de hipótesis o intervalos de confianza. Referente al tamaño de muestra en la aplicación de la regresión lineal existen métodos que están basados en el coeficiente de correlación o en la pendiente del modelo. Sin embargo, estos métodos no son adecuados para el modelo de regresión entre los valores observados y los predichos del modelo a evaluar, ya que además se tiene que considerar al intercepto (Colosimo *et al.*, 2007). Al considerar sólo la pendiente se tiene un único tamaño de muestra, siendo posible que no se obtenga la exactitud que se requiere para un buen modelo. Estos autores han propuesto un método para calcular el tamaño de muestra utilizando pruebas de hipótesis para los parámetros del modelo de regresión, tanto de manera individual como conjunta. Para las pruebas de hipótesis individuales se obtuvieron dos tamaños de muestra, uno para cada parámetro y se eligió el promedio y el

máximo de ellos. Para la prueba de hipótesis del vector de parámetros se obtuvo un único tamaño de muestra. En ambos casos se utilizó el tamaño del error tipo I (α) y la potencia de la prueba ($1 - \beta$), donde se especificó un valor para la hipótesis alternativa, para obtener el tamaño de muestra. Así se involucran dos cuantiles con $n - 2$ grados de libertad y por lo tanto se requirió hacer un proceso iterativo para obtener el valor de n .

Cuando se utiliza intervalos de confianza para obtener el tamaño de muestra (n), generalmente éste resulta de un despeje después de proporcionar el nivel de confianza, una cota para el error de estimación y una estimación para la varianza; en algunos casos la n forma parte del cuantil de la distribución involucrada para obtener el intervalo y tiene que utilizarse un proceso iterativo sobre la n de modo que se alcance el error de estimación especificado. Por ejemplo, para obtener el tamaño de muestra para estimar la media con varianza conocida se usa $Z = \frac{\bar{Y} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ como el pivote para determinar el intervalo de confianza. Además se sabe que Z tiene distribución normal con media cero y varianza 1 siempre que la muestra provenga de una distribución normal o bien la muestra es de tamaño grande, por lo que se tiene que $P(|\bar{Y} - \mu| \leq z_{\alpha/2}(\sigma/\sqrt{n})) = 1 - \alpha$ y la cota para el error de estimación es $z_{\alpha/2}(\sigma/\sqrt{n})$. Así al especificar el error máximo permitido (B) se obtiene la ecuación $B = z_{\alpha/2}(\sigma/\sqrt{n})$. Como puede observarse la única cantidad desconocida es n , por lo que solo se tiene que resolver la ecuación para n . Cuando la varianza es desconocida se utiliza la expresión pivote $T = \frac{\bar{Y} - \mu}{S/\sqrt{n}}$, que se distribuye t de Student con $n - 1$ grados de libertad. En este caso la ecuación queda como $B = t_{(\alpha/2, n-1)}(S/\sqrt{n})$, de aquí puede observarse que la n no puede ser despejada ya que forma parte del cuantil. Este inconveniente ocurre precisamente en los intervalos de confianza individuales y en la región de confianza para los parámetros del modelo de regresión lineal.

En este trabajo se desarrollo el método para el cálculo del tamaño de muestra para validar un modelo con la técnica de regresión lineal basado tanto en la noción de intervalos

individuales como en la de región de confianza para el vector de parámetros, conformado por el intercepto y la pendiente. También se realizó un estudio de simulación para evaluar la eficiencia y desempeño de los métodos propuestos.

Capítulo 2

La técnica de regresión lineal en la validación de modelos

2.1. Proceso de modelación

Un modelo es una expresión para describir el comportamiento de algún sistema o fenómeno de la vida real; este sistema puede ser físico, sociológico o hasta económico.

Así, la descripción matemática de un sistema o fenómeno se llama modelo matemático y se forma con ciertos objetivos en mente; por ejemplo, se podría tratar de comprender los mecanismos de cierto ecosistema estudiando el crecimiento de las poblaciones de animales. Para empezar a formular el modelo matemático, se identifica las variables causantes del cambio del sistema. Podremos elegir no incorporar todas las variables en el modelo desde el comienzo. Luego se establece un conjunto de hipótesis razonables acerca del sistema que tratamos de describir. Una vez formulado un modelo llegamos al problema de resolverlo, que podría no ser fácil. Una vez resuelto, comprobamos que el modelo sea razonable, si su solución es consistente con los datos experimentales o los hechos conocidos acerca del comportamiento del sistema. Si las predicciones que se basan en la solución son deficientes, podemos aumentar el nivel de resolución del modelo o elaborar hipótesis alternativas sobre los mecanismos del cambio del sistema; entonces, se repiten los pasos del proceso de

modelado (Zill, 1977).

Se pueden ordenar los pasos de modelado de la siguiente forma (Domínguez, 2000):

1. Definición del objetivo de la modelación. Analizar cuál es el objetivo de la modelación permite establecer qué tipo de modelo es más apropiado y con qué precisión se requiere trabajar. Es posible que durante el proceso de modelación sea necesario evaluar diferentes alternativas de trabajo acorde con requerimientos específicos y disponibilidad de información.
2. Formulación del modelo conceptual. Con base en el objetivo de la modelación, la disponibilidad de información existente y la factibilidad de realizar o no trabajo de campo, se establece el modelo conceptual, que determina la complejidad de los procesos a tomar en cuenta (cuales se modelan, cuales no se consideran en su totalidad o pueden simplificarse en gran medida) y comprende la percepción del usuario sobre el proceso objeto de modelación.
3. Selección del tipo de modelo a utilizar. De acuerdo con el modelo conceptual, se escoge qué tipo de modelo se ajusta con mayor precisión al modelo conceptual.
4. Selección del código a utilizar. Es posible que el tipo de modelo escogido, ya esté programado y sea parte de un sistema de modelación en venta o que sea producto de trabajos anteriores. Si existen varios códigos ya preparados, se revisan y se escoge el más adecuado a las necesidades técnicas y se pasa a la siguiente etapa, de lo contrario será necesario desarrollar el código.
5. Parametrización o identificación del modelo. Con la información disponible, y en algunos casos apoyados en hipótesis de trabajo, se establecen las magnitudes de los parámetros que componen la estructura matemática. Si el valor de los parámetros se

obtiene a través de mediciones de campo existentes o adicionalmente programadas, se dice que el modelo se parametrizó. Si el valor de los parámetros se establece a través de la solución del problema inverso, es decir, cuando se encuentran a partir de los resultados del modelo y los datos observados, se dice que los parámetros se identificaron.

6. Validación del modelo. Con el fin de probar cual es el rango de bondad del modelo, este se parametriza con una parte de la información existente, luego sin cambiar los parámetros encontrados, se prueba el modelo con un rango de datos no utilizados durante la parametrización, calculando el error promedio del modelo. Si este error está dentro de los límites permisibles, se considera que el modelo está validado, de lo contrario se repite el proceso de parametrización.
7. Simulación. Con el modelo validado, se puede dar inicio a la simulación bajo las condiciones planteadas, este procedimiento es técnico y solamente hay que verificar que los parámetros e hipótesis planteados estén reflejados en el código implementado.
8. Análisis y presentación de resultados. En esta etapa participa un equipo interdisciplinario que trata de obtener el mayor número de respuestas con los datos obtenidos por el modelo y verifica la coherencia de los resultados. Una vez analizado esto, se procede a consolidar el documento soporte del proceso de toma de decisiones.
9. Post auditoria. La modelación puede no detenerse en la etapa anterior, ya que si en el modelo realizado se incluye información nueva, obtenida por otros medios, o que no estaba disponible en el momento inicial de la modelación, este puede mejorar y hacer cambiar nuestra percepción sobre el proceso real, provocando la inducción de mejoras en el modelo conceptual planteado.

2.2. Clasificación de los modelos matemáticos

Existen varias formas de clasificar modelos matemáticos; en la Figura 2.1 se presenta una forma de clasificación general (Domínguez, 2000):

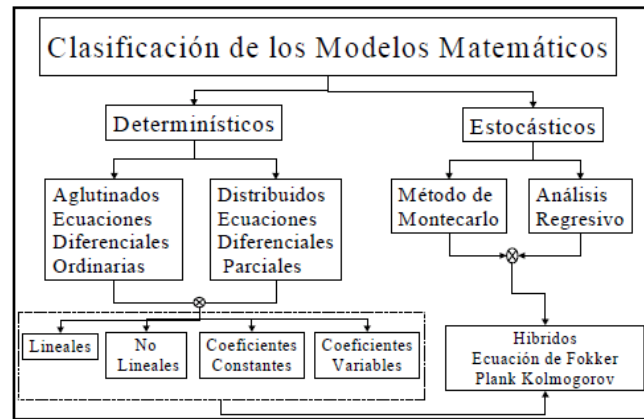


Figura 2.1: Clasificación general de modelos matemáticos

El modelo determinístico es un modelo que para dos juegos de parámetros idénticos produce una misma respuesta. Estos modelos obedecen a la relación unívoca causa-efecto sin considerar la posibilidad de respuesta con incertidumbre de realización.

El modelo estocástico es un modelo que para dos juegos idénticos de parámetros puede producir distintas respuestas. Esto se debe a que en él se considera el carácter aleatorio de algunas características del proceso que se está modelando, tomando en cuenta la incertidumbre de realización.

El modelo aglutinado es aquel en el cual las características del volumen de control de la modelación se reflejan en el modelo como concentradas en un punto. En el caso de una cuenca esto correspondería a describir su geometría a través de su área, pendiente media, altura media, etc., asociadas a su centroide.

El modelo distribuido toma en cuenta la variación espacial de las características del

dominio de modelación así como la variación espacial de los parámetros y variables que gobiernan el proceso en simulación.

Los modelos híbridos pretenden combinar las bondades de los modelos basados en la física del sistema (dinámicos y con parámetros distribuidos) con la consideración probabilística de la distribución de sus parámetros y la incertidumbre de realización. Este tipo de modelos permite no solo simular el comportamiento de un proceso sino también la evolución de sus características probabilísticas en el tiempo.

2.3. Validación del modelo

La evaluación de la adecuación de un modelo es un paso esencial en el proceso de modelado, ya que indica el nivel de precisión y exactitud de las predicciones del modelo. Esta es una fase importante ya sea para construir confianza en el modelo actual o para permitir la selección de modelos alternativos. Es necesario que el modelo sea evaluado para determinar si se trata de un modelo válido y si logra lo que se espera de él. La exactitud mide hasta qué punto los valores pronosticados por el modelo son cercanos a los valores reales. La precisión mide hasta qué punto los valores individuales predichos son cercanos uno del otro. En otras palabras, la exactitud es la capacidad del modelo para predecir los valores correctos y precisión es la capacidad del modelo para predecir valores similares de forma coherente (Tedeschi, 2006).

Así, se define validación como una comparación de las predicciones del modelo con los datos reales para determinar si el modelo es adecuado para el fin previsto (si predice los posibles valores de un sistema), es decir, es una prueba de exactitud y precisión. Por tanto, es importante conocer las técnicas de validación. La elección de la técnica está restringida por el uso potencial y requisitos de prueba del modelo, el tipo de datos que el modelo genera o la disponibilidad de datos reales. Las técnicas de validación pueden ser agrupadas en

cuatro principales categorías, evaluación subjetiva, técnicas visuales, medidas de desviación y pruebas estadísticas (Mayer y Butler, 1993).

2.3.1. Valoración subjetiva

Estas técnicas involucran evaluación por los expertos en el campo de interés. A éstos se les presentan los datos simulados y los reales y se les pide distinguir entre ellos. Esta aplicación en particular está sujeta a malas interpretaciones. Mientras que el modelo tiene un buen desempeño, puede haber ciertas características identificables contenidas en los datos simulados o en los datos reales, que facilitan la distinción. Pero debido a su propia naturaleza, las pruebas subjetivas son propensas a prejuicios personales. Algunos miembros del grupo de expertos pueden dar resultados poco críticos, igualmente, otros pueden excederse con la crítica. El éxito en la evaluación subjetiva parece ser más una función de la selección del grupo que del funcionamiento del modelo. Las principales ventajas de esta técnica parecen ser un complemento a una medida más objetiva (Mayer y Butler, 1993).

2.3.2. Técnicas visuales

Se puede graficar los datos observados con los predichos, con la recta identidad marcada la cual indica un ajuste perfecto de los datos. Esta gráfica presenta la bondad de ajuste como desviaciones verticales de la línea “perfecta” e indica si se presenta sesgo.

Otro gráfico que se puede presentar es el de los datos predichos con las desviaciones ($d = y - z$). En este gráfico se espera que los puntos estén alrededor de la recta $\bar{d} = 0$ y se considera adecuado si está dentro del rango de operación del modelo (Mitchell, 1997). Si la media de las desviaciones es distinto de cero y los puntos (z_i, d_i) se encuentran distribuidos

alrededor de la recta \bar{d} indicaría sesgo contante. Si la dispersión de los puntos tienen alguna forma puede indicar sesgo proporcional.

2.3.3. Medidas de desviación

Éstas se pueden aplicar cuando los datos observados y predichos pueden ponerse a pares de acuerdo al tiempo, localización, tratamiento, etc. Las medidas de desviación están basadas en las diferencias entre los valores observados y predichos. A continuación se presentan algunas:

- El error absoluto medio (*MAE*) y el porcentaje de error medio absoluto (*MAPE*) se definen como

$$MAE = \frac{(\sum_{i=1}^n |y_i - z_i|)}{n}$$

$$MAPE = 100 \frac{[\sum_{i=1}^n (\frac{|y_i - z_i|}{|y_i|})]}{n},$$

donde y_i representa a los valores observados y z_i a los valores predichos y n es el número de observaciones pareadas (predicho, observado).

- La raíz del error cuadrado medio (*RMSE*) es una alternativa en la que en vez de las diferencias absolutas se usan los segundos momentos y su raíz cuadrada (Mayer, Butler, 1993)

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2}{n}}.$$

- El sesgo medio (*MB*) se basa en la diferencia media entre los valores observados y predichos por el modelo

$$MB = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - z_i)}{n}.$$

Un modelo matemático puede tener un valor bajo de MB si los puntos de datos están dispersos uniformemente alrededor de la recta $y = z$.

- El estadístico de la eficiencia de modelado (MEF) es la proporción de variación explicada por la recta $y = z$.

$$MEF = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

En un ajuste perfecto, el estadístico tendría un valor igual a uno. Si MEF es menor que cero, los valores pronosticados por el modelo son peores que la media observada.

- El coeficiente de determinación del modelo (CD) es la relación de la varianza total de los datos observados al cuadrado entre la diferencia del predicho por el modelo y la media de los datos observados. Cuanto este valor se acerca más a la unidad las predicciones del modelo son mejores:

$$CD = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (z_i - \bar{y})^2}$$

- El error cuadrático medio de predicción ($MSEP$) es probablemente la estimación más común y fiable para medir la precisión predictiva de un modelo. El $MSEP$ consiste en el promedio de la suma de las diferencias al cuadrado entre los valores observados y los valores predichos por el modelo

$$MSEP = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2}{n}$$

Se utiliza cuando se quiere comparar varios modelos y se elige el que tenga menor $MSEP$.

- El cuadrado medio del error (MSE) evalúa la precisión de la regresión lineal ajustada mediante la diferencia entre los valores observados y los valores ajustados por la

regresión.

$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - 2}.$$

Al igual que el *MSEP* se utiliza para validar modelos cuando se tienen varios modelos matemáticos. El *MSE* se utiliza cuando se aplica el modelo de regresión lineal para validar modelos (que es parte de las pruebas estadísticas) (Tedeschi, 2006).

- El coeficiente del error (C) es una medida promedio relativa de la suma de las diferencias absolutas, la cual es expresada como una proporción de la media de los valores observados. Un valor de C muy cercano a cero indica que el modelo cumple con su objetivo (Medina *et al.*, 2010).

$$C = \frac{\frac{\sum_{i=1}^n |y_i - z_i|}{n}}{\bar{y}} = \frac{MAE}{\bar{y}},$$

2.3.4. Pruebas estadísticas

Como los valores observados y los predichos se pueden considerar pareados o relacionados, se puede utilizar la prueba t para muestras pareadas, análisis de regresión o pruebas de signo no paramétricas. Cuando se tienen modelos estocásticos, se genera una distribución para cada una de las comparaciones, por lo que se pueden obtener diferentes valores predichos resultados para uno solo de los valores observados; en este caso se puede usar la media de la distribución generada como valor predicho. (En modelos estocásticos, los cuales generan una distribución para la comparación con cada observación, se puede usar la media de la distribución generada como valor predicho) (Mayer y Butler, 1993). Para el caso en el que el modelo matemático a validar sea un modelo de regresión se pueden aplicar tres técnicas de validación (Montgomery, 2002):

- Análisis de los coeficientes del modelo y los valores predichos, incluyendo comparaciones con la experiencia, la teoría física y otros modelos analíticos o resultados de simulación.
- Recolección de nuevos datos (o datos frescos) con los cuales investigar el desempeño del modelo en predicción. En este caso se predicen los valores para estos nuevos datos y si la estimación es exacta indicaría que es un buen modelo.
- División de datos, es decir, apartar algunos de los datos originales y usar esas observaciones para investigar el desempeño del modelo en predicción.

Prueba para las diferencias

En el caso de la prueba t para muestras pareadas, se utilizan las diferencias d_i de los valores observados con los predichos por el modelo, donde las d_i son representadas por la variable $D = Y - Z$. La prueba para medir la exactitud es

$$H_0 : \mu_D = 0 \quad vs \quad H_1 : \mu_D \neq 0.$$

El estadístico es

$$T = \frac{\bar{D}}{S_D/\sqrt{n}},$$

donde si H_0 es cierta y la diferencia D tiene distribución normal entonces T se distribuye t-student con $n - 1$ grados de libertad. De no rechazarse la hipótesis nula se tendría exactitud. También se puede dar el intervalo de confianza que está dado por

$$\bar{D} - t_{\alpha/2, n-1} \frac{S_D}{\sqrt{n}} \leq \mu_D \leq \bar{D} + t_{\alpha/2, n-1} \frac{S_D}{\sqrt{n}}.$$

En este caso se supone que las diferencias d_i tienen distribución normal, por lo que habría que hacer la prueba correspondiente (gráfico de probabilidad normal o una prueba de bondad de ajuste).

También se puede efectuar la prueba no paramétrica de rango con signo de Wilcoxon para muestras relacionadas donde, de igual manera, se necesita probar $H_0 : \mu_D = 0$ vs $H_1 : \mu_D \neq 0$ (Montgomery y Runger, 2014).

Otra prueba que se puede realizar es la de Kolmogorov-Smirnov para una muestra, en donde lo que se busca probar es que D esté distribuido normalmente con media cero y varianza σ_D^2 (desconocida).

Todas las pruebas anteriores buscan probar exactitud, es decir de rechazarse la hipótesis nula se tiene que el modelo no es exacto y en particular para las pruebas de la media, si se rechaza implicaría que se tiene algún tipo de sesgo. En caso de rechazo, junto con el gráfico de los predichos contra las diferencias se puede determinar si se trata de sesgo constante o sesgo proporcional (Medina *et al.*, 2014).

Aún teniendo que la media es cero, puede ser que no se cumpla exactitud por tener sesgo proporcional, por eso es necesario incluir otras pruebas. Para determinar si existe este sesgo se puede hacer una prueba de regresión entre los predichos Z y las diferencias D , la prueba para β_1 indica si existe sesgo proporcional. Si se rechaza la hipótesis nula de $H_0 : \beta_1 = 0$ se tiene que el sesgo proporcional es significativo y por lo tanto el modelo no sería exacto (Medina, *et al.*, 2010).

Prueba para observados y predichos

Otra forma para medir la adecuación del modelo (tanto para estocásticos como para determinísticos) es comparando la distribución de los valores observados y predichos por el modelo. Se puede utilizar la prueba de Kolmogorov -Smirnov para dos muestras para evaluar la probabilidad de que los dos conjuntos de datos (observados y los valores predichos

por el modelo) tienen la misma distribución, es decir, $F_Y(y) = F_Z(z)$. Si se considera que ambos conjuntos de datos se distribuyen normalmente, entonces una comparación entre su media y varianza identificará si los datos observados y pronosticados por el modelo son similares (Tedeschi, 2006). El problema en este caso es que se supone que las muestras son independientes, pero los observados y predichos no lo son ya que están relacionados con las mismas unidades experimentales.

Otra prueba estadística es el procedimiento de Freese, al respecto Medina *et al.* (2014) señala que la validación de modelos, basada en el planteamiento de Freese con sus extensiones constituyen un método estadístico formado por pruebas de hipótesis e intervalos de confianza para determinar si las salidas del modelo están suficientemente próximas a los valores observados del sistema real. El método permite analizar datos provenientes de modelos sin sesgo, sesgo constante o proporcional en sus pronósticos sin modificar la estructura del modelo.

2.4. La técnica de regresión

De las técnicas visuales, considerando el gráfico de observados con los predichos, la técnica de regresión lineal para validar modelos resulta natural, ya que se necesita que los datos se ajusten a la recta identidad ($y = z$). Entonces se tiene que decidir cuál será la variable regresora. Por lo general, se considera que el modelo matemático es determinista y por tanto los valores que predice son fijos y no tienen asociada variación alguna, en consecuencia los valores predichos por el modelo (z_i) se pueden poner en el eje X (regresor), mientras que los valores observados se trazan en el eje Y (respuesta), debido a que los valores observados contienen variabilidad natural (Tedeschi, 2006). Así, el modelo de regresión lineal entre los valores observados y los predichos del modelo a evaluar es el siguiente:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 Z_i + \varepsilon_i$$

en donde se tienen los siguientes supuestos: los valores del eje X son conocidos y sin errores, esto es cierto si y sólo si el modelo es determinista y los valores predichos (Z_i) por el modelo se utilizan en el eje X ; los valores del eje Y tienen que ser independientes, aleatorios y homocedásticos; y ε_i , que es el error de la i -ésima observación, son independientes e idénticamente distribuidos normal con media cero y varianza σ^2 constante. Para la normalidad, con frecuencia se utiliza la prueba de Shapiro-Wilk cuando se tienen menos de 2000 puntos de datos. Cuando se tienen más, la prueba de Kolmogorov-Smirnov es más adecuada (Tedeschi, 2006).

Con este método es posible determinar si el modelo es exacto y preciso. Para probar la exactitud es necesario que el intercepto y la pendiente sean cero y uno respectivamente. Esto es porque se busca que se ajusten a la recta identidad, como se muestra en la Figura 2.2 que correspondería al caso de un modelo exacto y preciso.

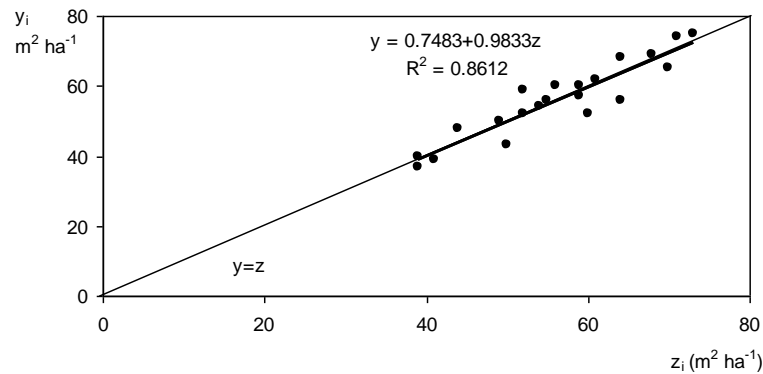


Figura 2.2: Modelo exacto

Por tanto se prueban las siguientes hipótesis:

$$H_0 : \beta_0 = 0 \quad vs \quad H_1 : \beta_0 \neq 0$$

y

$$H_0 : \beta_1 = 1 \quad vs \quad H_1 : \beta_1 \neq 1$$

La prueba de la pendiente puede fallar al rechazar la hipótesis nula, ya sea porque la pendiente es muy diferente de la unidad o hay mucha dispersión de los datos alrededor de la línea. Entonces se debe utilizar el intervalo de confianza para investigar el rango de valores de la pendiente. Entonces es posible utilizar los intervalos de confianza para determinar si el modelo es exacto y esto ocurre si el cero y el uno se encuentran en los intervalos para β_0 y β_1 respectivamente.

También se ha sugerido una hipótesis nula más relevante que prueba al mismo tiempo si el intercepto y la pendiente no son diferentes de cero y uno, respectivamente

$$H_0 : \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad vs \quad H_1 : \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde la prueba estadística utilizada para esta inferencia simultánea es (Colosimo et al., 2007)

$$F_{calc} = \frac{(\beta_0 - \hat{\beta}_0)^2 + 2\bar{z}(\beta_0 - \hat{\beta}_0)(\beta_1 - \hat{\beta}_1) + (\sum_{i=1}^n z_i^2/n)(\beta_1 - \hat{\beta}_1)^2}{2s^2/n}$$

que bajo H_0 tiene distribución central F

$$F_{calc} \sim F_{2,n-2}.$$

El cálculo de la prueba F es válida sólo para los modelos deterministas; de hecho, no se debe esperar la pendiente igual a la unidad cuando se utiliza un modelo estocástico (o probabilístico). Sin embargo, mientras mayor sea el MSE, es más difícil rechazar la hipótesis de que el origen y la pendiente simultáneamente difieren de cero y uno, respectivamente; se espera un intervalo de confianza más grande, lo que aumenta su tolerancia.

Al igual que en los intervalos de confianza, es posible determinar si el modelo es exacto por medio de la región de confianza. En este caso para la exactitud será necesario que el vector $(0,1)$ se encuentre en la región de confianza de los parámetros (β_0, β_1) .

Para determinar si el modelo es preciso, se utiliza el coeficiente de determinación (R^2). Como se tiene que $0 \leq R^2 \leq 1$, valores de R^2 cercanos a uno indican un mejor ajuste, es decir que las parejas de datos (predicho, observado) no están tan dispersos y por tanto se tiene que el modelo es preciso. Debe tenerse cuidado con la interpretación ya que un valor alto del coeficiente de determinación por sí solo no indica que el modelo matemático puede hacer predicciones útiles dado que mide la precisión y no la exactitud.

2.4.1. Prueba de Brown-Mood

Una prueba alternativa a la F conjunta es la prueba de Brown-Mood no paramétrica, que se puede utilizar para probar conjuntamente si el intercepto y la pendiente de la línea de regresión son iguales a algunos valores hipotéticos. Al igual que con la prueba F simultánea, la recta de regresión $y_i = \beta_0 + \beta_1 z_i$ se evalúa probando si $\beta_0 = 0$ y $\beta_1 = 1$. Los datos de validación se representan primero como un diagrama de dispersión y en este diagrama se dibujan la recta $y_i = z_i$ y una recta vertical a través de la mediana de z_i . Sea n_1 el número de puntos de datos por encima de la recta $y_i = z_i$ y a la izquierda de la recta vertical, y sea n_2 el número de puntos de datos por encima de $y_i = z_i$ y a la derecha de la

recta vertical. El estadístico de prueba se calcula como

$$X^2 = (8/n)[(n_1 - n/4)^2 + (n_2 - n/4)^2]$$

y tiene una distribución aproximada χ^2 con dos grados de libertad, donde n es el número de observaciones (Yang et al., 2004).

Capítulo 3

Tamaño de muestra para validar modelos usando regresión lineal

Como se ha mencionado, el método de regresión lineal es usado para la validación de modelos. El modelo de regresión lineal simple está dado por

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 Z_i + \varepsilon_i$$

donde Z_i son los valores predichos por el modelo a validar, Y_i son los valores observados, β_0 y β_1 son los parámetros del intercepto y la pendiente respectivamente, ε_i es el i -ésimo error aleatorio, estos errores son independientes y con distribución normal con media cero y varianza σ^2 ($N(0, \sigma^2)$).

Si se desea realizar inferencia acerca de los parámetros del modelo de regresión y se cumplen dichos supuestos para los errores, entonces los estadísticos

$$T_1 = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{MS_{res}/S_{ZZ}}} \quad y \quad T_0 = \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\sqrt{MS_{res} \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{z}^2}{S_{ZZ}} \right)}}$$

se distribuyen t de Student con $n - 2$ grados de libertad.

Donde

$$MS_{res} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2},$$

$$S_{ZZ} = \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2$$

$$S_{ZY} = \sum_{i=1}^n y_i (z_i - \bar{z}).$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{ZY}}{S_{ZZ}}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

Para considerar validado el modelo, se busca que sea exacto y preciso, es decir que el intercepto y pendiente sean cero y uno respectivamente y que el coeficiente de determinación sea cercano a uno. Para poder validar un modelo, se necesita cierto número de unidades experimentales, el cual es desconocido. Es importante conocer este número para no obtener unidades experimentales de más o que falten, ya que puede resultar demasiado costos.

En este capítulo se mostrarán los métodos para obtener el número de unidades experimentales o tamaño de muestra (n) para validar modelos. Primero se presenta el método desarrollado por medio de pruebas de hipótesis (Colosimo *et al.*, 2007). Después se desarrollará el método de intervalos de confianza, donde se utiliza el correspondiente a cada uno de los parámetros β_0 y β_1 , así como la región de confianza para el vector de estos parámetros.

3.1. Tamaño de muestra usando el enfoque de pruebas de hipótesis (Colosimo *et al.*, 2007)

Como se ha mencionado, existe un método propuesto para obtener el tamaño de muestra por medio de pruebas de hipótesis, en donde se obtiene el tamaño que asegure la potencia de la prueba deseada. A continuación se incluye el procedimiento para deducir el tamaño de muestra por pruebas de hipótesis para entender cómo funciona y poder comparar métodos.

Para probar

$$H_0 : \beta_1 = \beta_{10} \quad vs \quad H_a : \beta_1 \neq \beta_{10}$$

se utiliza el estadístico $T_1 = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\frac{MS_{Res}}{S_{ZZ}}}}$ que se distribuye t-student con $n - 2$ grados de libertad y cumple que $\gamma = P(T_v \geq t_{\gamma, v})$. Entonces la probabilidad de error tipo I queda de la siguiente forma:

$$\alpha = P\left(|T_1| > t_{(\alpha/2, n_{\beta_1}-2)} | \beta_1 = \beta_{10}\right) = P\left(\left|\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_{10}}{\sqrt{\frac{MS_{res}}{S_{ZZ}}}}\right| > t_{(\alpha/2, n_{\beta_1}-2)}\right).$$

donde n_{β_1} es el tamaño de muestra que corresponde a la prueba de la pendiente, el cual es el de interés a encontrar. Despejando $\hat{\beta}_1$, se encuentra que la región de rechazo es:

$$RR = \left\{ \hat{\beta}_1 < \beta_{10} - t_{(\alpha/2, n_{\beta_1}-2)} \sqrt{\frac{MS_{res}}{S_{ZZ}}} \vee \hat{\beta}_1 > \beta_{10} + t_{(\alpha/2, n_{\beta_1}-2)} \sqrt{\frac{MS_{res}}{S_{ZZ}}} \right\}.$$

Se tiene que la potencia de la prueba se define como $1 - \beta$, donde β es la probabilidad de cometer el error tipo II. Para poder obtener β se fija un valor para la hipótesis alternativa, sea $\beta'_1 = 1 + \delta_1$, ya que se necesita que la pendiente sea 1, se propone este valor con δ_1 como el error que se desea permitir, entonces se tiene que:

$$\beta = P\left(\beta_{10} - t_{(\alpha/2, n_{\beta_1}-2)} \left(\sqrt{\frac{MS_{res}}{S_{ZZ}}}\right) \leq \hat{\beta}_1 \leq \beta_{10} + t_{(\alpha/2, n_{\beta_1}-2)} \left(\sqrt{\frac{MS_{res}}{S_{ZZ}}}\right) | \beta_1 = \beta'_1\right)$$

$$\beta = P\left(\hat{\beta}_1 \leq \beta_{10} + t_{(\alpha/2, n_{\beta_1}-2)} \left(\sqrt{\frac{MS_{res}}{S_{ZZ}}}\right) | \beta_1 = \beta'_1\right) - P\left(\hat{\beta}_1 < \beta_{10} - t_{(\alpha/2, n_{\beta_1}-2)} \left(\sqrt{\frac{MS_{res}}{S_{ZZ}}}\right) | \beta_1 = \beta'_1\right).$$

Como se tiene una distribución diferente para $\hat{\beta}_1$ (respecto al error tipo I), los valores correspondientes a los límites superior e inferior no son simétricos respecto a β_1 , y teniendo en cuenta que se distribuye normal con media β'_1 , el área debajo de la curva, antes del cuantil $\beta_{10} - t_{(\alpha/2, n-2)} \left(\sqrt{\frac{MS_{res}}{S_{ZZ}}}\right)$ es muy pequeña (dependiendo del valor de α) por lo que se podría considerar que $P\left(\hat{\beta}_1 < \beta_{10} - t_{(\alpha/2, n-2)} \left(\sqrt{\frac{MS_{res}}{S_{ZZ}}}\right) | \beta_1 = \beta'_1\right)$ es cercana a cero.

Se tiene que

$$\begin{aligned}
& P\left(\hat{\beta}_1 < \beta_{10} - t_{(\alpha/2, n_{\beta_1}-2)}\left(\sqrt{\frac{MS_{res}}{S_{ZZ}}}\right) \mid \beta_1 = \beta'_1\right) \\
&= P\left(\frac{\hat{\beta}_1 - \beta'_1}{\sqrt{\frac{MS_{res}}{S_{ZZ}}}} < \frac{\beta_{10} - t_{(\alpha/2, n_{\beta_1}-2)}\left(\sqrt{\frac{MS_{res}}{S_{ZZ}}}\right) - \beta'_1}{\sqrt{\frac{MS_{res}}{S_{ZZ}}}}\right) \\
&= P\left(T < \frac{\beta_{10} - \beta'_1}{\sqrt{\frac{MS_{res}}{S_{ZZ}}}} - t_{(\alpha/2, n_{\beta_1}-2)}\right)
\end{aligned}$$

Para que esta probabilidad sea cero, es necesario que $\frac{\beta_{10} - \beta'_1}{\sqrt{\frac{MS_{res}}{S_{ZZ}}}} - t_{(\alpha/2, n_{\beta_1}-2)}$ sea lo suficientemente grande, este valor depende de los grados de libertad (del tamaño de muestra). Debido a los valores que toma el cuantil t , para tamaños de muestra lo suficientemente grandes bastará con que $\frac{\beta_{10} - \beta'_1}{\sqrt{\frac{MS_{res}}{S_{ZZ}}}}$ sea mayor igual que 1, mientras que para tamaños de muestra más pequeños se necesitarán valores más altos, (no existiendo así un valor general para todos los g.l.).

Así se tiene que

$$\begin{aligned}
\beta &= P\left(\hat{\beta}_1 \leq \beta_{10} + t_{(\alpha/2, n_{\beta_1}-2)}\left(\sqrt{\frac{MS_{res}}{S_{ZZ}}}\right) \mid \beta_1 = \beta'_1\right) \\
\beta &= P\left(\frac{\hat{\beta}_1 - \beta'_1}{\sqrt{\frac{MS_{res}}{S_{ZZ}}}} \leq \frac{\beta_{10} + t_{(\alpha/2, n_{\beta_1}-2)}\left(\sqrt{\frac{MS_{res}}{S_{ZZ}}}\right) - \beta'_1}{\sqrt{\frac{MS_{res}}{S_{ZZ}}}}\right) \\
\beta &= P\left(\frac{\hat{\beta}_1 - \beta'_1}{\sqrt{\frac{MS_{res}}{S_{ZZ}}}} > -\frac{\beta_{10} + t_{(\alpha/2, n_{\beta_1}-2)}\left(\sqrt{\frac{MS_{res}}{S_{ZZ}}}\right) - \beta'_1}{\sqrt{\frac{MS_{res}}{S_{ZZ}}}}\right)
\end{aligned}$$

Para obtener el tamaño de muestra se desea asegurar al menos una potencia $1 - \beta$ entonces

$$\beta \geq P\left(\frac{\hat{\beta}_1 - \beta'_1}{\sqrt{\frac{MS_{res}}{S_{ZZ}}}} > -\frac{\beta_{10} + t_{(\alpha/2, n_{\beta_1}-2)}\left(\sqrt{\frac{MS_{res}}{S_{ZZ}}}\right) - \beta'_1}{\sqrt{\frac{MS_{res}}{S_{ZZ}}}}\right)$$

Así se tiene que cumplir que

$$-\frac{\beta_{10} + t_{(\alpha/2, n_{\beta_1}-2)} \left(\sqrt{\frac{MS_{res}}{S_{ZZ}}} \right) - \beta'_1}{\sqrt{\frac{MS_{res}}{S_{ZZ}}}} \geq t_{\beta, n_{\beta_1}-2}$$

$$(\sqrt{n_{\beta_1} - 1})(\beta'_1 - \beta_{10}) \geq (t_{\beta, n_{\beta_1}-2} + t_{(\alpha/2, n_{\beta_1}-2)}) \left(\sqrt{\frac{MS_{res}}{S_Z^2}} \right)$$

donde S_Z^2 es la estimación de la varianza de Z y $t_{\beta, n_{\beta_1}-2}$ es el cuantil que corresponde a β de la distribución t-student con $n_{\beta_1} - 2$ grados de libertad. Como $\beta'_1 = 1 + \delta_1$ y $\beta_{10} = 1$ se tiene que

$$(n_{\beta_1} - 1)\delta_1^2 \geq (t_{\beta, n_{\beta_1}-2} + t_{(\alpha/2, n_{\beta_1}-2)})^2 \left(\frac{MS_{res}}{S_Z^2} \right).$$

Por tanto el tamaño de muestra requerido para la pendiente, debe cumplir que:

$$n_{\beta_1} \geq \frac{(t_{\beta, n_{\beta_1}-2} + t_{(\alpha/2, n_{\beta_1}-2)})^2 MS_{res}}{S_Z^2 \delta_1^2} + 1.$$

De la misma forma se determina la expresión para el cálculo del tamaño de muestra que corresponde al intercepto. Para probar

$$H_0 : \beta_0 = \beta_{00} \quad vs \quad H_a : \beta_0 \neq \beta_{00}$$

se utiliza el estadístico $T_0 = \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_{00}}{\sqrt{MS_{res} \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{Z}^2}{S_{ZZ}} \right)}}$ que se distribuye t-student con $n - 2$ grados de libertad.

La probabilidad de error tipo I es:

$$\alpha = P \left(|T_0| > t_{n_{\beta_0}-2, \alpha/2} | \beta_0 = \beta_{00} \right) = P \left(\left| \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_{00}}{\sqrt{MS_{res} \left(\frac{1}{n_{\beta_0}} + \frac{\bar{Z}^2}{S_{ZZ}} \right)}} \right| > t_{n_{\beta_0}-2, \alpha/2} | \beta_0 = \beta_{00} \right).$$

Despejando $\hat{\beta}_0$, se tiene que la región de rechazo es:

$$RR = \left\{ \hat{\beta}_0 < \beta_{00} - t_{n_{\beta_0}-2, \alpha/2} \sqrt{MS_{res} \left(\frac{1}{n_{\beta_0}} + \frac{\bar{Z}^2}{S_{ZZ}} \right)} \vee \hat{\beta}_0 > \beta_{00} + t_{n_{\beta_0}-2, \alpha/2} \sqrt{MS_{res} \left(\frac{1}{n_{\beta_0}} + \frac{\bar{Z}^2}{S_{ZZ}} \right)} \right\}.$$

donde n_{β_0} es el tamaño de muestra que se desea encontrar y que corresponde al intercepto.

Se fija un valor para la hipótesis alternativa, sea $\beta'_0 = 0 + \delta_0$, donde δ_0 es el error que se desea permitir para el intercepto y de forma análoga al caso e β_1 , se obtiene que la probabilidad de error tipo II es:

$$\beta = P \left(\frac{\hat{\beta}_0 - \beta'_0}{\sqrt{MS_{res} \left(\frac{1}{n_{\beta_0}} + \frac{\bar{Z}^2}{S_{ZZ}} \right)}} \leq \frac{\beta_{00} + t_{(\alpha/2, n_{\beta_0}-2)} \left(\sqrt{MS_{res} \left(\frac{1}{n_{\beta_0}} + \frac{\bar{Z}^2}{S_{ZZ}} \right)} \right) - \beta'_0}{\sqrt{MS_{res} \left(\frac{1}{n_{\beta_0}} + \frac{\bar{Z}^2}{S_{ZZ}} \right)}} \right)$$

$$\beta = P \left(\frac{\hat{\beta}_0 - \beta'_0}{\sqrt{MS_{res} \left(\frac{1}{n_{\beta_0}} + \frac{\bar{Z}^2}{S_{ZZ}} \right)}} > - \frac{\beta_{00} + t_{(\alpha/2, n_{\beta_0}-2)} \left(\sqrt{MS_{res} \left(\frac{1}{n_{\beta_0}} + \frac{\bar{Z}^2}{S_{ZZ}} \right)} \right) - \beta'_0}{\sqrt{MS_{res} \left(\frac{1}{n_{\beta_0}} + \frac{\bar{Z}^2}{S_{ZZ}} \right)}} \right).$$

Se desea asegurar al menos una potencia $1 - \beta$ entonces

$$\beta \geq P \left(\frac{\hat{\beta}_0 - \beta'_0}{\sqrt{MS_{res} \left(\frac{1}{n_{\beta_0}} + \frac{\bar{Z}^2}{S_{ZZ}} \right)}} > - \frac{\beta_{00} + t_{(\alpha/2, n_{\beta_0}-2)} \left(\sqrt{MS_{res} \left(\frac{1}{n_{\beta_0}} + \frac{\bar{Z}^2}{S_{ZZ}} \right)} \right) - \beta'_0}{\sqrt{MS_{res} \left(\frac{1}{n_{\beta_0}} + \frac{\bar{Z}^2}{S_{ZZ}} \right)}} \right),$$

por lo que se debe cumplir que

$$- \frac{\beta_{00} + t_{(\alpha/2, n_{\beta_0}-2)} \left(\sqrt{MS_{res} \left(\frac{1}{n_{\beta_0}} + \frac{\bar{Z}^2}{S_{ZZ}} \right)} \right) - \beta'_0}{\sqrt{MS_{res} \left(\frac{1}{n_{\beta_0}} + \frac{\bar{Z}^2}{S_{ZZ}} \right)}} \geq t_{\beta, n_{\beta_0}-2}$$

$$(\beta'_0 - \beta_{00}) \geq (t_{\beta, n_{\beta_0}-2} + t_{(\alpha/2, n_{\beta_0}-2)}) \left(\sqrt{\frac{1}{n_{\beta_0}} MS_{res} \left(1 + \frac{\bar{Z}^2}{S_{ZZ}} \right)} \right).$$

Se tiene que $\beta'_0 = \delta_0$ y $\beta_{00} = 0$, entonces

$$\delta_0^2 \geq (t_{\beta, n-2} + t_{(\alpha/2, n_{\beta_0}-2)})^2 \left(\frac{1}{n_{\beta_0}} MS_{res} \left(1 + \frac{\bar{Z}^2}{S_Z^2} \right) \right).$$

Por lo tanto el tamaño de muestra correspondiente al intercepto tiene que cumplir que:

$$n_{\beta_0} \geq \frac{(t_{\beta, n_{\beta_0}-2} + t_{(\alpha/2, n_{\beta_0}-2)})^2}{\delta_0^2} \left(MS_{res} \left(\frac{S_Z^2 + \bar{Z}^2}{S_Z^2} \right) \right).$$

Para el caso de la región de confianza no fue necesario despejar un tamaño de muestra sino que se trabajó directamente con la probabilidad moviendo el tamaño de muestra hasta obtener la potencia deseada.

Se tiene que el estadístico utilizado para la inferencia simultánea es

$$F_{calc} = \frac{(\beta_0 - \hat{\beta}_0)^2 + 2\bar{z}(\beta_0 - \hat{\beta}_0)(\beta_1 - \hat{\beta}_1) + (\sum_{i=1}^n z_i^2/n)(\beta_1 - \hat{\beta}_1)^2}{2s^2/n},$$

que bajo H_0 tiene distribución central F , $F_{calc} \sim F_{2, n-2}$.

Fijando el punto alternativo $(\beta_0, \beta_1) = (\delta_0, 1+\delta_1)$, donde δ_0 y δ_1 son los errores que se desean permitir para los parámetros de intercepto y pendiente considerando que se necesitan que sean 0 y 1 respectivamente, F_{calc} tiene una distribución F no central

$$F_{calc} \sim F_{2, n-2, \lambda},$$

donde

$$\lambda = \frac{n\delta^2(1 + \mathbb{E}[z])^2}{\sigma^2}$$

siendo esto para el caso particular en el que $\delta_0 = \delta_1 = \delta$ y $\mathbb{E}[z]$ se sustituye por el promedio de la muestra piloto \bar{z} . Entonces la estimación de la potencia efectiva $\beta_{efectiva}$ para un

tamaño de muestra dado n se puede conseguir por medio de la siguiente expresión:

$$\beta(n, \lambda)_{efectiva} = 1 - pf[qf(1 - \alpha, 2, n - 2), 2, n - 2, \lambda],$$

en donde pf es la probabilidad acumulada de la distribución F no central, con el parámetro λ no central y qf es el cuantil de la distribución F central.

3.2. Tamaño de muestra bajo enfoque de intervalos de confianza

En el método presentado anteriormente, las pruebas corresponden a modelos exactos, es decir, se quiere probar que el intercepto y la pendiente son cero y uno respectivamente, con pruebas t “separadas” y con la prueba conjunta para el vector de parámetros; al fijar un punto en la hipótesis alternativa para la potencia, se busca cierto error al rededor de cero y uno.

A continuación se presenta el desarrollo de intervalos y región de confianza para los parámetros del intercepto y pendiente. En este caso, se utilizará un punto cualquiera, es decir, no es necesario especificar que sea $(0, 1)$.

El ancho de los intervalos es una medida de la calidad general de la recta de regresión (Montgomery *et al.*, 2002). Para hallar los intervalos de confianza se utilizará el método de cantidad pivotal, donde T_0 y T_1 serán los pivotes definidos en la sección anterior, y se tendrá que cumplir

$$P(\gamma_1 \leq T_i \leq \gamma_2) = 1 - \alpha \quad i = 0, 1$$

como la distribución t es simétrica se utiliza $\gamma_1 = -t_{(\alpha/2, n-2)}$ y $\gamma_2 = t_{(\alpha/2, n-2)}$.

3.2.1. Tamaño de muestra para inferir β_1 de manera independiente

Para hallar el intervalo de confianza para β_1 se tiene que cumplir que

$$P\left(-t_{(\alpha/2, n_{\beta_1}-2)} \leq T_1 \leq t_{(\alpha/2, n_{\beta_1}-2)}\right) = 1 - \alpha$$

donde n_{β_1} es el tamaño de muestra a determinar y que corresponde al intercepto. Sustituyendo el estadístico se tiene que

$$\begin{aligned} P\left(-t_{(\alpha/2, n_{\beta_1}-2)} \leq \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\frac{MS_{res}}{S_{ZZ}}}} \leq t_{(\alpha/2, n_{\beta_1}-2)}\right) &= 1 - \alpha \quad (3.2.1) \\ P\left(-t_{(\alpha/2, n_{\beta_1}-2)} \left(\sqrt{\frac{MS_{res}}{S_{ZZ}}}\right) \leq \hat{\beta}_1 - \beta_1 \leq t_{(\alpha/2, n_{\beta_1}-2)} \left(\sqrt{\frac{MS_{res}}{S_{ZZ}}}\right)\right) &= 1 - \alpha \\ P\left(-\hat{\beta}_1 - t_{(\alpha/2, n_{\beta_1}-2)} \left(\sqrt{\frac{MS_{res}}{S_{ZZ}}}\right) \leq -\beta_1 \leq -\hat{\beta}_1 + t_{(\alpha/2, n_{\beta_1}-2)} \left(\sqrt{\frac{MS_{res}}{S_{ZZ}}}\right)\right) &= 1 - \alpha \\ P\left(\hat{\beta}_1 - t_{(\alpha/2, n_{\beta_1}-2)} \left(\sqrt{\frac{MS_{res}}{S_{ZZ}}}\right) \leq \beta_1 \leq \hat{\beta}_1 + t_{(\alpha/2, n_{\beta_1}-2)} \left(\sqrt{\frac{MS_{res}}{S_{ZZ}}}\right)\right) &= 1 - \alpha \end{aligned}$$

Así, el intervalo del $100(1 - \alpha)\%$ de confianza para β_1 es

$$\left(\hat{\beta}_1 - t_{(\alpha/2, n_{\beta_1}-2)} \left(\sqrt{\frac{MS_{res}}{S_{ZZ}}}\right), \hat{\beta}_1 + t_{(\alpha/2, n_{\beta_1}-2)} \left(\sqrt{\frac{MS_{res}}{S_{ZZ}}}\right)\right).$$

Por otro lado de 3.2.1 se tiene que

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\frac{MS_{res}}{S_{ZZ}}}}\right| \leq t_{(\alpha/2, n_{\beta_1}-2)}\right) &= 1 - \alpha \\ P\left(\frac{|\hat{\beta}_1 - \beta_1|}{\sqrt{\frac{MS_{res}}{S_{ZZ}}}} \leq t_{(\alpha/2, n_{\beta_1}-2)}\right) &= 1 - \alpha \\ P\left(\left|\hat{\beta}_1 - \beta_1\right| \leq t_{(\alpha/2, n_{\beta_1}-2)} \left(\sqrt{\frac{MS_{res}}{S_{ZZ}}}\right)\right) &= 1 - \alpha \quad , \end{aligned}$$

de donde se obtiene que la cota del error de estimación (B_1) para determinar (n) que corresponde a β_1 está dado por:

$$B_1 = t_{(\alpha/2, n_{\beta_1}-2)} \left(\sqrt{\frac{MS_{res}}{(n_{\beta_1} - 1)S_Z^2}} \right).$$

Así para obtener n , es necesario especificar la cota del error de estimación (B_1), el nivel de confianza ($1 - \alpha$), el cuadrado medio del error (MS_{res}) y la varianza de la z_i (S_Z^2).

Lo que se hace en este caso es acotar el rango en el que se mueve la pendiente, al fijar una cota del error estimación grande implica que este rango es amplio. Hay que notar que se tiene la expresión $|\hat{\beta}_1 - \beta_1|$, por lo que no es necesario que $\beta_1 = 1$, lo que importa es cuánto se aleja el estimado del valor real.

Como se desea que B_1 sea el máximo error, la n requerida debe determinarse mediante un proceso iterativo hasta encontrar el valor de n_{β_1} tal que

$$t_{(\alpha/2, n_{\beta_1}-2)} \left(\sqrt{\frac{MS_{res}}{(n_{\beta_1} - 1)S_Z^2}} \right) \leq B_1.$$

Despejando la parte constante, se usará la siguiente ecuación para determinar el tamaño de muestra donde se cumpla que

$$\frac{t_{(\alpha/2, n_{\beta_1}-2)}}{\sqrt{n_{\beta_1} - 1}} \leq \frac{B_1}{\left(\sqrt{\frac{MS_{res}}{S_Z^2}} \right)}. \quad (3.2.2)$$

Obsérvese que se pueden tener varias n que lo cumplen, entonces se toma la más grande (n_{β_1}), de modo que con $n_{\beta_1} + 1$ se tenga que

$$\frac{t_{(\alpha/2, n_{\beta_1}-2)}}{\sqrt{n_{\beta_1} - 1}} > \frac{B_1}{\left(\sqrt{\frac{MS_{res}}{S_Z^2}} \right)}.$$

3.2.2. Tamaño de muestra para inferir β_0 de manera independiente

Para hallar el intervalo de confianza para β_0 se tiene que cumplir que

$$\begin{aligned}
 P\left(-t_{(\alpha/2, n_{\beta_0}-2)} \leq T_0 \leq t_{(\alpha/2, n_{\beta_0}-2)}\right) &= 1 - \alpha \\
 P\left(-t_{(\alpha/2, n_{\beta_0}-2)} \leq \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\sqrt{MS_{res}\left(\frac{1}{n_{\beta_0}} + \frac{\bar{z}^2}{S_{ZZ}}\right)}} \leq t_{(\alpha/2, n_{\beta_0}-2)}\right) &= 1 - \alpha \quad (3.2.3) \\
 P\left(-t_{(\alpha/2, n_{\beta_0}-2)} \left(\sqrt{MS_{res}\left(\frac{1}{n_{\beta_0}} + \frac{\bar{z}^2}{S_{ZZ}}\right)}\right) \leq \hat{\beta}_0 - \beta_0 \leq t_{(\alpha/2, n_{\beta_0}-2)} \left(\sqrt{MS_{res}\left(\frac{1}{n_{\beta_0}} + \frac{\bar{z}^2}{S_{ZZ}}\right)}\right)\right) &= 1 - \alpha \\
 P\left(-\hat{\beta}_0 - t_{(\alpha/2, n_{\beta_0}-2)} \left(\sqrt{MS_{res}\left(\frac{1}{n_{\beta_0}} + \frac{\bar{z}^2}{S_{ZZ}}\right)}\right) \leq -\beta_0 \leq -\hat{\beta}_0 + t_{(\alpha/2, n_{\beta_0}-2)} \left(\sqrt{MS_{res}\left(\frac{1}{n_{\beta_0}} + \frac{\bar{z}^2}{S_{ZZ}}\right)}\right)\right) &= 1 - \alpha \\
 P\left(\hat{\beta}_0 - t_{(\alpha/2, n_{\beta_0}-2)} \left(\sqrt{MS_{res}\left(\frac{1}{n_{\beta_0}} + \frac{\bar{z}^2}{S_{ZZ}}\right)}\right) \leq \beta_0 \leq \hat{\beta}_0 + t_{(\alpha/2, n_{\beta_0}-2)} \left(\sqrt{MS_{res}\left(\frac{1}{n_{\beta_0}} + \frac{\bar{z}^2}{S_{ZZ}}\right)}\right)\right) &= 1 - \alpha
 \end{aligned}$$

Así, el intervalo del $100(1 - \alpha)\%$ de confianza para β_0 es

$$\left(\hat{\beta}_0 - t_{(\alpha/2, n_{\beta_0}-2)} \left(\sqrt{MS_{res}\left(\frac{1}{n_{\beta_0}} + \frac{\bar{z}^2}{S_{ZZ}}\right)}\right), \hat{\beta}_0 + t_{(\alpha/2, n_{\beta_0}-2)} \left(\sqrt{MS_{res}\left(\frac{1}{n_{\beta_0}} + \frac{\bar{z}^2}{S_{ZZ}}\right)}\right)\right).$$

Por otro lado de 3.2.3 se tiene que

$$\begin{aligned}
 P\left(\left|\frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\sqrt{MS_{res}\left(\frac{1}{n_{\beta_0}} + \frac{\bar{z}^2}{S_{ZZ}}\right)}}\right| \leq t_{(\alpha/2, n_{\beta_0}-2)}\right) &= 1 - \alpha \\
 P\left(\frac{|\hat{\beta}_0 - \beta_0|}{\sqrt{MS_{res}\left(\frac{1}{n_{\beta_0}} + \frac{\bar{z}^2}{S_{ZZ}}\right)}} \leq t_{(\alpha/2, n_{\beta_0}-2)}\right) &= 1 - \alpha \\
 P\left(\left|\hat{\beta}_0 - \beta_0\right| \leq t_{(\alpha/2, n_{\beta_0}-2)} \left(\sqrt{MS_{res}\left(\frac{1}{n_{\beta_0}} + \frac{\bar{z}^2}{S_{ZZ}}\right)}\right)\right) &= 1 - \alpha
 \end{aligned}$$

La cota del error de estimación (B_0) para determinar (n_{β_0}) que corresponde a β_0 está dado por:

$$B_0 = t_{(\alpha/2, n_{\beta_0}-2)} \left(\sqrt{MS_{res} \left(\frac{1}{n_{\beta_0}} + \frac{\bar{z}^2}{S_{ZZ}} \right)} \right)$$

o bien

$$B_0 = t_{(\alpha/2, n_{\beta_0}-2)} \left(\sqrt{\frac{1}{n_{\beta_0}} MS_{res} \left(1 + \frac{\bar{z}^2}{S_Z^2} \right)} \right).$$

Así para obtener n_{β_0} , también es necesario especificar la cota del error de estimación (B_0), el nivel de confianza ($1 - \alpha$), el cuadrado medio del error (MS_{res}), la media y la varianza de las z_i (\bar{z}, S_Z^2).

De igual forma que en el caso de β_1 , se tiene la expresión $|\hat{\beta}_0 - \beta_0|$, y de nuevo no es necesario que $\beta_0 = 0$, lo que importa es cuánto se aleja el estimado del valor real.

En este caso también la n_{β_0} requerida debe determinarse mediante un proceso iterativo hasta encontrar el valor de n_{β_0} tal que

$$t_{(\alpha/2, n_{\beta_0}-2)} \left(\sqrt{\frac{1}{n_{\beta_0}} MS_{res} \left(1 + \frac{\bar{z}^2}{S_Z^2} \right)} \right) \leq B_0.$$

o despejando la parte constante

$$\frac{t_{(\alpha/2, n_{\beta_0}-2)}}{\sqrt{n_{\beta_0}}} \leq \frac{B_0 \sqrt{S_Z^2}}{\left(\sqrt{MS_{res} (S_Z^2 + \bar{z}^2)} \right)}. \quad (3.2.4)$$

Se toma la más grande (n_{β_0}), de modo que con $n_{\beta_0} + 1$ se tenga que

$$\frac{t_{(\alpha/2, n_{\beta_0}-2)}}{\sqrt{n_{\beta_0}}} > \frac{B_0 \sqrt{S_Z^2}}{\left(\sqrt{MS_{res} (S_Z^2 + \bar{z}^2)} \right)}.$$

Una vez que se tienen los tamaños de muestra correspondientes a cada uno de los parámetros se usará como tamaño de muestra para validar modelos el promedio o el más grande entre ellos es decir $n = \max \{n_{\beta_1}, n_{\beta_0}\}$ o $n = \frac{\{n_{\beta_1} + n_{\beta_0}\}}{2}$.

3.3. Tamaño de muestra para inferir β_0 y β_1 de manera conjunta

En el caso de los intervalos de confianza, se determinan dos tamaños de muestra, correspondientes a cada uno de los parámetros del modelo de regresión. Se considera que tienen una confianza de $(1 - \alpha)100\%$ de manera individual, pero cuando se elige un tamaño de muestra no es seguro que se conserve esa confianza ya sea para el promedio o el máximo. Por tanto es necesario considerar ahora a los parámetros como un vector, teniendo $\beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$ y se procede a encontrar el tamaño de muestra. Así se obtiene una región de confianza para este vector para tener la certeza de que corresponde al $(1 - \alpha)100\%$.

Al expresar el modelo de regresión lineal de forma matricial, con n observaciones en Y y los valores asociados de Z_i , el modelo de regresión se puede ver como:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z_{11} \\ 1 & Z_{21} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & Z_{n1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

O bien

$$Y = \mathbf{Z}\beta + \varepsilon.$$

De manera similar al caso de intervalos separados, si ε se distribuye $N_n(0, \sigma^2 I)$, el estimador de máxima verosimilitud de β es el mismo que el de mínimos cuadrados.

El estimador de β es $(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'Y$ y tiene distribución $N_2(\beta, \sigma^2(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1})$ (Johnson & Wichern, 2007). σ^2 es estimado por medio de MS_{res} , es decir $\hat{\sigma}^2 = MS_{res} = \frac{SS_{res}}{n-2} = \mathbf{y}'\mathbf{y} - \hat{\beta}\mathbf{Z}'\mathbf{y}$.

Además se tiene que

$$\frac{(\widehat{\beta} - \beta)' \mathbf{Z}'\mathbf{Z} (\widehat{\beta} - \beta)}{(2)MS_{res}} \sim F_{2, n-2}.$$

Entonces, la probabilidad de error tipo I es

$$\begin{aligned} P \left(\frac{(\widehat{\beta} - \beta)' \mathbf{Z}'\mathbf{Z} (\widehat{\beta} - \beta)}{2MS_{res}} > F_{\alpha, 2, n-2} \right) &= \alpha \\ \Rightarrow P \left(\frac{(\widehat{\beta} - \beta)' \mathbf{Z}'\mathbf{Z} (\widehat{\beta} - \beta)}{2MS_{res}} \leq F_{\alpha, 2, n-2} \right) &= 1 - \alpha. \end{aligned}$$

Así la región de confianza conjunta de $100(1 - \alpha)\%$ para el vector de parámetros β es

$$\frac{(\widehat{\beta} - \beta)' \mathbf{Z}'\mathbf{Z} (\widehat{\beta} - \beta)}{2MS_{res}} \leq F_{\alpha, 2, n-2}. \quad (3.3.5)$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}'\mathbf{Z} &= \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n z_i \\ \sum_{i=1}^n z_i & \sum_{i=1}^n z_i^2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{Z}'\mathbf{Z} &= \begin{pmatrix} n & n\bar{z} \\ n\bar{z} & \sum_{i=1}^n z_i^2 - n\bar{z}^2 + n\bar{z}^2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{Z}'\mathbf{Z} &= \begin{pmatrix} n & n\bar{z} \\ n\bar{z} & S_{ZZ} + n\bar{z}^2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{Z}'\mathbf{Z} &= \begin{pmatrix} n & n\bar{z} \\ n\bar{z} & nS_Z^2 + n\bar{z}^2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{Z}'\mathbf{Z} &= n \begin{pmatrix} 1 & \bar{z} \\ \bar{z} & S_Z^2 + \bar{z}^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Entonces la región de confianza puede expresarse como

$$\frac{(\hat{\beta} - \beta)' \begin{pmatrix} 1 & \bar{z} \\ \bar{z} & S_Z^2 + \bar{z}^2 \end{pmatrix} (\hat{\beta} - \beta)}{2MS_{res}} \leq \frac{F_{\alpha, 2, n-2}}{n}. \quad (3.3.6)$$

Realizando operaciones matriciales se llega a que la región de confianza es

$$\frac{(\hat{\beta}_0 - \beta_0)^2 + 2\bar{z}(\hat{\beta}_0 - \beta_0)(\hat{\beta}_1 - \beta_1) + S_Z^2(\hat{\beta}_1 - \beta_1)^2 + \bar{z}^2(\hat{\beta}_1 - \beta_1)^2}{2MS_{Res}} \leq \frac{F_{\alpha, 2, n-2}}{n}. \quad (3.3.7)$$

A diferencia del caso de intervalos de confianza, para encontrar el tamaño de muestra n , en la región no se puede despejar la matriz de la expresión 3.3.6. Además es necesario especificar el valor de $(\hat{\beta} - \beta) = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 - \beta_0 \\ \hat{\beta}_1 - \beta_1 \end{pmatrix}$. Si se toma en cuenta la cota máxima especificada en los intervalos de confianza, $|\hat{\beta}_0 - \beta_0| \leq B_0$ y $|\hat{\beta}_1 - \beta_1| \leq B_1$, los valores B_0 y B_1 pueden ser utilizados para la diferencia de vectores, pero sería necesario considerar que las diferencias pueden ser negativas puesto que se tiene $-B_0 \leq \hat{\beta}_0 - \beta_0 \leq B_0$ y $-B_1 \leq \hat{\beta}_1 - \beta_1 \leq B_1$.

Así se tienen dos casos:

- Cuando se tiene que ambas diferencias son positivas o negativas, se tiene el mismo resultado, esto se puede ver en la ecuación 3.3.7, porque las diferencias se elevan al cuadrado y en $2\bar{z}(\hat{\beta}_0 - \beta_0)(\hat{\beta}_1 - \beta_1)$ se mantiene con signo positivo.
- Cuando una de las diferencias es negativa, el signo de $2\bar{z}(\hat{\beta}_0 - \beta_0)(\hat{\beta}_1 - \beta_1)$ cambia, con esto la expresión de la izquierda en 3.3.7 es más pequeña por lo que se genera un valor diferente para el tamaño de muestra.

Por tanto se obtienen dos tamaños de muestra y entonces se elige el que genere la elipse más pequeña para tratar de mantener los límites propuestos para el intercepto y pendiente.

Uno de los problemas que se presenta es que al considerar estos límites, al generar la elipse de confianza se pueden tener algunos puntos que se salen de los límites permitidos como se muestra en la Figura 3.1, donde las líneas azules corresponden a los intervalos de confianza del parámetro β_1 y las rojas a los intervalos de β_0 .

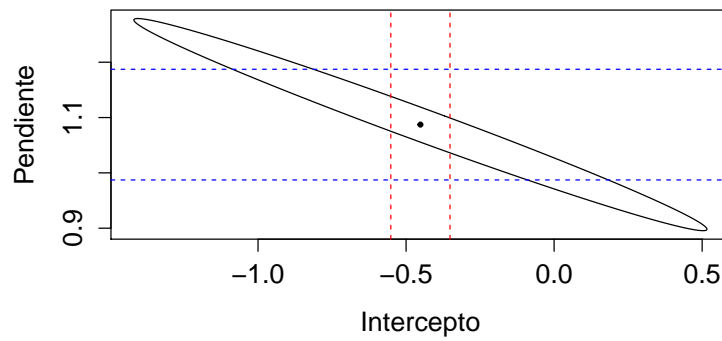


Figura 3.1: Región de Confianza para β_0 y β_1

Entonces se puede considerar la distancia del parámetro estimado con el valor real, $d = \|\hat{\beta} - \beta\|$, siendo este el error de estimación y ponerle un límite o cota. Haciendo la analogía al caso de intervalos de confianza, sería establecer lo más que se desea permitir que el valor real se aleje del estimado. Como β es un vector, es necesario considerar esta distancia en todas las direcciones. Por lo tanto la cota para el error de estimación esta dada por la circunferencia de radio d , como se muestra en la Figura 3.2.

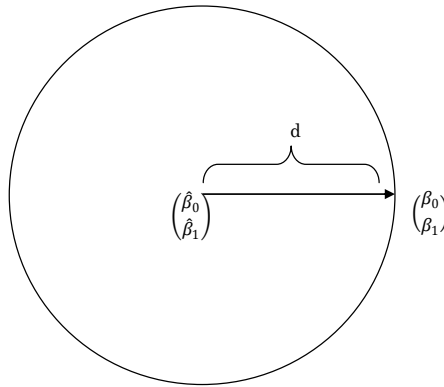


Figura 3.2: Cota para el error de estimación

Para que ningún punto se salga de los límites permitidos (es decir, que no se tenga una distancia del valor estimado del real más grande que d), la elipse generada deberá ser la que esté contenida dentro de la circunferencia. Entonces el semi eje mayor de la elipse deberá medir d como se observa en la Figura 3.3.

Los ejes de la elipse de confianza en 3.3.5 están dados por $\frac{\sqrt{F_{\alpha, 2, n-2}}}{\sqrt{\lambda_1}}$ y $\frac{\sqrt{F_{\alpha, 2, n-2}}}{\sqrt{\lambda_2}}$, donde λ_1 y λ_2 son los valores propios de la matriz $\frac{\mathbf{Z}'\mathbf{Z}}{2MS_{res}}$ (Johnson & Wichern, 2007). Para obtener estos valores propios se necesita que $\det\left(\frac{\mathbf{Z}'\mathbf{Z}}{2MS_{res}} - \lambda I\right) = 0$, entonces

$$\det\left(\frac{\mathbf{Z}'\mathbf{Z}}{2MS_{res}} - \lambda I\right) = \begin{pmatrix} \frac{n}{2MS_{res}} - \lambda & \frac{n\bar{z}}{2MS_{res}} \\ \frac{n\bar{z}}{2MS_{res}} & \frac{n(S_z^2 + \bar{z}^2)}{2MS_{res}} - \lambda \end{pmatrix}$$

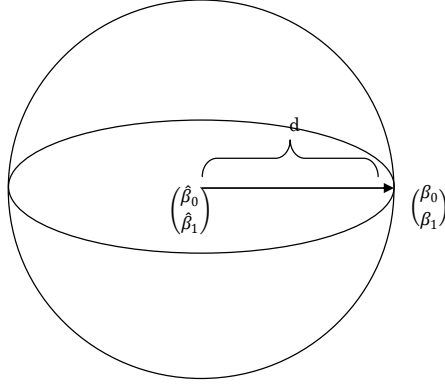


Figura 3.3: Región de confianza dentro del límite

$$\det \left(\frac{\mathbf{Z}'\mathbf{Z}}{2MS_{res}} - \lambda I \right) = \left(\frac{n}{2MS_{res}} - \lambda \right) \left(\frac{n(S_Z^2 + \bar{z}^2)}{2MS_{res}} - \lambda \right) - \left(\frac{n\bar{z}}{2MS_{res}} \right)^2$$

$$\det \left(\frac{\mathbf{Z}'\mathbf{Z}}{2MS_{res}} - \lambda I \right) = \left(\frac{n}{2MS_{res}} \right) \left(\frac{n(S_Z^2 + \bar{z}^2)}{2MS_{res}} \right) - \lambda \left(\frac{n}{2MS_{res}} \right) - \lambda \left(\frac{n(S_Z^2 + \bar{z}^2)}{2MS_{res}} \right) + \lambda^2 - \left(\frac{n\bar{z}}{2MS_{res}} \right)^2$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - \left(\frac{n}{2MS_{res}} + \frac{n(S_Z^2 + \bar{z}^2)}{2MS_{res}} \right) \lambda + \left(\frac{n}{2MS_{res}} \right) \left(\frac{n(S_Z^2 + \bar{z}^2)}{2MS_{res}} \right) - \left(\frac{n\bar{z}}{2MS_{res}} \right)^2 = 0$$

Así se tiene una ecuación de segundo grado cuyas soluciones están dadas por $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Entonces el primer valor propio es

$$\lambda_1 = \frac{\left(\frac{n}{2MS_{res}} + \frac{n(S_Z^2 + \bar{z}^2)}{2MS_{res}}\right) + \sqrt{\left[\left(\frac{n}{2MS_{res}} + \frac{n(S_Z^2 + \bar{z}^2)}{2MS_{res}}\right)\right]^2 - 4\left[\left(\frac{n}{2MS_{res}}\right)\left(\frac{n(S_Z^2 + \bar{z}^2)}{2MS_{res}}\right) - \left(\frac{n\bar{z}}{2MS_{res}}\right)^2\right]}{2}$$

$$\implies \lambda_1 = \frac{\frac{n}{2MS_{res}}(1 + S_Z^2 + \bar{z}^2) + \frac{n}{2MS_{res}}\sqrt{(1 + S_Z^2 + \bar{z}^2)^2 - 4[(S_Z^2 + \bar{z}^2) - \bar{z}^2]}}{2}$$

$$\implies \lambda_1 = \frac{n}{4MS_{res}} \left[(1 + S_Z^2 + \bar{z}^2) + \sqrt{(1 + S_Z^2 + \bar{z}^2)^2 - 4S_Z^2} \right]$$

y el segundo es

$$\lambda_2 = \frac{n}{4MS_{res}} \left[(1 + S_Z^2 + \bar{z}^2) - \sqrt{(1 + S_Z^2 + \bar{z}^2)^2 - 4S_Z^2} \right]$$

Estos valores propios son reales puesto que la matriz es simétrica y son mayores que cero. Como $MS_{res} > 0$, entonces $\lambda_1 > 0$ pues es producto de un número positivo por la suma de números positivos. Para λ_2 hay que notar que

$$(1 + S_Z^2 + \bar{z}^2) - \sqrt{(1 + S_Z^2 + \bar{z}^2)^2 - 4S_Z^2} > 0$$

pues

$$(1 + S_Z^2 + \bar{z}^2)^2 > (1 + S_Z^2 + \bar{z}^2)^2 - 4S_Z^2$$

y entonces

$$(1 + S_Z^2 + \bar{z}^2) > \sqrt{(1 + S_Z^2 + \bar{z}^2)^2 - 4S_Z^2}.$$

Así se tiene que los valores propios de $\frac{\mathbf{Z}'\mathbf{Z}}{2MS_{res}}$ son mayores que cero y además se tiene que $\lambda_1 > \lambda_2$. Entonces $\frac{\sqrt{F_{\alpha, 2, n-2}}}{\sqrt{\lambda_2}} > \frac{\sqrt{F_{\alpha, 2, n-2}}}{\sqrt{\lambda_1}}$, por lo tanto se necesita que $\frac{\sqrt{F_{\alpha, 2, n-2}}}{\sqrt{\lambda_2}} = d$.

Para poder fijar d , se debe recordar que $d = \|\hat{\beta} - \beta\| = \sqrt{(\hat{\beta}_0 - \beta_0)^2 + (\hat{\beta}_1 - \beta_1)^2}$. Ahora se puede tomar las cotas de los errores de estimación de los intervalos de confianza y así $(\hat{\beta}_0 - \beta_0)^2 = B_0^2$ y $(\hat{\beta}_1 - \beta_1)^2 = B_1^2$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{F_{\alpha, 2, n-2}}}{\sqrt{\lambda_2}} &= \sqrt{B_0^2 + B_1^2} \\ \implies \frac{F_{\alpha, 2, n-2}}{\frac{n}{4MS_{res}} \left[(1+S_Z^2 + \bar{z}^2) - \sqrt{(1+S_Z^2 + \bar{z}^2)^2 - 4S_Z^2} \right]} &= B_0^2 + B_1^2 \end{aligned}$$

Así para obtener n , es necesario especificar las cotas del error de estimación B_0 y B_1 , el nivel de confianza $(1 - \alpha)$, el cuadrado medio del error (MS_{res}) y la media y varianza de las z_i (\bar{z}, S_Z^2).

Como se desea que d sea la máxima distancia, la n requerida debe determinarse mediante un proceso iterativo hasta encontrar el valor de n tal que

$$\frac{F_{\alpha, 2, n-2}}{\frac{n}{4MS_{res}} \left[(1+S_Z^2 + \bar{z}^2) - \sqrt{(1+S_Z^2 + \bar{z}^2)^2 - 4S_Z^2} \right]} \leq B_0^2 + B_1^2.$$

Despejando la parte constante, se usará la siguiente ecuación para buscar el tamaño de muestra donde se cumpla que

$$\frac{F_{\alpha, 2, n-2}}{n} \leq (B_0^2 + B_1^2) \left[\frac{(1+S_Z^2 + \bar{z}^2) - \sqrt{(1+S_Z^2 + \bar{z}^2)^2 - 4S_Z^2}}{4MS_{res}} \right]. \quad (3.3.8)$$

Obsérvese que se pueden tener varias n que lo cumplen, entonces se toma la (n) , de modo que con $n + 1$ se tenga que

$$\frac{F_{\alpha, 2, n+1-2}}{n+1} > (B_0^2 + B_1^2) \left[\frac{(1+S_Z^2 + \bar{z}^2) - \sqrt{(1+S_Z^2 + \bar{z}^2)^2 - 4S_Z^2}}{4MS_{res}} \right].$$

En este caso al igual que con los intervalos de confianza no es necesario que el modelo sea exacto, el tamaño de muestra resultante puede ser utilizado para validar cualquier modelo.

3.4. Análisis de funciones para obtener el tamaño de muestra

Ya que se cuenta con las expresiones para obtener los tamaños de muestra, resulta de utilidad analizar que sucede cuando se aumenta el tamaño de muestra.

De las ecuaciones 3.2.2 y 3.2.4, sean $f_0(n_{\beta_0}) = \frac{t_{(\alpha/2, n_{\beta_0}-2)}}{\sqrt{n_{\beta_0}}}$, $a = \frac{B_0 \sqrt{S_Z^2}}{(\sqrt{MS_{res}(S_Z^2 + z^2)})}$, $f_1(n_{\beta_1}) = \frac{t_{(\alpha/2, n_{\beta_1}-2)}}{\sqrt{n_{\beta_1}-1}}$ y $b = \frac{B_1}{\left(\sqrt{\frac{MS_{res}}{S_Z^2}}\right)}$, con $n \geq 3$.

Cuando n tiende a ∞ se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f_0(n_{\beta_0}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_{(\alpha/2, n_{\beta_0}-2)}}{\sqrt{n_{\beta_0}}} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} t_{(\alpha/2, n_{\beta_0}-2)}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n_{\beta_0}}} \\ &= \frac{z_{\alpha/2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n_{\beta_0}}} = 0 \end{aligned}$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_1(n_{\beta_1}) = 0.$$

Entonces cuando a y b sean muy pequeñas, para ambas funciones se tendrá solución así sea muy grande. Por otro lado, cuando $a > f_0(3)$ no se va a tener un tamaño de muestra tal que $f_0(n_{\beta_0}) > a$ pues $n \geq 3$. Esto mismo pasa con $(b > f_1(3))$.

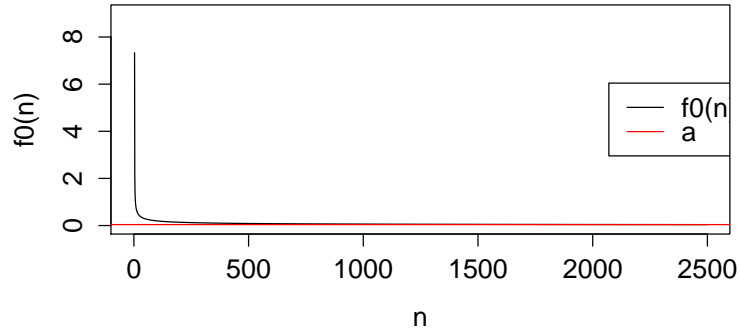


Figura 3.4: Función para n_{β_0}

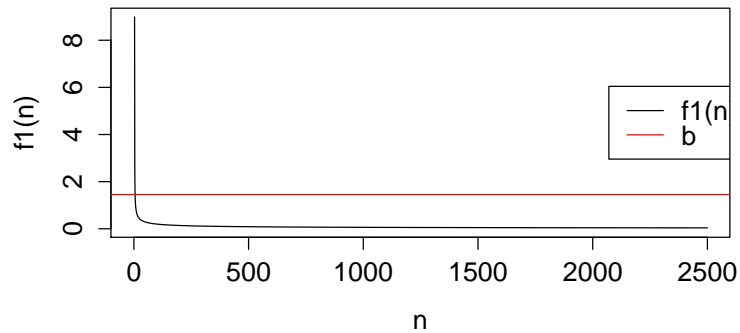


Figura 3.5: Función para n_{β_1}

En las Figuras 3.4 y 3.5, se observa que cuando se aumenta n ambas funciones f_0 y f_1 decrecen, para un α fijo. En cada uno de los dos casos, los tamaños de muestra que hacen que los valores de la función queden por debajo de las rectas cumplen la condición de las expresiones 3.2.2 y 3.2.4, pero como se desea que B_0 y B_1 sean las cotas máximas, entonces la solución requerida será donde las rectas a y b se intersecten con sus respectivas funciones f_0 y f_1 .

En el caso de la región de confianza, de la ecuación 3.3.8 se define $f_c(n) = \frac{F_{\alpha, 2, n-2}}{n}$ y $c = (B_0^2 + B_1^2) \left[\frac{(1+S_Z^2+\bar{z}^2) - \sqrt{(1+S_Z^2+\bar{z}^2)^2 - 4S_Z^2}}{4MS_{res}} \right]$, con $n \geq 3$.

Cuando n tiende a ∞ se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f_c(n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{\alpha, 2, n-2}}{n} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} F_{\alpha, 2, n-2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} n}. \end{aligned} \tag{3.4.9}$$

Además

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} F_{\alpha, 2, n-2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\chi_{2, \alpha}^2}{2}}{\frac{\chi_{n-2, \alpha}^2}{n-2}} \\ &= \frac{\frac{\chi_{2, \alpha}^2}{2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\chi_{n-2, \alpha}^2}{n-2}} \end{aligned}$$

y como χ_n^2 se puede ver como la suma de n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media 1 y varianza 2, por el teorema del límite central, se tiene que para n suficientemente grande, $\frac{\chi_n^2}{n}$ tiene distribución normal con media 1 y varianza $2/(n)$. Por lo tanto $\frac{\chi_{n-2, \alpha}^2}{n-2} \sim N(1, 2/(n-2))$. Estandarizando esta variable se llega a que $\frac{\chi_{n-2, \alpha}^2}{n-2} = z_\alpha \sqrt{\frac{2}{n-2}} + 1$. Así

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} F_{\alpha, 2, n-2} &= \frac{\frac{\chi_{2, \alpha}^2}{2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} z_\alpha \sqrt{\frac{2}{n-2}} + 1} \\ &= \frac{\chi_{2, \alpha}^2}{2}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_c(n) = \frac{\frac{\chi_{2, \alpha}^2}{2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} n} = 0. \tag{3.4.10}$$

De igual manera al caso de intervalos de confianza, se tendrá solución para c muy pequeña y en este caso n será muy grande. Y cuando $c > f_c(3)$ no se va a tener solución debido a que $n \geq 3$.

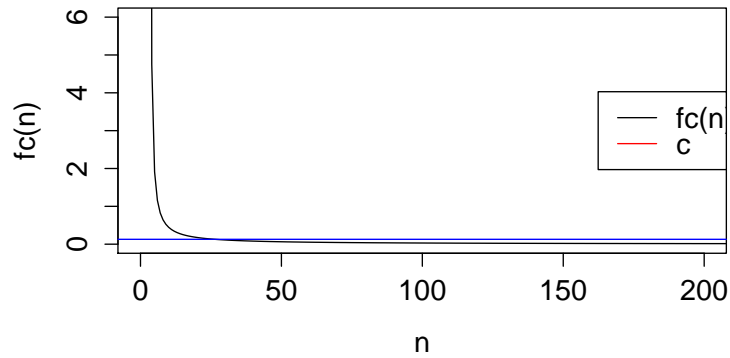


Figura 3.6: Función para n conjunta

En la Figura 3.6 se observa que conforme aumenta el tamaño de muestra la función f_c decrece con α fijo. Por un lado si f_c va decreciendo, la región de confianza se hace más pequeña y por otro lado, las n que hacen que los valores de la función queden por abajo de la recta c cumplen la condición de la expresión en 3.3.8 y son las soluciones deseadas. Como se desea la elipse que tenga el eje mayor más cercano a la distancia propuesta, se elige la n más pequeña y ésta se genera en el corte de la recta c con la función f_c .

Para encontrar las soluciones se utilizó el método de la bisección y fue programado en lenguaje de programación R. El código se presenta en el Apéndice A.

Capítulo 4

Estudio de simulación

El estudio de simulación se realizará para determinar qué tan eficiente son los métodos propuestos y cuál tiene mejor desempeño. Esto se implementará con el lenguaje de programación R (R Core Team, 2014).

Para ello, se consideran 1000 modelos hipotéticos exactos y precisos, divididos en cuatro tipos, según la precisión, cada uno de estos cuatro serán simulados con precisión $R^2 = 0.8, 0.85, 0.9, 0.95$ (y además bajo la condición de que cumplan los supuestos de normalidad y varianza constante), es decir, para cada R^2 se tendrán 250 modelos. Para cada uno de ellos se generarán 500 muestras piloto de tamaño 5, 10, 15, 20, 25 y 30 y se calcularán los tamaños de muestra tomando en cuenta el tamaño promedio, el tamaño máximo y el tamaño conjunto para los siguientes límites de error 0.1, 0.2, 0.5, 0.8, 1 y 2. Así se obtendrán muestras para cada modelo con los tamaños obtenidos con los tres métodos de cálculo y se evaluará para cada tamaño si no se pasa del error *a priori* correspondiente y además, si el intervalo de confianza correspondiente determina el estatus del modelo, es decir, si contiene los parámetros del modelo *a priori*. Para determinar la eficiencia de los métodos se considerarán dos criterios, uno es el porcentaje de las veces que el límite del error de estimación no es mayor que el valor *a priori*, y el otro es el porcentaje de las veces que el intervalo de confianza garantiza el estatus del modelo *a priori*.

En resumen para un modelo exacto y preciso con $R^2 = 0.8$, con una cota de error de 0.1 se obtendrán 500 muestras piloto de tamaño 5, 500 muestras piloto de tamaño 10, 500 muestras piloto de tamaño 15, etc., es decir que para esta cota se habrán simulado 3,000 muestras piloto. Para cada uno de los 6 tamaños de muestra piloto se obtendrán las correspondientes 500 ternas de n promedio, máximo y conjunto, con un total de 3,000 ternas. Para la eficiencia del modelo con un tamaño de muestra de 5 y para el tamaño promedio, se tendrán dos valores, la proporción del éxito de la cota y la proporción de éxito del estatus de modelo (que el intervalo contenga al parámetro deseado), entonces $p_c = \frac{\sum_{i=1}^{500} ec_i}{500}$ y $p_p = \frac{\sum_{i=1}^{500} ep_i}{500}$, donde ec_i será uno si con el i -ésimo n promedio se cumple que el límite del error de estimación sea menor que la cota 0.1 y cero en caso contrario, y ep_i será uno si con el i -ésimo n promedio se cumple que el parámetro se encuentra en el intervalo y cero en caso contrario. Esto mismo se hace para el máximo y para el conjunto. Así por cada error se tendrán 6 pares de proporciones para el promedio (un par por cada tamaño de muestra piloto), 6 para el máximo y 6 para el conjunto. Este procedimiento se realizará 250 veces y para cada cota con cada tamaño de muestra piloto se tendrán 250 pares de proporciones.

Por cada R^2 se generarán 18,000 muestras piloto con sus respectivas ternas de tamaños de muestra obtenidos (promedio, máximo y conjunto), se tendrán 18,000 ternas, y 9,000 pares de proporciones para medir la eficiencia del promedio, 9,000 del máximo y 9,000 del conjunto. Entonces en total para los cuatro valores de R^2 se tendrán 72,000 muestras piloto, 72,000 tamaños promedio, 72,000 tamaños máximo, 72,000 tamaños conjunto, 36,000 pares de proporciones para medir la eficiencia del promedio, 36,000 del máximo y 36,000 del conjunto.

4.1. Funciones para la simulación

Para obtener los modelos exactos y precisos se utilizó la metodología descrita por Febles (2014) para la simulación de muestras que cumplen con el supuesto de distribución normal y varianza constante por el método de transformación inversa, pero se le hizo una modificación utilizando $S_Z^2 = \frac{(SCE)R^2}{(n-1)\beta_1^2(1-R^2)}$ debido a que la usada en dicho trabajo causaba inestabilidad para los fines de éste.

Para que el programa corriera sin problemas, para evaluar que los modelos cumplieran con el supuesto de normalidad, se consideró que, si el tamaño de muestra se encontraba entre 4 y 5000 ($4 < n < 5000$) se utilizarían las pruebas de Shapiro-Wilk y Kolmogorov-Smirnov; si $n \leq 4$ sólo se utilizaría la prueba de Shapiro-Wilk; y si $n \geq 5000$ sólo se utilizaría la prueba de Kolmogorov-Smirnov. Esta modificación se debe a que la prueba de Shapiro-Wilk para las simulaciones fallaba para valores mayores que 5000 y la de Kolmogorov-Smirnov para muestras de un tamaño menores que 4.

La obtención de la expresión para S_Z^2 así como el código se presenta en el Apéndice [A](#), donde será necesario proporcionar el tamaño deseado para la muestra, el intercepto, la pendiente, el coeficiente de correlación, la media del vector z , que en este caso será tratado como los valores predichos por el modelo a validar, la suma de cuadrados del error y el ancho de banda que controla la varianza. Para generar los valores se escribe en R `PruebaNorm(n,b0,b1,R2,muz,SCE,a)`.

Como se mencionó anteriormente se eligieron modelos exactos y precisos, en este caso $b_0 = 0$ y $b_1 = 1$, $R^2 = 0.80, 0.85, 0.90, 0.95$, la media será fijada en $muz = 5$, la suma de cuadrados del error en $SCE = 1$ y el ancho de banda en $a = 2$.

4.2. Condiciones para la obtención de los tamaños de muestra

La función que calcula los tamaños de muestra promedio, máximo y conjunto que cumplen las condiciones descritas en el Capítulo 3, ecuaciones 3.2.4, 3.2.2 y 3.3.8, necesitan el nivel de confianza, las cotas para los errores de estimación, el cuadrado medio del error, la varianza y la media de los valores que predice el modelo a validar. Estos últimos tres valores serán obtenidos mediante las muestras piloto que se van a simular y que tendrán tamaños 5, 10, 15, 20, 25, 30. El nivel de confianza será del 95% y las cotas serán 0.1, 0.2, 0.5, 0.8, 1, 2.

Así una vez que se obtiene la muestra piloto, para generar los tamaños de muestra se llama a la función $Tamaño(z, y, B0, B1, NivConf)$, z corresponde al vector de valores predichos, y a los observados, $B0 = B1 = 0.1, 0.2, 0.5, 0.8, 1, 2$ y $NivConf = .95$

4.3. Evaluando la eficiencia de los métodos

Para evaluar la eficiencia de los métodos se crearon dos funciones. La primera proporciona una matriz que contiene los tamaños de muestra promedio para cada una de los tamaños de las muestras piloto y para cada una de las cotas. Dentro de la función primero se obtienen las muestras piloto y con base en ellas, se calcula n_{prom} , n_{max} y n_{con} con la función $Tamaño(z, y, B0, B1, NivConf)$. Para llamarla se escribe $TamMuestras(b0, b1, muz, SCE, a, R2, NivConf, mp, B01, nmp)$, de donde ya se han especificado algunos parámetros, los faltantes son el número de muestras piloto a simular que se fijó en 500 (mp), $B01$ corresponde a las cotas del error de estimación y será tratado como un vector, es decir $B01 = (0.1, 0.2, 0.5, 0.8, 1, 2)$ y nmp corresponde a los tamaños que tendrán las muestras piloto, siendo también un vector, $nmp = (5, 10, 15, 20, 25, 30)$. Entonces lo que se

hace es tomar la primera cota (0.1), luego el primer tamaño (5) y se obtiene la muestra piloto con la función `PruebaNorm`, para luego obtener n_{prom} , n_{max} y n_{con} utilizando la función `Tamaño` y se guarda en la columna correspondiente; este proceso se repite hasta completar el número de muestras piloto deseadas (500). Esto mismo se hace para los siguientes tamaños de muestra y cuando termina pasa a la siguiente cota. Una vez que se terminan las cotas la función `TamMuestras` da como resultado una tabla como la siguiente:

R^2	0.95											
Cotas	0.1							0.2				...
n piloto	5			10				...	5	10	...	
Método	n_{prom}	n_{max}	n_{con}	n_{prom}	n_{max}	n_{con}	...					
1	n_{p1}	n_{m1}	n_{c1}	...								
2	n_{p2}	n_{m2}	n_{c2}	...								
⋮	⋮											
500	n_{p500}	n_{m500}	n_{c500}	...								

Una segunda función permite medir la eficiencia de los métodos a partir de estos tamaños de muestra obtenidos. Para llamarla se escribe $eficiencia(b0, b1, muz, SCE, a, R2, NivConf, mp, B01, nmp, rep)$ que recibe los valores descritos anteriormente, además del número de réplicas que se necesitan, en este caso $rep = 250$.

Al inicio se obtienen los tamaños de muestra promedio, máximo y conjunto con la función `TamMuestras`. Después para la primera cota (0.1) y el primer tamaño (5), se toman los datos de las primeras tres columnas de `TamMuestras`. Para la primera terna de las 500, se obtienen muestras de los tamaños correspondientes a ella y se evalúa la eficiencia con las proporciones definidas anteriormente como $p_c = \frac{\sum_{i=1}^{500} ec_i}{500}$ y $p_p = \frac{\sum_{i=1}^{500} ep_i}{500}$.

Para n promedio y n máximo:

- si se cumplen las desigualdades $t_{(\alpha/2, n_{pi}-2)} \left(\sqrt{\frac{MS_{res}}{(n_{pi}-1)S_Z^2}} \right) \leq B_1$ y $t_{(\alpha/2, n_{pi}-2)} \left(\sqrt{\frac{1}{n_{pi}} MS_{res} \left(1 + \frac{\bar{z}^2}{S_Z^2} \right)} \right) \leq B_0$ entonces $ec_i = 1$, en caso contrario $ec_i = 0$;
- si $1 \in \left(\hat{\beta}_1 - t_{(\alpha/2, n_{pi}-2)} \left(\sqrt{\frac{MS_{res}}{S_{ZZ}}} \right), \hat{\beta}_1 + t_{(\alpha/2, n_{pi}-2)} \left(\sqrt{\frac{MS_{res}}{S_{ZZ}}} \right) \right)$ y $0 \in \left(\hat{\beta}_0 - t_{(\alpha/2, n_{pi}-2)} \left(\sqrt{MS_{res} \left(\frac{1}{n_{pi}} + \frac{\bar{z}^2}{S_{ZZ}} \right)} \right), \hat{\beta}_0 + t_{(\alpha/2, n_{pi}-2)} \left(\sqrt{MS_{res} \left(\frac{1}{n_{pi}} + \frac{\bar{z}^2}{S_{ZZ}} \right)} \right) \right)$ entonces $ep_i = 1$, en caso contrario $ep_i = 0$.

Por último, para n conjunta:

- si $\frac{F_{\alpha, 2, n_{ci}-2}}{\frac{n_{ci}}{4MS_{res}} \left[(1+S_Z^2+\bar{z}^2) - \sqrt{(1+S_Z^2+\bar{z}^2)^2 - 4S_Z^2} \right]} \leq B_0^2 + B_1^2$, entonces $ec_i = 1$, en caso contrario $ec_i = 0$;
- si $\frac{\left(\hat{\beta}_- \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)' \mathbf{z}' \mathbf{z} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_- \\ 1 \end{pmatrix}}{2MS_{res}} \leq F_{\alpha, 2, n_{ci}-2}$ entonces $ep_i = 1$, en caso contrario $ep_i = 0$.

Esto se realiza para cada uno de los tamaños de muestra de cada una de las cotas. Cuando se terminan las cotas y tamaños de muestra se tienen las proporciones para la primera réplica. Así este proceso se repite 250 veces para obtener las réplicas necesitadas. La función da como resultados tres tablas (uno por cada método: promedio, máximo y conjunto) como la siguiente:

R^2	0.95						
Cota	0.1			0.2			...
n piloto	5	10	...	5	10	...	
Eficiencia	p_c	p_p	p_c	p_p	...		
1	p_{c1}	p_{p1}	...				
2	p_{c2}	p_{p2}	...				
⋮	⋮						
250	p_{c250}	p_{p250}	...				

4.4. Resultados de la simulación

4.4.1. Tamaños de muestra Promedio, Máximo y Conjunto

Para cada modelo exacto con la R^2 especificada, se obtuvieron 500 tamaños de muestra y se replicaron 250 veces. Para una réplica se obtuvieron los gráficos de caja de los 500 tamaños de muestra obtenidos. En las figuras 4.2, 4.1, 4.3, 4.4, 4.5 y 4.6 se presentan los gráficos correspondientes para cada una de las cotas 0.1, 0.2, 0.5, 0.8, 1 y 2, respectivamente para modelos con $R^2 = 0.80$.

En en cada una de las figuras mencionadas anteriormente, el primer grupo de promedio, máximo y conjunto corresponde a una muestra piloto de tamaño 5, el segundo grupo corresponde a un tamaño 10 y así sucesivamente hasta tamaño 30. Se puede observar que para cada una de las cotas, con una muestra piloto de tamaño 5, se obtienen valores extremos muy grandes y conforme se aumenta el tamaño piloto, los valores extremos se hacen más pequeños.

Si se comparan cada una de las figuras, se observa que cuando se aumenta la cota los tamaños de muestra van disminuyendo: con una cota de 0.1 para una muestra piloto de 5 se pueden obtener tamaños muestrales de 300,000 y con una cota de 2 tamaños muestrales de 600. Esto es consistente con las funciones para el cálculo de tamaños de muestra presentados en el Capítulo 3.

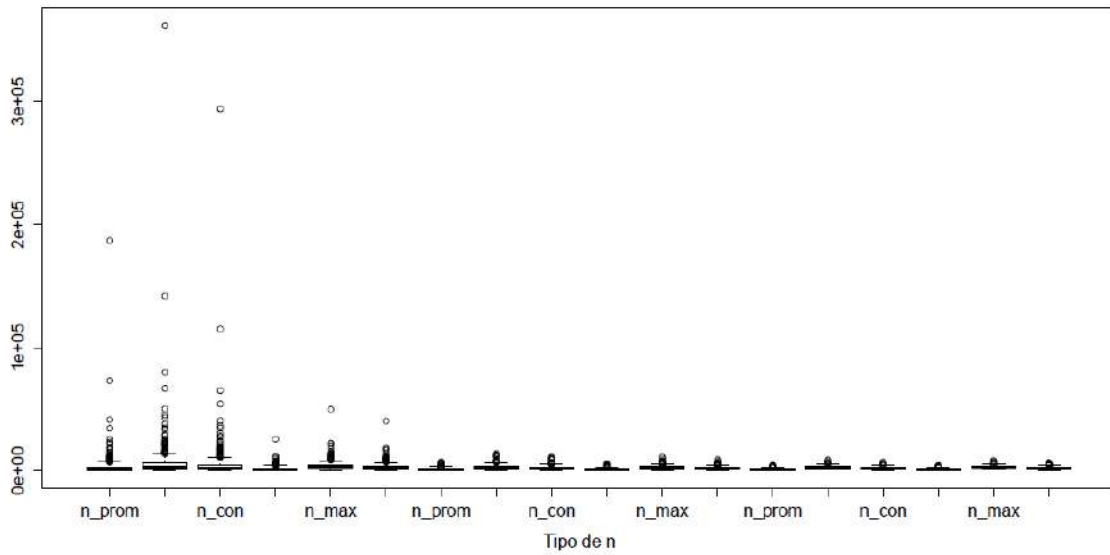


Figura 4.1: Gráficos de caja para los tamaños de muestra promedio, máximo y conjunto correspondientes a la cota 0.1

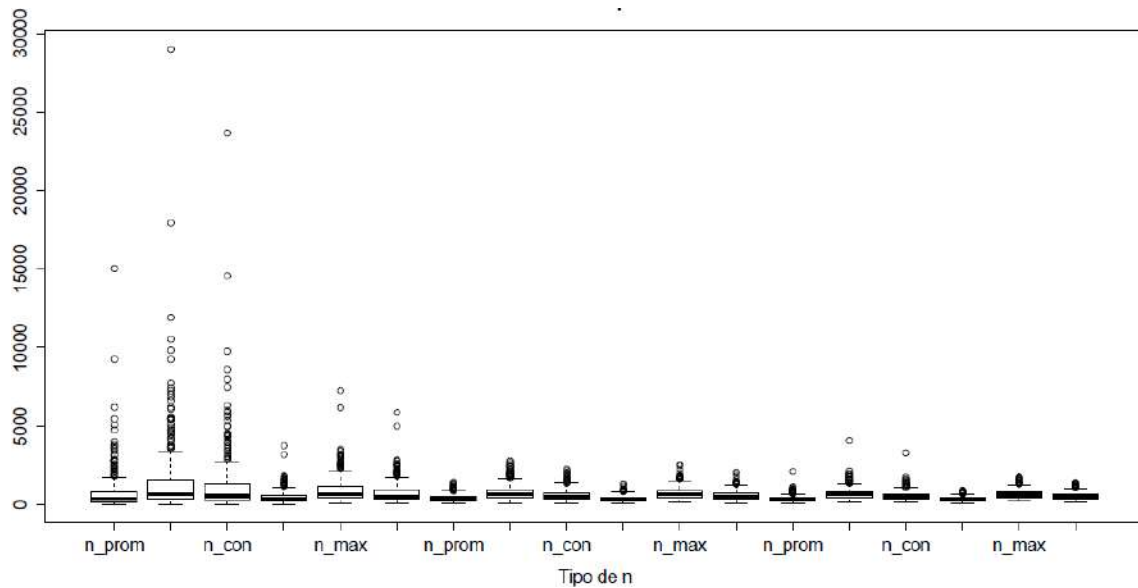


Figura 4.2: Gráficos de caja para los tamaños de muestra promedio, máximo y conjunto correspondientes a la cota 0.2

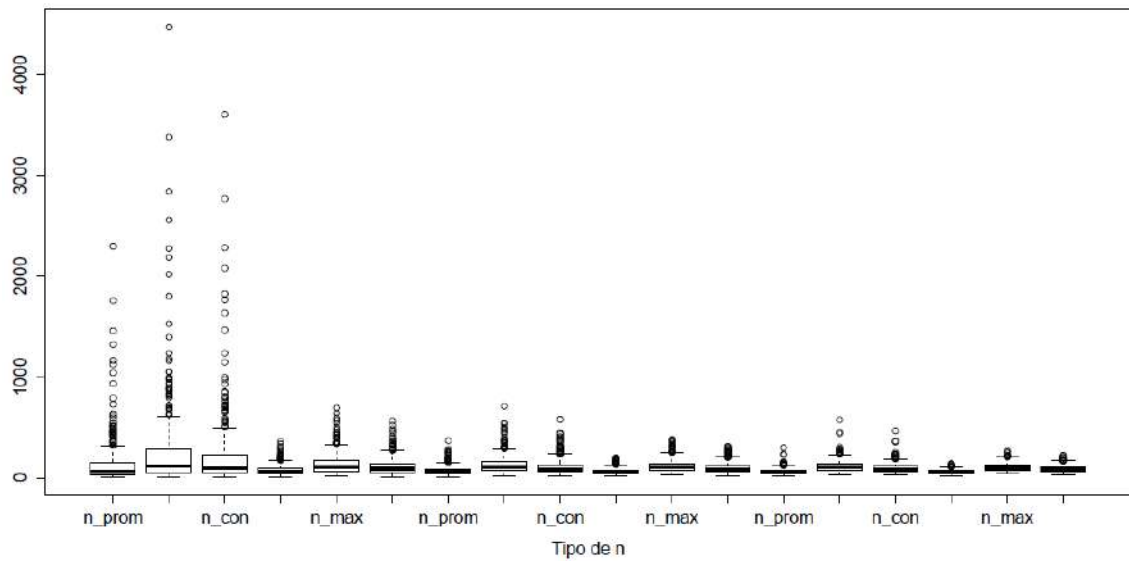


Figura 4.3: Gráficos de caja para los tamaños de muestra promedio, máximo y conjunto correspondientes a la cota 0.5

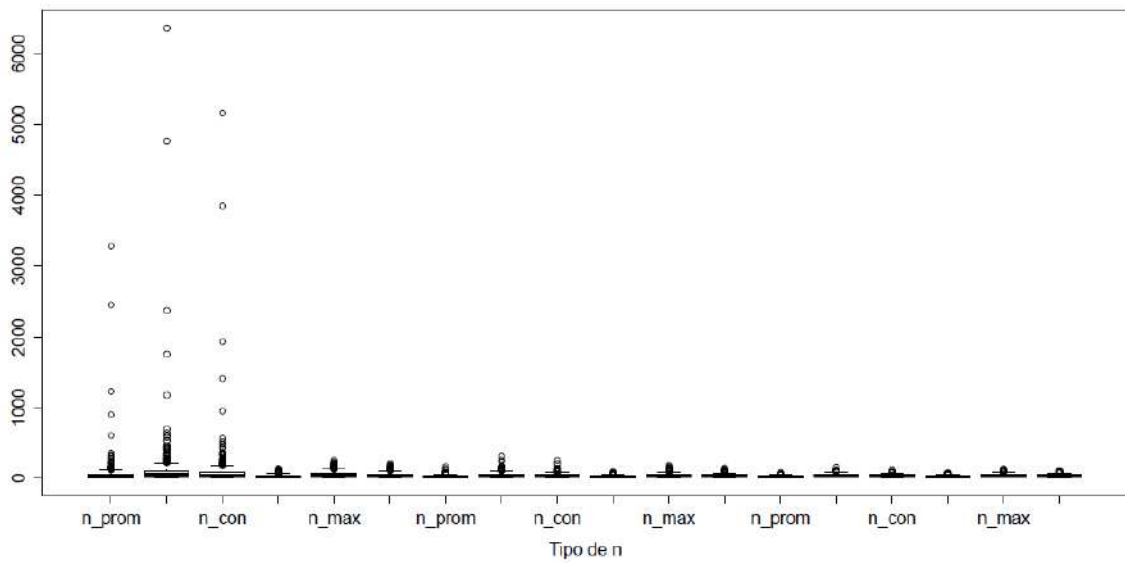


Figura 4.4: Gráficos de caja para los tamaños de muestra promedio, máximo y conjunto correspondientes a la cota 0.8

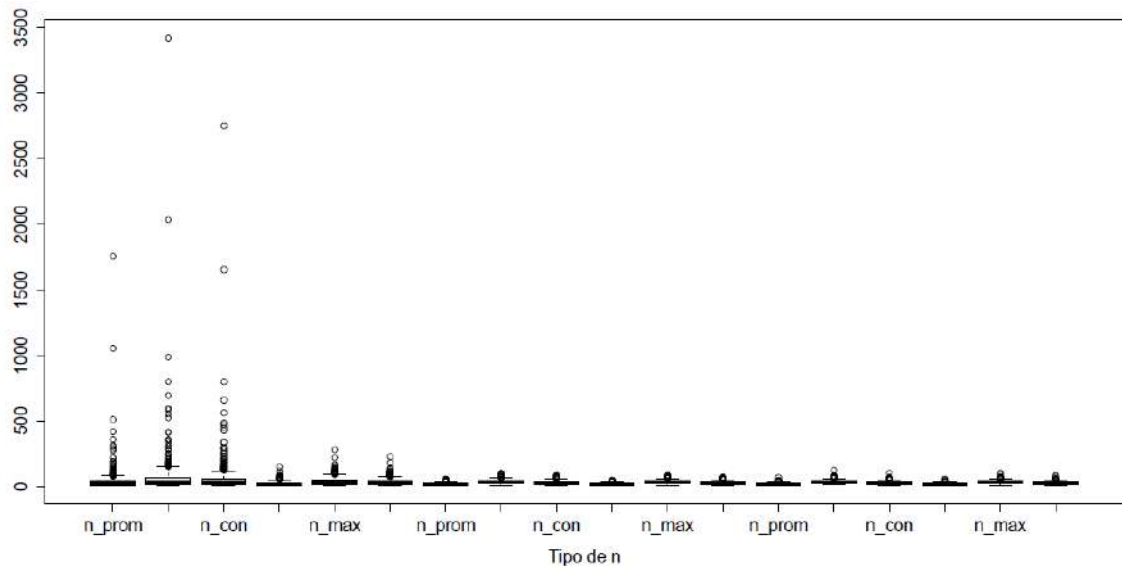


Figura 4.5: Gráficos de caja para los tamaños de muestra promedio, máximo y conjunto correspondientes a la cota 1

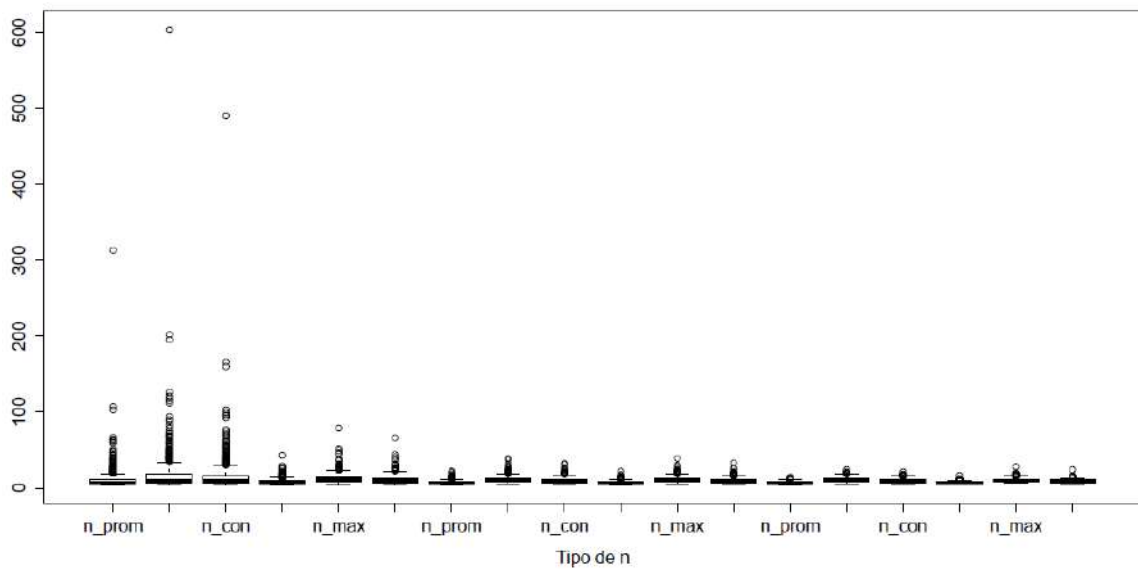


Figura 4.6: Gráficos de caja para los tamaños de muestra promedio, máximo y conjunto correspondientes a la cota 2

Las Figuras 4.7 y 4.8 corresponden a los gráficos de caja de la cota 0.1 sin los tamaños de muestra piloto 5 para 4.7 y 5 y 10 para 4.8, esto con la finalidad de observar un poco mejor el comportamiento. Entonces de la Figura 4.7 se tiene que con una muestra piloto de 10 todavía se generan valores extremos más grandes, y de la Figura 4.8 se tiene que a partir de una muestra piloto de 15 ya no se observa una disminución de una forma tan marcada como en los casos de 5 y 10. Así se tiene más estabilidad para los casos a partir de 15. Otra situación que se puede apreciar mejor en la figura 4.8 es que los tamaños de muestra del método conjunto quedan entre los del promedio y máximo, siendo este último el que genera los tamaños de muestra más grandes.

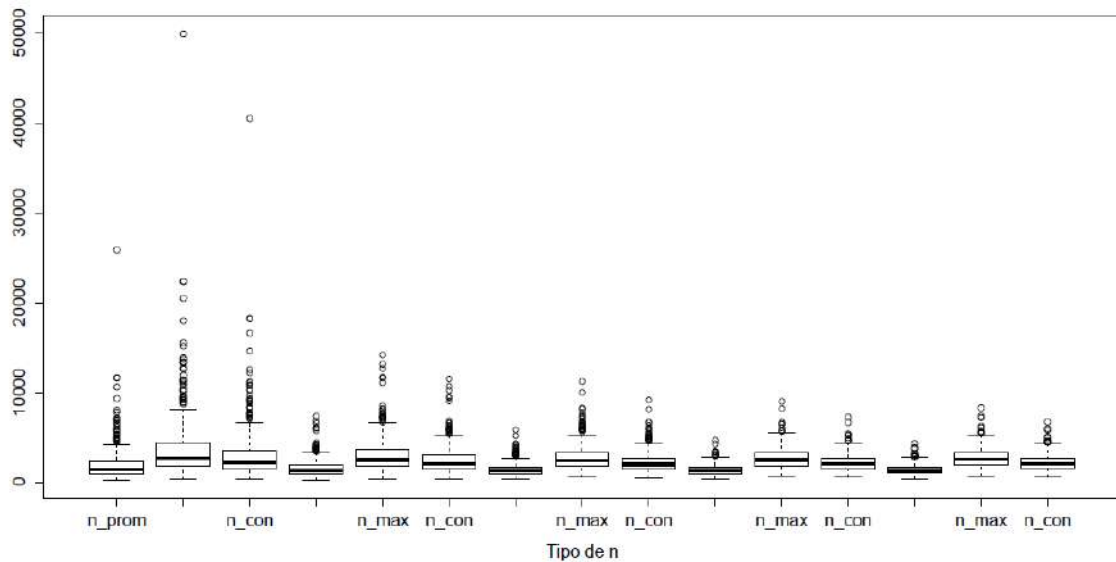


Figura 4.7: Gráficos de caja para los tamaños de muestra de la cota 0.1, muestra piloto de 10 a 30

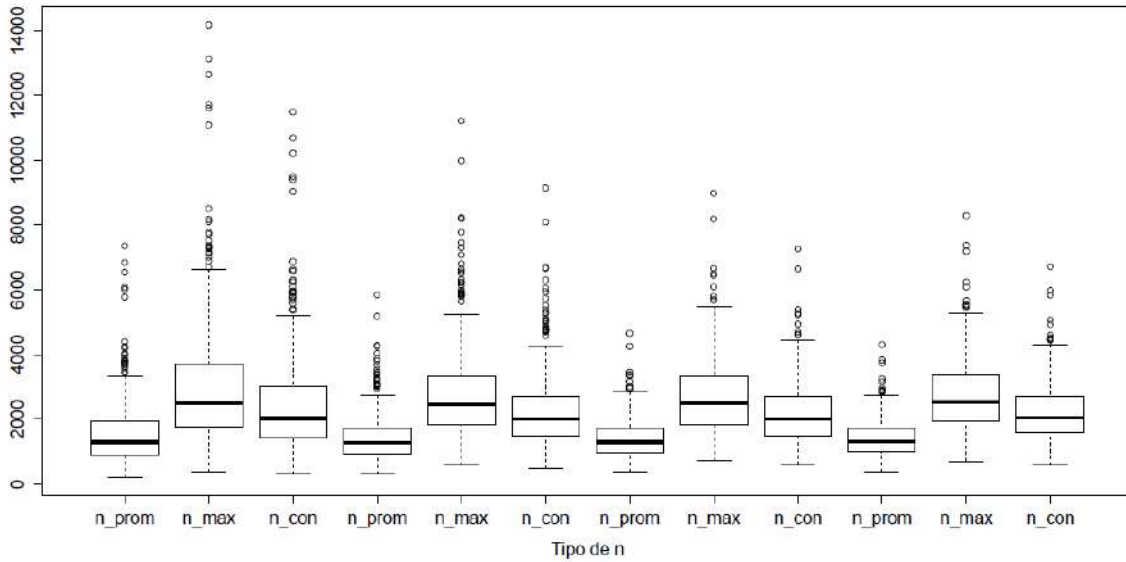


Figura 4.8: Gráficos de caja para los tamaños de muestra de la cota 0.1, muestra piloto de 15 a 30

Los tamaños de muestra correspondientes a $R^2 = 0.85, 0.90, 0.95$, tuvieron un comportamiento similar al de $R^2 = 0.80$. Los gráficos se presentan en el Apéndice B.

También se obtuvieron las medias y medianas de los tamaños de muestra promedio, máximo y conjunto para cada tamaño de muestra piloto y cota. Los resultados se presentan en los Cuadros 4.1, 4.2, 4.3 y 4.4 para $R^2 = 0.80, 0.85, 0.90$ y 0.95 respectivamente. Se observa que la media es mucho más grande que la mediana, debido a los valores extremos.

		5			10			15			20			25			30		
		n_{prom}	n_{max}	n_{con}	n_{prom}	n_{max}	n_{con}	n_{prom}	n_{max}	n_{con}	n_{prom}	n_{max}	n_{con}	n_{prom}	n_{max}	n_{con}	n_{prom}	n_{max}	n_{con}
0.1	Media	3256	6306.08	5112.99	1886.58	3640.01	2950.52	1523.78	2935.12	2379.99	1442.89	2777.18	2252.33	1409.98	2712.68	2200.15	1418.64	2728.66	2213.21
	Mediana	1476.25	2862.5	2316	1407.5	2716	2200	1297.5	2495.5	2026	1280.75	2461	1999.5	1292.5	2486	2016.5	1312.75	2525.5	2048
0.2	Media	688.595	1330.48	1079.75	466.375	897.09	727.938	397.101	762.086	618.852	382.197	732.924	595.242	365.081	699.598	568.288	349.476	669.4	543.772
	Mediana	354.5	683	554.5	347.25	667	541	338.25	648.5	527	340.75	653	530	338.25	648.5	526.5	327.5	627.5	509.5
0.5	Media	128.981	246.41	200.65	72.11	135.53	110.91	68.323	128.026	104.882	63.345	118.308	97.024	61.741	115.178	94.5	57.824	107.614	88.39
	Mediana	64.25	120	98.5	58.5	109	90	57.25	106.5	88	57	106	87	55.5	103	84.5	54.5	101	83
0.8	Media	61.017	114.67	93.978	31.168	56.466	46.898	27.787	49.87	41.558	26.031	46.47	38.804	25.789	45.964	38.402	26.201	46.718	39.032
	Mediana	25.5	46	38.5	26	46	38	23.5	42	35	23	41	34	23.5	42	35	25	44	37
1	Media	39.105	72.194	59.614	21.143	37.182	31.278	18.414	31.83	26.968	17.656	30.334	25.734	18.094	31.16	26.44	17.619	30.236	25.664
	Mediana	19	33	27	17	29	25	17	29	24	16.5	28	24	17	29	25	16.5	28	24
2	Media	11.376	18.518	16.11	8.174	12.274	11.06	7.316	10.596	9.728	7.302	10.568	9.726	7.146	10.284	9.468	7.015	10.028	9.308
	Mediana	7	10	9	7.5	11	10	7	10	9	7	10	9	7	10	9	7	10	9

Cuadro 4.1: Media y mediana de los tamaños de muestra para modelos con $R^2 = 0.80$

		5			10			15			20			25			30		
		n_{prom}	n_{max}	n_{con}	n_{prom}	n_{max}	n_{con}	n_{prom}	n_{max}	n_{con}	n_{prom}	n_{max}	n_{con}	n_{prom}	n_{max}	n_{con}	n_{prom}	n_{max}	n_{con}
0.1	Media	2238.64	4337.05	3513.66	1316.28	2539.04	2057.63	1113.38	2143.86	1738.26	1041.93	2004.74	1625.71	1038.16	1996.58	1619.33	984.608	1892.69	1535.37
	Mediana	1063.75	2050	1672.5	1036.25	1994	1619.5	951.75	1830.5	1486.5	922.5	1772.5	1439	950.75	1828	1483	914.5	1757	1426
0.2	Media	522.421	1009.24	818.458	316.431	607.474	493.174	285.057	546.15	443.608	266.782	510.53	414.874	259.9	497.03	403.99	248.723	475.328	386.458
	Mediana	241.75	462.5	377	245.5	471.5	382	249.75	478	388	235.25	450	366	242	463	376	233.5	445.5	363
0.5	Media	88.903	168.67	137.682	52.117	96.942	79.66	46.255	85.464	70.402	45.621	84.146	69.34	43.86	80.76	66.618	41.744	76.66	63.25
	Mediana	48	89	73	40.5	74.5	61.5	40.5	74	61	41.5	76	63	40	73	61	39	71	59
0.8	Media	34.866	63.946	52.918	23.842	42.372	35.45	21.103	36.996	31.156	19.764	34.39	29.014	19.35	33.608	28.406	18.781	32.468	27.458
	Mediana	18.75	32.5	27.5	19.5	34	28	18.5	32	27	18	31	26	18.5	32	27	17.5	30	25
1	Media	26.386	47.546	39.67	16.661	28.588	24.28	14.341	24.064	20.69	13.675	22.744	19.568	13.235	21.91	18.932	13.54	22.454	19.358
	Mediana	13.5	22	19	13.5	22	19	13	21	18	13	21	18	12.5	20	17	13	21	18
2	Media	8.873	13.744	12.236	6.926	9.848	9.074	6.373	8.748	8.176	6.208	8.418	7.9	6.114	8.234	7.782	6.039	8.076	7.6
	Mediana	6	8	8	6	8	8	6	8	8	6	8	8	6	8	7	6	8	7

Cuadro 4.2: Media y mediana de los tamaños de muestra para modelos con $R^2 = 0.85$

		5			10			15			20			25			30		
		n_{prom}	n_{max}	n_{con}	n_{prom}	n_{max}	n_{con}	n_{prom}	n_{max}	n_{con}	n_{prom}	n_{max}	n_{con}	n_{prom}	n_{max}	n_{con}	n_{prom}	n_{max}	n_{con}
0.1	Media	1525.22	2955.35	2391.84	821.557	1585.01	1282.93	696.704	1340.38	1086.67	650.214	1249.91	1013.63	629.693	1209.69	981.268	613.611	1178.44	955.95
	Mediana	660.75	1266	1030.5	656.75	1264.5	1026	602.25	1158	939	566.75	1090	883	574.75	1103	895.5	571.5	1099.5	890.5
0.2	Media	386.552	746.964	604.696	206.361	394.98	320.842	177.186	338.074	274.968	167.059	318.344	259.002	163.034	310.408	252.63	165.73	315.538	256.828
	Mediana	172.5	327.5	268	160.25	304	249	152.25	291	236	146.5	279	227	150.5	285.5	233	154.25	293.5	239
0.5	Media	83.858	159.218	129.73	37.632	68.98	56.97	31.449	56.95	47.286	28.404	51.034	42.5	29.164	52.494	43.67	28.548	51.266	42.712
	Mediana	28.25	51	42	28.75	52	43	28	50	42	26	46	38	27.5	49	41	27.5	49	41
0.8	Media	25.191	45.272	37.742	16.669	28.578	24.284	14.752	24.844	21.286	13.873	23.158	19.906	13.145	21.752	18.768	13.487	22.372	19.286
	Mediana	13.75	23	20	14	23	20	13.5	22	19	13	21	18	12.5	20	17	13	21	18
1	Media	20.1	35.368	29.784	10.992	17.69	15.456	10.64	17.008	14.932	9.995	15.772	13.93	9.757	15.33	13.586	9.826	15.486	13.724
	Mediana	10.25	16	14	9	14	13	9.5	15	14	9	14	13	9	14	13	9.5	15	13
2	Media	7.236	10.61	9.646	5.607	7.362	7.01	5.408	6.878	6.632	5.336	6.714	6.536	5.245	6.516	6.354	5.29	6.594	6.386
	Mediana	5.5	7	7	5.5	7	6	5	6	6	5	6	6	5	6	6	5	6	6

Cuadro 4.3: Media y mediana de los tamaños de muestra para modelos con $R^2 = 0.90$

		5			10			15			20			25			30		
		n_{prom}	n_{max}	n_{con}	n_{prom}	n_{max}	n_{con}	n_{prom}	n_{max}	n_{con}	n_{prom}	n_{max}	n_{con}	n_{prom}	n_{max}	n_{con}	n_{prom}	n_{max}	n_{con}
0.1	Media	687.153	1331.508	1074.736	409.399	788.834	637.71	350.986	674.064	546.074	332.444	637.568	517.006	298.725	572.274	464.262	298.917	572.394	464.572
	Mediana	298.75	567.5	467.5	310.75	599.5	483.5	303.25	583.5	472	293.25	562.5	455.5	268	513.5	416.5	280	536	435
0.2	Media	183.72	353.738	285.898	94.8	179.616	146.16	93.925	177.61	144.736	81.693	153.838	125.568	79.273	149.106	121.792	78.704	147.932	120.906
	Mediana	90.75	173.5	140.5	73.75	139.5	113	80.75	152.5	124	70.75	133	109	72	135.5	111	73.5	138	113
0.5	Media	28.187	51.048	42.364	19.41	33.888	28.524	17.337	29.818	25.264	16.499	28.164	23.95	15.632	26.468	22.598	15.504	26.218	22.372
	Mediana	14	24	21	16	27	23	16	27	23	15.5	26	22	15	25	21	14.5	24	21
0.8	Media	14.178	24	20.478	10.078	15.944	14.02	8.633	13.186	11.822	8.3	12.536	11.274	8.306	12.564	11.344	8.025	12.032	10.922
	Mediana	8.5	13	12	8.5	13	11	8	12	11	8	12	11	8	12	11	7.5	11	10
1	Media	9.534	15.042	13.208	7.429	10.83	9.866	6.954	9.894	9.13	6.819	9.628	8.928	6.674	9.346	8.68	6.482	8.962	8.412
	Mediana	7	10	9	6.5	9	9	6.5	9	8	6.5	9	8	6.5	9	8	6.5	9	8
2	Media	5.24	6.964	6.592	4.436	5.382	5.332	4.399	5.264	5.258	4.401	5.236	5.218	4.342	5.122	5.124	4.306	5.062	5.074
	Mediana	4.5	5	5	4	5	5	4.5	5	5	4.5	5	5	4.5	5	5	4.5	5	5

Cuadro 4.4: Media y mediana de los tamaños de muestra para modelos con $R^2 = 0.95$

Estos resultados se graficaron para ver algún posible comportamiento según el aumento del tamaño de la muestra piloto o aumento de la cota. Las gráficas para cada R^2 del aumento del tamaño de la muestra piloto se presentan en las figuras 4.9, 4.10, 4.11 y 4.12; las correspondientes al aumento de la cota para $R^2 = 0.80$ en la figura 4.13 y para $R^2 = 0.85, 0.90, 0.95$ se encuentran en el Apéndice B.

En estas figuras, P corresponde al promedio, M corresponde al máximo y C al conjunto. Se observa conforme se aumenta el tamaño de la muestra piloto de la muestra, la media de los tamaños de muestra obtenidos disminuyen y la mediana en algunos casos tiende a disminuir, aunque en otros se mantiene o tienen valores muy cercanos. También se observa que las medias y medianas de los tamaños de muestra del método conjunto quedan entre los métodos máximo y promedio.

Respecto a la cota, se observa que la media y la mediana disminuyen a medida que se aumenta la cota.

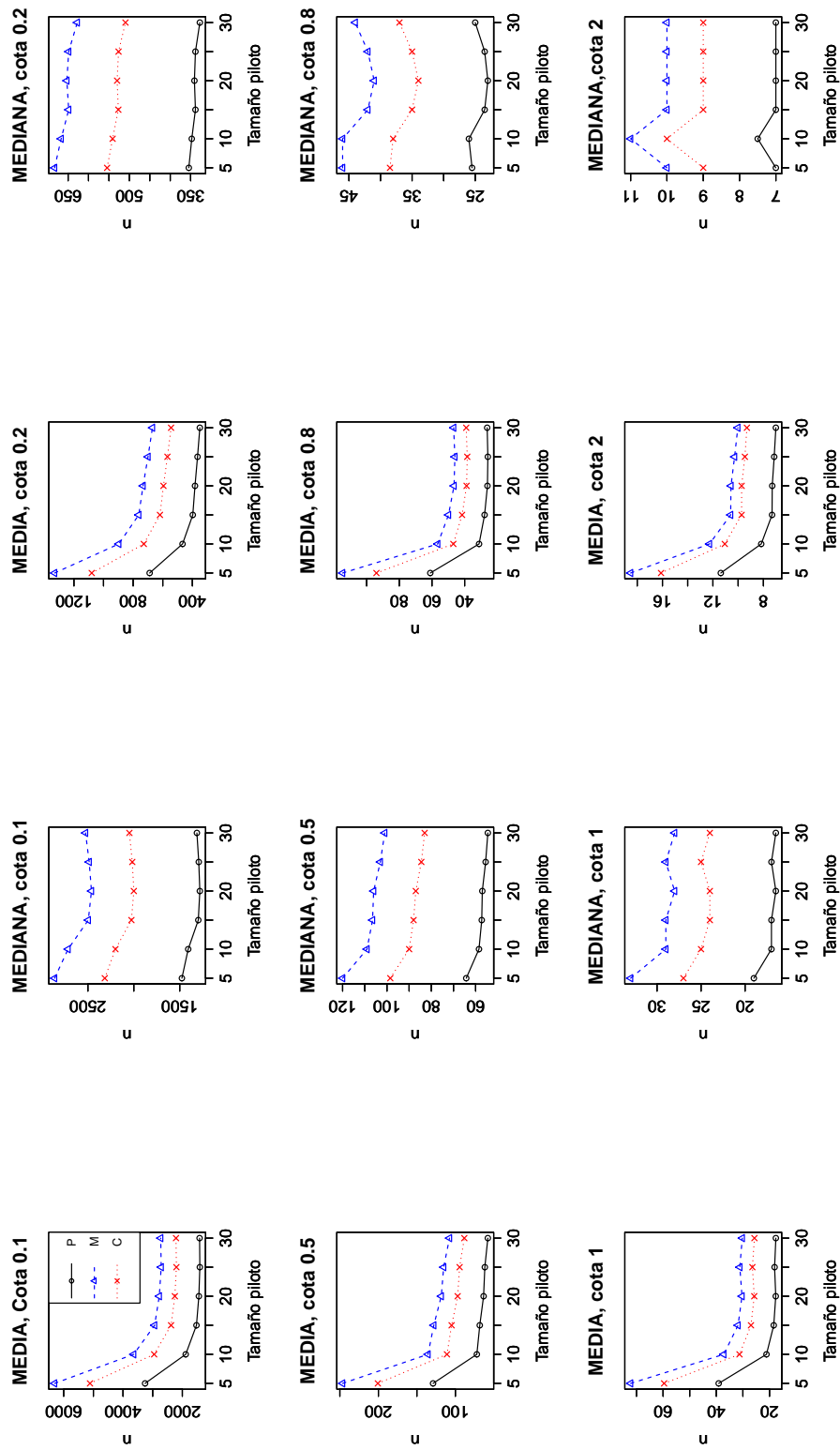


Figura 4.9: Medias y medianas aumentando la muestra piloto, $R^2 = 0.80$

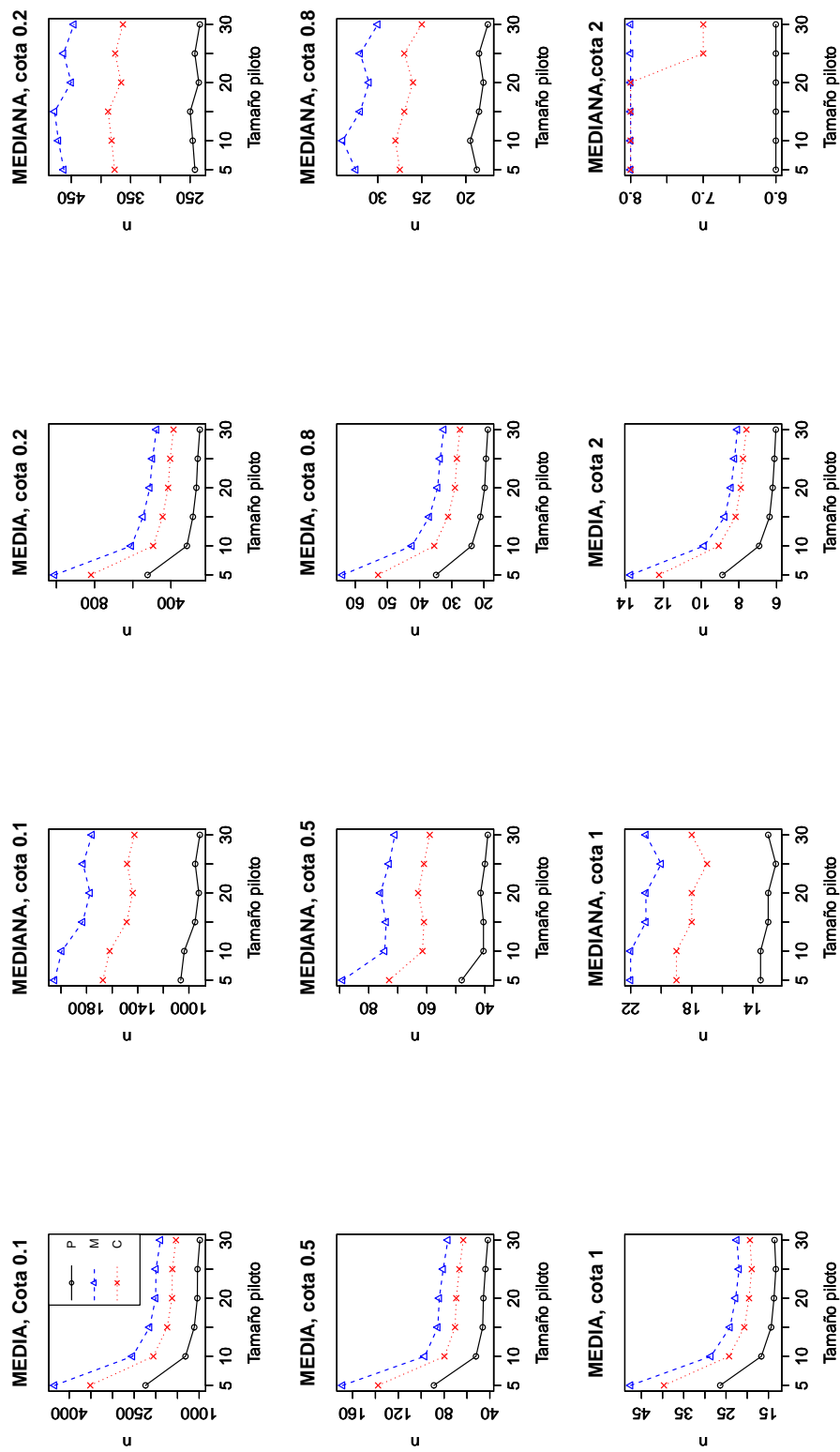


Figura 4.10: Medias y medianas aumentando la muestra piloto, $R^2 = 0.85$

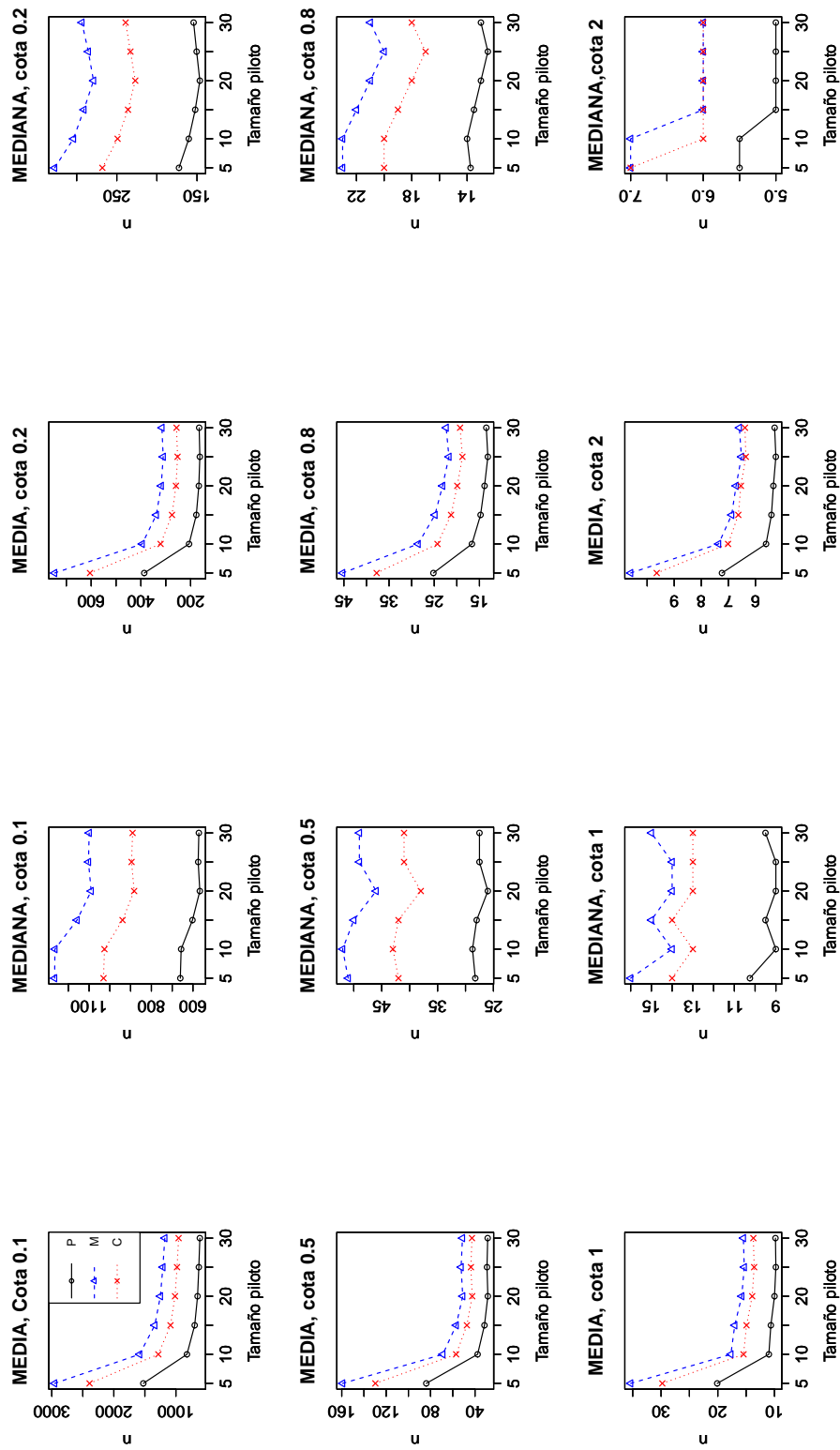


Figura 4.11: Medias y medianas aumentando la muestra piloto, $R^2 = 0.90$

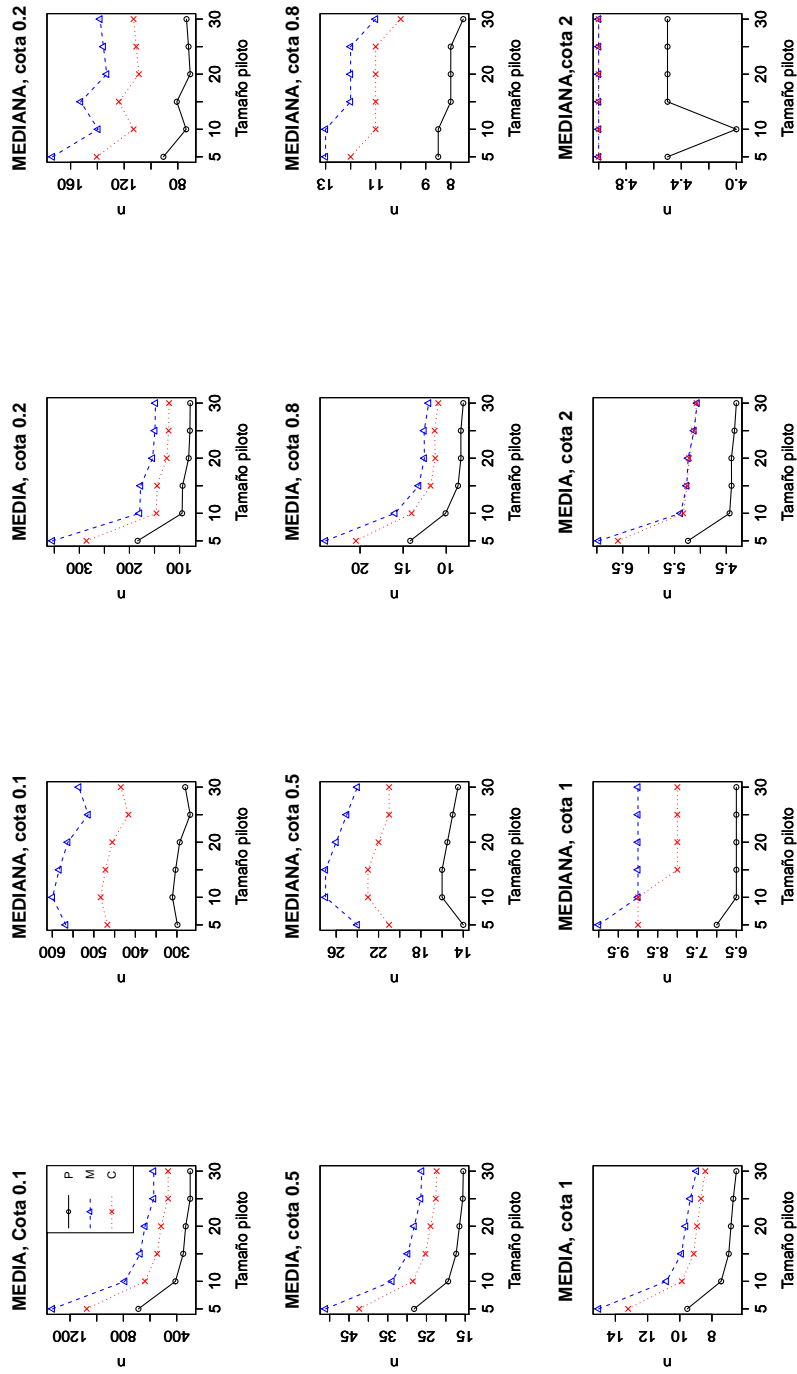


Figura 4.12: Medias y medianas aumentando la muestra piloto, $R^2 = 0.95$

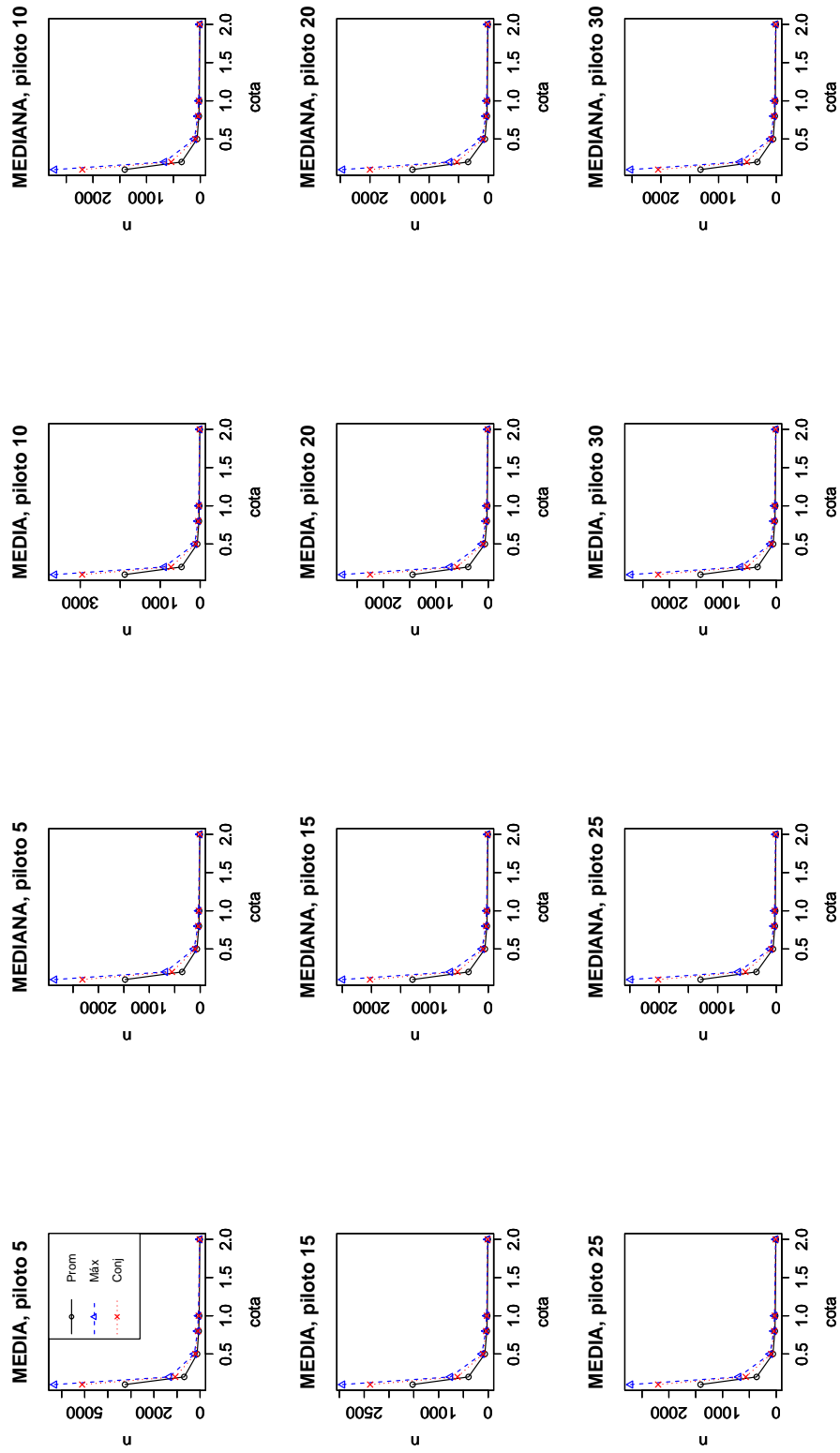


Figura 4.13: Medias y medianas aumentando la cota, $R^2 = 0.80$

4.4.2. Eficiencia de los métodos Promedio, Máximo y Conjunto

La eficiencia de los métodos fue medido por la proporción de veces que la cota estimada fue menor o igual que las cotas propuestas (eficiencia del error de estimación) y por la proporción de veces que el parámetro estaba contenido en el intervalo (región) de confianza (eficiencia del parámetro). Se realizaron 250 réplicas, por lo que se tuvieron 250 proporciones para el error de estimación y 250 para el parámetro. Las proporciones de las 250 réplicas para el método promedio con $R^2 = 0.80$ se presentan en el Apéndice B.

Para cada método se obtuvieron los gráficos de caja para las proporciones de eficiencia correspondientes al error de estimación y las proporciones de eficiencia correspondientes al parámetro, éstos se presentan en las figuras 4.14, 4.15, 4.16, 4.17, 4.18 y 4.19, en donde en cada una de ellas, el primer grupo de 6 corresponde a la cota 0.1, el segundo a la cota 0.2 y así sucesivamente hasta la cota 2.

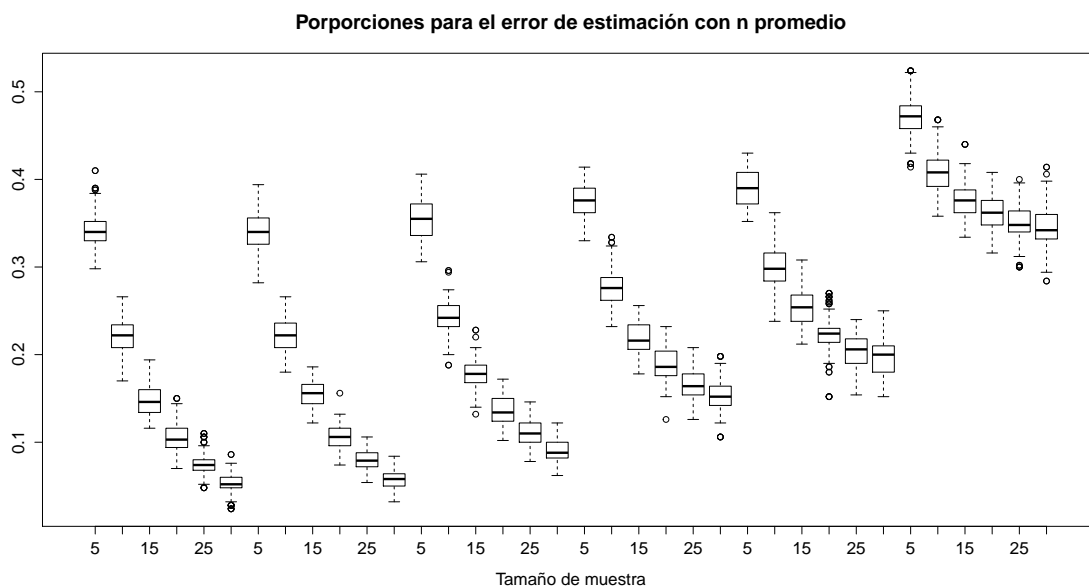


Figura 4.14: Gráficos de caja para la eficiencia del error de estimación del método promedio, $R^2 = 0.80$

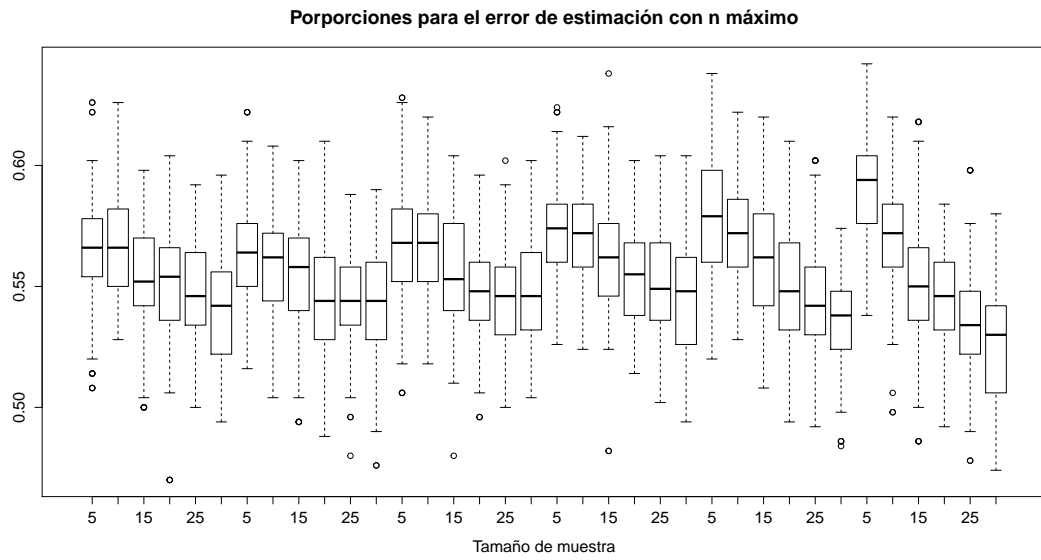


Figura 4.15: Gráficos de caja para la eficiencia del error de estimación del método máximo, $R^2 = 0.80$

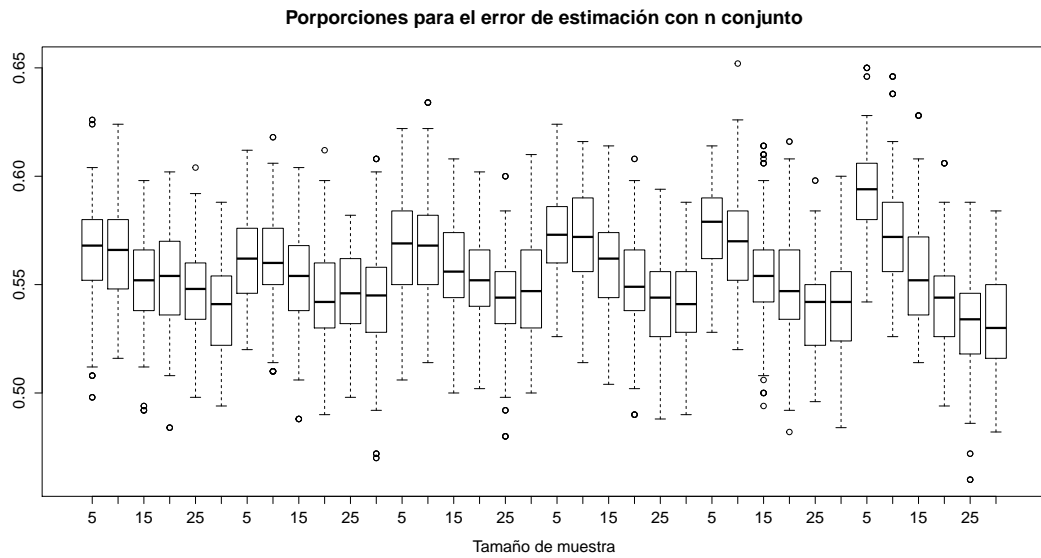


Figura 4.16: Gráficos de caja para la eficiencia del error de estimación del método conjunto, $R^2 = 0.80$

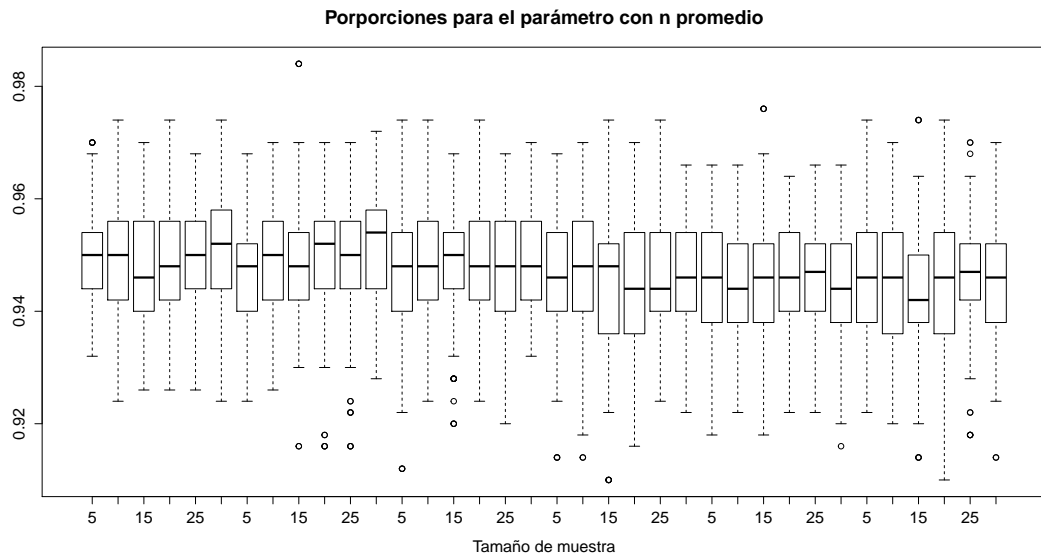


Figura 4.17: Gráficos de caja para la eficiencia del parámetro del método promedio, $R^2 = 0.80$

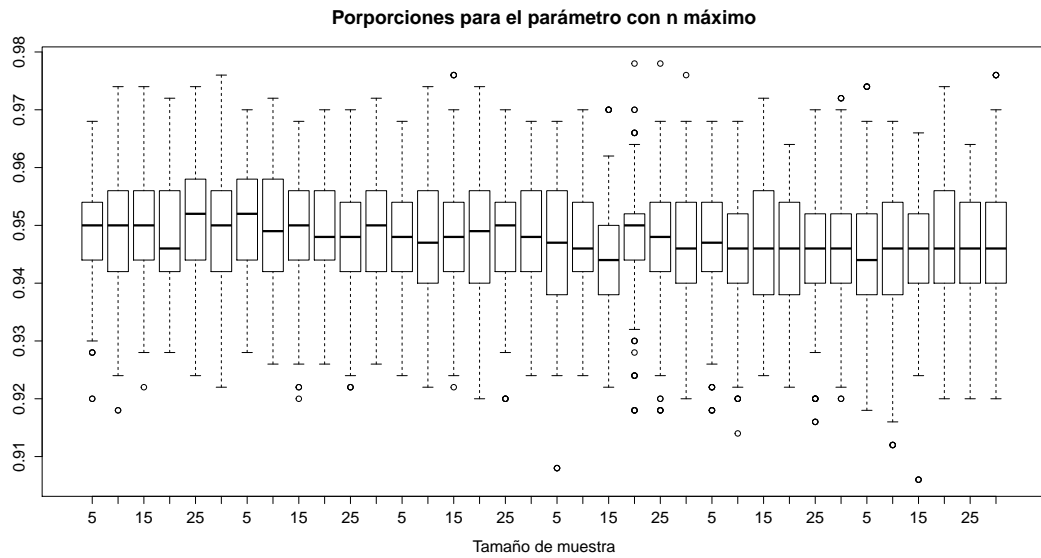


Figura 4.18: Gráficos de caja para la eficiencia del parámetro del método máximo, $R^2 = 0.80$

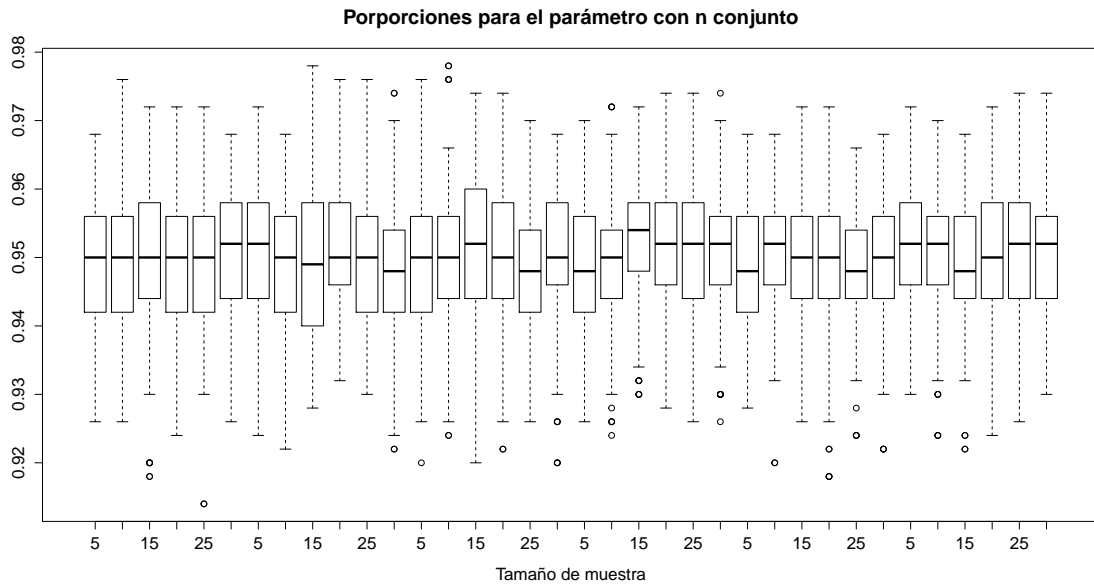


Figura 4.19: Gráficos de caja para la eficiencia del parámetro del método conjunto, $R^2 = 0.80$

En la figura 4.14, para cada cota se observa que conforme se aumenta el tamaño de la muestra piloto las proporciones del error de estimación del promedio disminuyen, es decir, se tiene menor eficiencia cuando se incrementa el tamaño de la muestra piloto. También, se tiene que cuando la cota es mayor la eficiencia del método promedio aumenta. Para el caso del máximo y conjunto (Figuras 4.15 y 4.16), de igual forma que con el promedio, se tiene que a mayor muestra piloto disminuye la eficiencia, aunque no es tan marcado como lo es con el método promedio; algo un poco más difícil de determinar para estos últimos dos métodos es, si se tiene una mejor eficiencia cuando la cota aumenta. Para ello, en las figuras 4.20 y 4.21 se presentan los gráficos de caja ordenados por muestra piloto, aumentando la cota.

Para la eficiencia del parámetro para el promedio, máximo y conjunto (Figuras referidas a EFPP80, 4.18 y 4.19), no se observa un comportamiento de aumento o disminución en las

proporciones conforme se aumenta la muestra piloto o la cota.

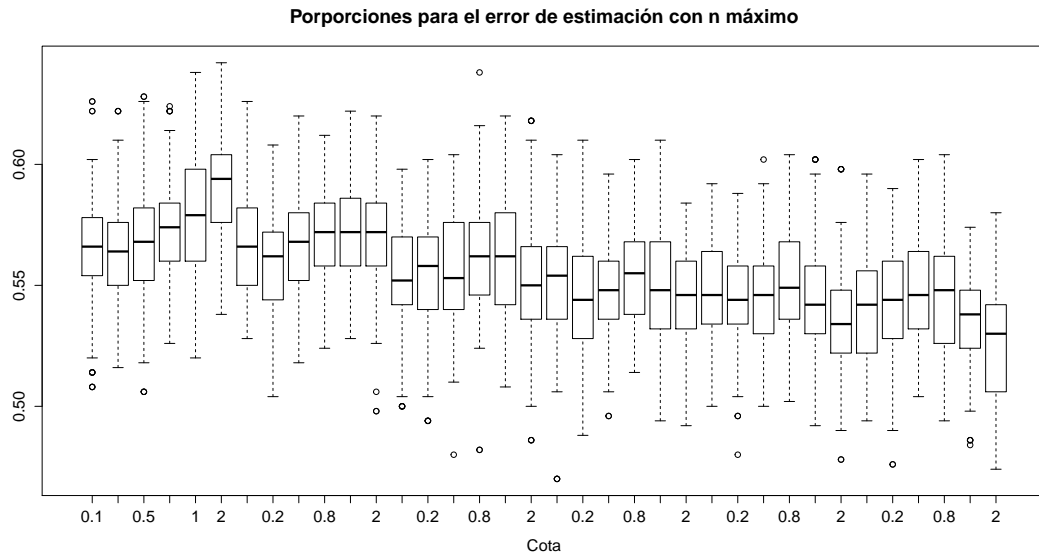


Figura 4.20: Gráficos de caja para la eficiencia del error de estimación del método máximo aumentando la cota, $R^2 = 0.80$

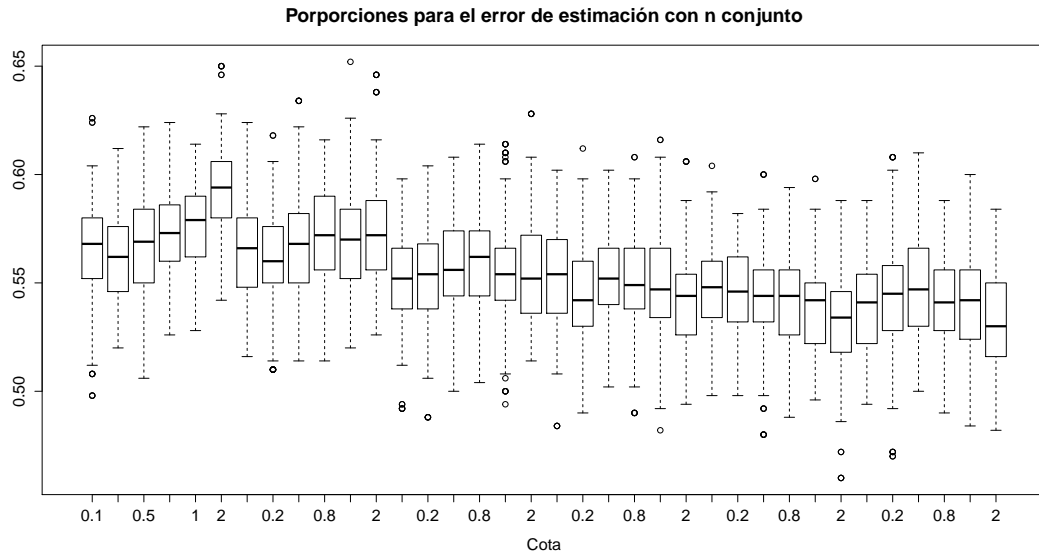


Figura 4.21: Gráficos de caja para la eficiencia del error de estimación del método conjunto aumentando la cota, $R^2 = 0.80$

Respecto a las eficiencia del error de estimación para los métodos máximo y conjunto con $R^2 = 0.80$, presentada en las figuras 4.20 y 4.21, solo para el caso de tamaño de muestra piloto de 5 y 10 se observa un ligero aumento en las proporciones, pero en los demás casos no se observa tendencia de aumento o disminución.

Las proporciones tanto del error de estimacion como del parámetro para $R^2 = 0.85, 0.90, 0.95$ presentan un comportamiento similiar al caso de $R^2 = 0.80$ cuando se aumenta el tamaño de la muestra piloto, las gráficas se encuentran en el Apéndice B, sin embargo, cuando se aumenta la cota, para $R^2 = 0.95$ se tiene un comportamiento diferente y esto se muestra en las figuras 4.22 y 4.23. Cuando el tamaño de muestra piloto es de 5, al aumentar la cota se tiene una mejor eficiencia, pero para los demás tamaños de muestra piloto parece tener una tendencia decreciente excepto por la última cota en la que la eficiencia aumenta.

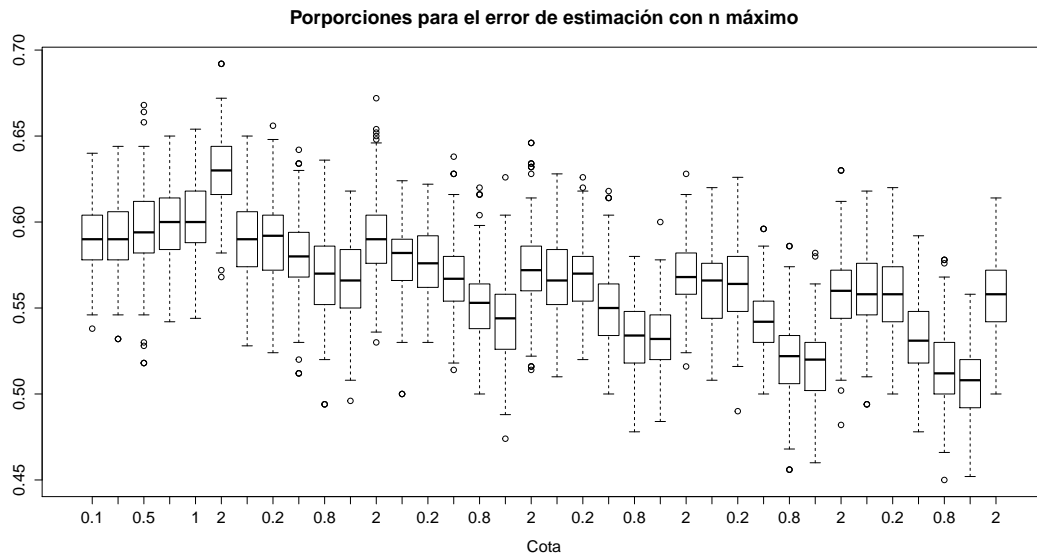


Figura 4.22: Gráficos de caja para la eficiencia del error de estimación del método máximo aumentando la cota, $R^2 = 0.95$

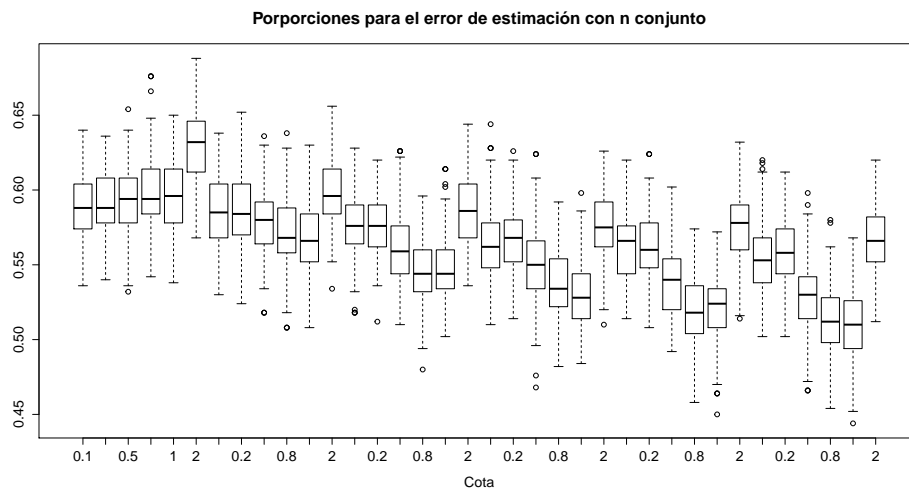


Figura 4.23: Gráficos de caja para la eficiencia del error de estimación del método conjunto aumentando la cota, $R^2 = 0.95$

Para complementar el análisis de la eficiencia de los métodos, se obtuvieron las medias y las medianas de las proporciones para cada uno de ellos. En los cuadros 4.5, 4.6 y 4.7 se presentan los resultados para $R^2 = 0.80$, de donde se observa que la media y mediana de las eficiencias tanto de los errores de estimación como del parámetro son muy cercanas.

		5		10		15		20		25		30	
		p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}
0.1	MEDIA	0.342	0.949	0.221	0.949	0.149	0.948	0.105	0.948	0.075	0.949	0.053	0.952
	MEDIANA	0.34	0.95	0.222	0.95	0.146	0.946	0.103	0.948	0.074	0.95	0.052	0.952
0.2	MEDIA	0.341	0.947	0.223	0.949	0.154	0.949	0.105	0.949	0.080	0.949	0.057	0.951
	MEDIANA	0.34	0.948	0.222	0.95	0.156	0.948	0.106	0.952	0.079	0.95	0.058	0.954
0.5	MEDIA	0.354	0.947	0.242	0.948	0.178	0.949	0.137	0.948	0.110	0.947	0.090	0.949
	MEDIANA	0.355	0.948	0.242	0.948	0.178	0.95	0.134	0.948	0.11	0.948	0.088	0.948
0.8	MEDIA	0.375	0.947	0.276	0.947	0.218	0.945	0.189	0.945	0.164	0.947	0.154	0.947
	MEDIANA	0.376	0.946	0.276	0.948	0.216	0.948	0.186	0.944	0.164	0.944	0.152	0.946
1	MEDIA	0.390	0.945	0.300	0.944	0.254	0.946	0.222	0.946	0.203	0.946	0.197	0.944
	MEDIANA	0.39	0.946	0.298	0.944	0.254	0.946	0.224	0.946	0.206	0.947	0.2	0.944
2	MEDIA	0.471	0.946	0.408	0.945	0.376	0.944	0.362	0.945	0.351	0.946	0.345	0.945
	MEDIANA	0.472	0.946	0.408	0.946	0.376	0.942	0.362	0.946	0.348	0.947	0.342	0.946

Cuadro 4.5: Eficiencia media y mediana del método promedio, $R^2 = 0.80$

		5		10		15		20		25		30	
		p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}
0.1	MEDIA	0.565	0.949	0.566	0.949	0.553	0.950	0.552	0.949	0.548	0.951	0.541	0.949
	MEDIANA	0.566	0.95	0.566	0.95	0.552	0.95	0.554	0.946	0.546	0.952	0.542	0.95
0.2	MEDIA	0.563	0.951	0.560	0.950	0.556	0.950	0.546	0.949	0.546	0.948	0.543	0.948
	MEDIANA	0.564	0.952	0.562	0.949	0.558	0.95	0.544	0.948	0.544	0.948	0.544	0.95
0.5	MEDIA	0.566	0.948	0.567	0.948	0.556	0.948	0.549	0.948	0.545	0.948	0.548	0.948
	MEDIANA	0.568	0.948	0.568	0.947	0.553	0.948	0.548	0.949	0.546	0.95	0.546	0.948
0.8	MEDIA	0.573	0.946	0.570	0.947	0.561	0.946	0.553	0.949	0.551	0.947	0.548	0.947
	MEDIANA	0.574	0.947	0.572	0.946	0.562	0.944	0.555	0.95	0.549	0.948	0.548	0.946
1	MEDIA	0.579	0.947	0.573	0.946	0.562	0.946	0.549	0.946	0.545	0.946	0.536	0.947
	MEDIANA	0.579	0.947	0.572	0.946	0.562	0.946	0.548	0.946	0.542	0.946	0.538	0.946
2	MEDIA	0.592	0.945	0.572	0.945	0.551	0.946	0.546	0.946	0.534	0.946	0.526	0.946
	MEDIANA	0.594	0.944	0.572	0.946	0.55	0.946	0.546	0.946	0.534	0.946	0.53	0.946

Cuadro 4.6: Eficiencia media y mediana del método máximo, $R^2 = 0.80$

		5		10		15		20		25		30	
		p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}
0.1	MEDIA	0.565	0.949	0.565	0.949	0.552	0.950	0.553	0.949	0.548	0.949	0.540	0.951
	MEDIANA	0.568	0.95	0.566	0.95	0.552	0.95	0.554	0.95	0.548	0.95	0.541	0.952
0.2	MEDIA	0.562	0.950	0.561	0.949	0.554	0.950	0.543	0.951	0.545	0.950	0.544	0.949
	MEDIANA	0.562	0.952	0.56	0.95	0.554	0.949	0.542	0.95	0.546	0.95	0.545	0.948
0.5	MEDIA	0.567	0.949	0.567	0.950	0.558	0.951	0.553	0.951	0.545	0.948	0.548	0.950
	MEDIANA	0.569	0.95	0.568	0.95	0.556	0.952	0.552	0.95	0.544	0.948	0.547	0.95
0.8	MEDIA	0.573	0.949	0.571	0.949	0.560	0.953	0.550	0.951	0.542	0.950	0.542	0.951
	MEDIANA	0.573	0.948	0.572	0.95	0.562	0.954	0.549	0.952	0.544	0.952	0.541	0.952
1	MEDIA	0.577	0.948	0.569	0.950	0.556	0.951	0.549	0.949	0.539	0.948	0.539	0.950
	MEDIANA	0.579	0.948	0.57	0.952	0.554	0.95	0.547	0.95	0.542	0.948	0.542	0.95
2	MEDIA	0.592	0.952	0.573	0.951	0.555	0.949	0.541	0.950	0.532	0.951	0.532	0.950
	MEDIANA	0.594	0.952	0.572	0.952	0.552	0.948	0.544	0.95	0.534	0.952	0.53	0.952

Cuadro 4.7: Eficiencia media y mediana del método conjunto, $R^2 = 0.80$

Los resultados anteriores fueron graficados para observar si se tiene mejor eficiencia conforme se aumenta el tamaño de muestra, estos se presentan en las figuras [4.24](#) y [4.25](#).

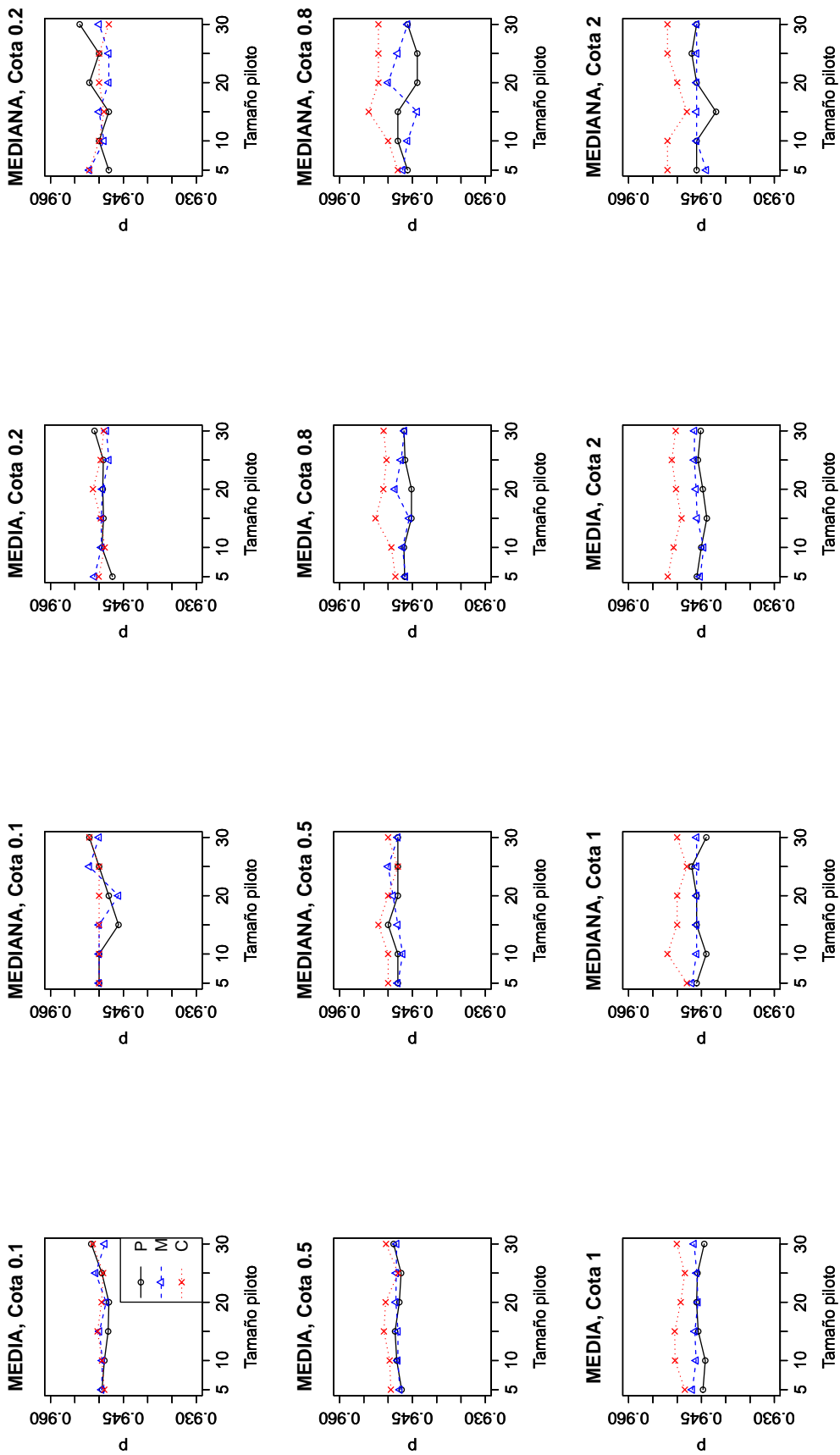


Figura 4.24: Media y mediana de la eficiencia del parámetro, $R^2 = 0.80$

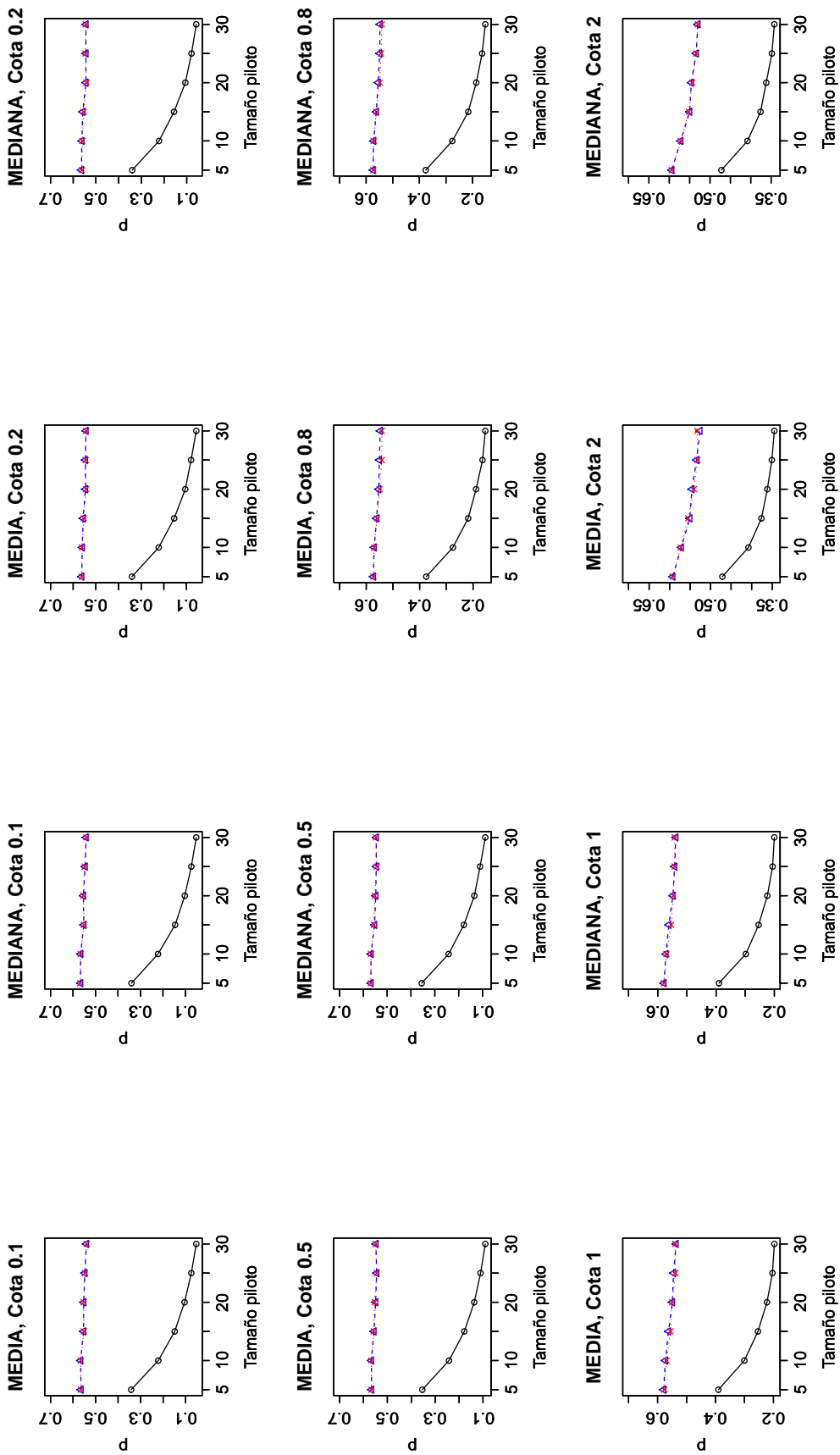


Figura 4.25: Media y mediana de la eficiencia del error de estimación, $R^2 = 0.80$

Para la eficiencia del parámetro, la media y mediana de las cotas 0.1 a 0.5, son muy parecidas para el promedio, máximo y conjunto, y para las demás cotas el método conjunto tiene una mejor eficiencia media y mediana que los métodos promedio y máximo. En ninguno de los casos se observa un comportamiento creciente o decreciente conforme se aumenta el tamaño de muestra.

Para la eficiencia del error de estimación, se observa que la media y mediana de los métodos conjunto y máximo tienen valores similares, mientras que el método promedio queda muy por debajo de esos dos. También se observa que mientras se aumenta el tamaño de muestra la media y mediana de la eficiencia tiene un comportamiento decreciente claro para el promedio, mientras que para el máximo y conjunto este decrecimiento a penas es evidente para una cota de 2.

Los resultados para $R^2 = 0.85, 0.90, 0.95$ fueron similares a los de $R^2 = 0.80$. Solo que en el caso de $R^2 = 0.95$ el decrecimiento de la media y mediana de la eficiencia del error de estimación de los métodos máximo y conjunto es más clara, además de que para una cota de 2 las eficiencias medias y medianas de los tres métodos son más parecidas. También, en este caso para todas las cotas se observa que la eficiencia media y mediana del parámetro del método conjunto es más grande que la de los métodos promedio y máximo. Las gráficas se encuentran en el Apéndice B.

4.4.3. Comparando los resultados para $R^2 = 0.80, 0.85, 0.90$ y 0.95

Al haberse simulado cuatro tipos de modelos exactos y precisos, fue de interés conocer el comportamiento de los tamaños de muestra y las eficiencias entre cada R^2 . En la Figura 4.26 se presentan los diagramas de caja que compara los resultados de las diferentes R^2 para una cota de 0.1 y en la Figura 4.27 se tienen las gráficas de la media y mediana por cota.

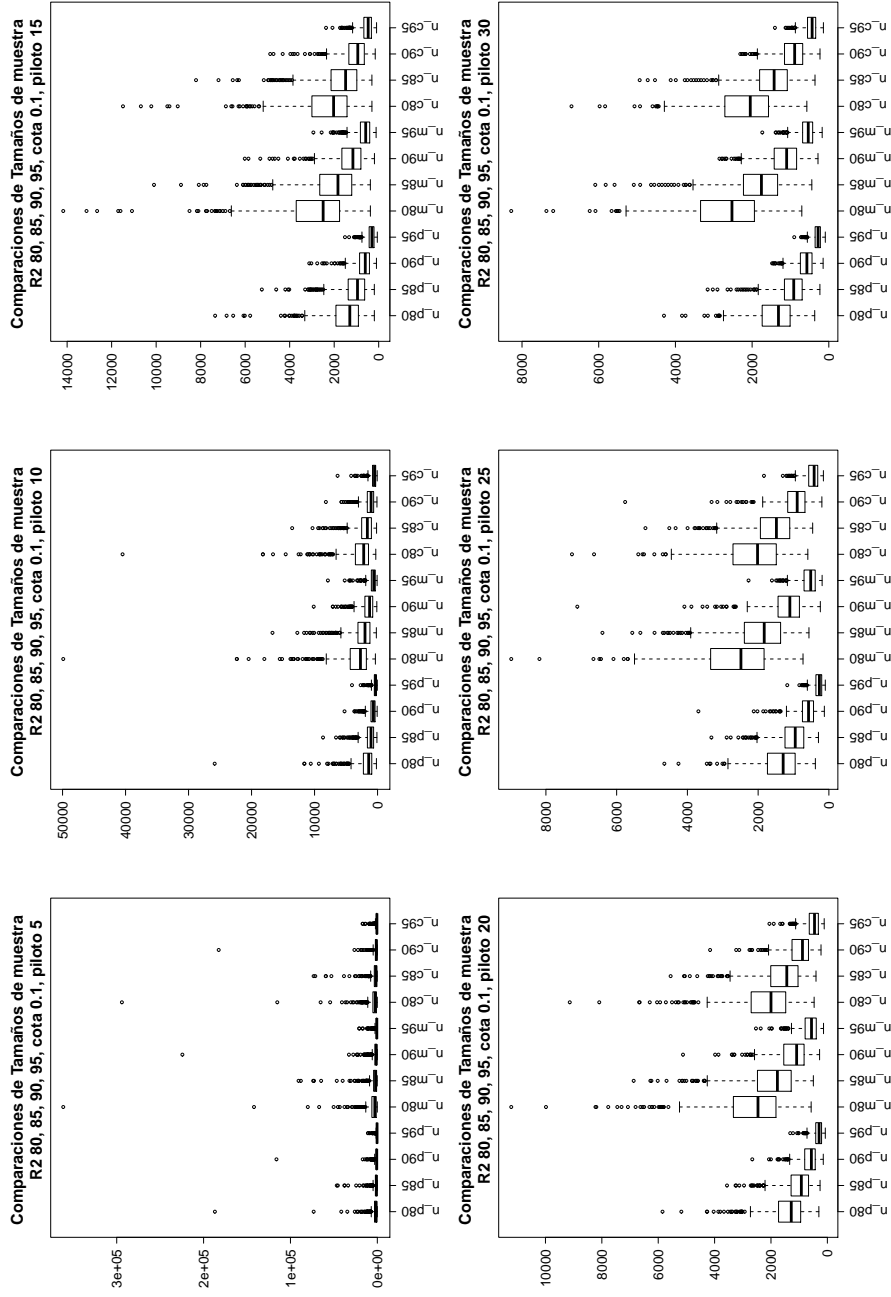


Figura 4.26: Comparaciones de los tamaños de muestra, cota 0.1

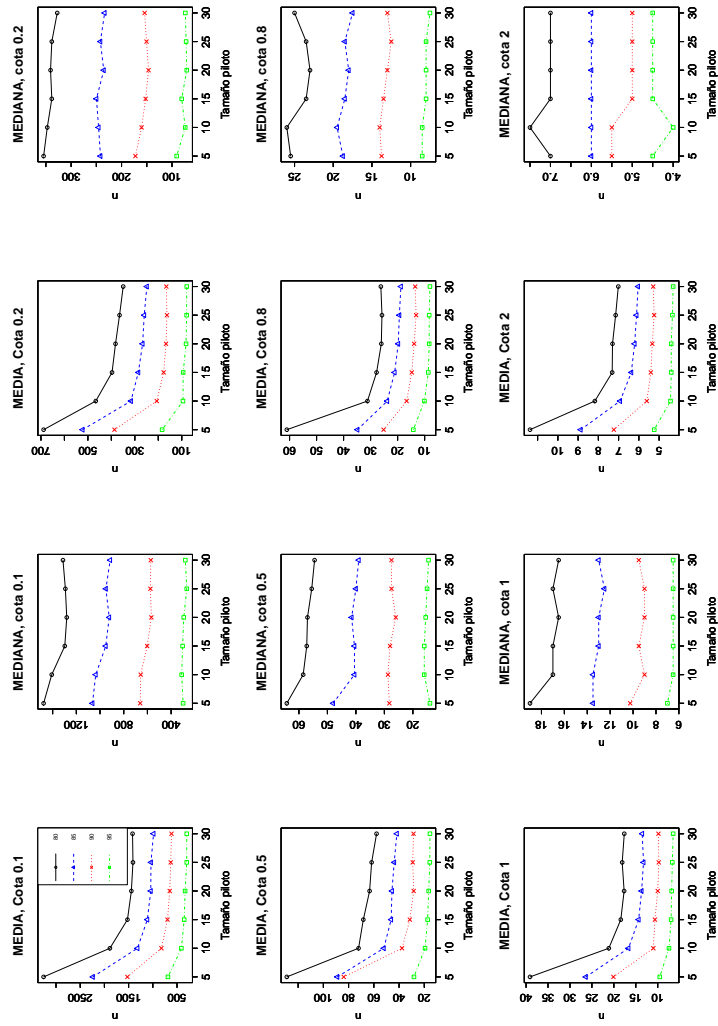


Figura 4.27: Comparaciones media y mediana del tamaño de muestra para $R^2 = 0.8, 0.85, 0.9, 0.95$.

En la Figura 4.26 se observa que a medida que se aumenta la precisión en el modelo se obtienen tamaños de muestra menores. Esto mismo se observa para las demás cotas, las figuras se encuentran en el Apéndice B. En la Figura 4.27 se observa que para todas las cotas la media y mediana de los tamaños de muestra del modelo con precisión de 0.95, son los más pequeños.

En las figuras 4.28, 4.29, 4.30, 4.31, 4.32 y 4.33 se presenta la comparación de las eficiencias del error de estimación y del parámetro. Dentro de cada gráfica, los primeros cuatro diagramas corresponden a un tamaño de muestra piloto 5, los siguientes cuatro a un tamaño de 10, y así sucesivamente hasta 30.

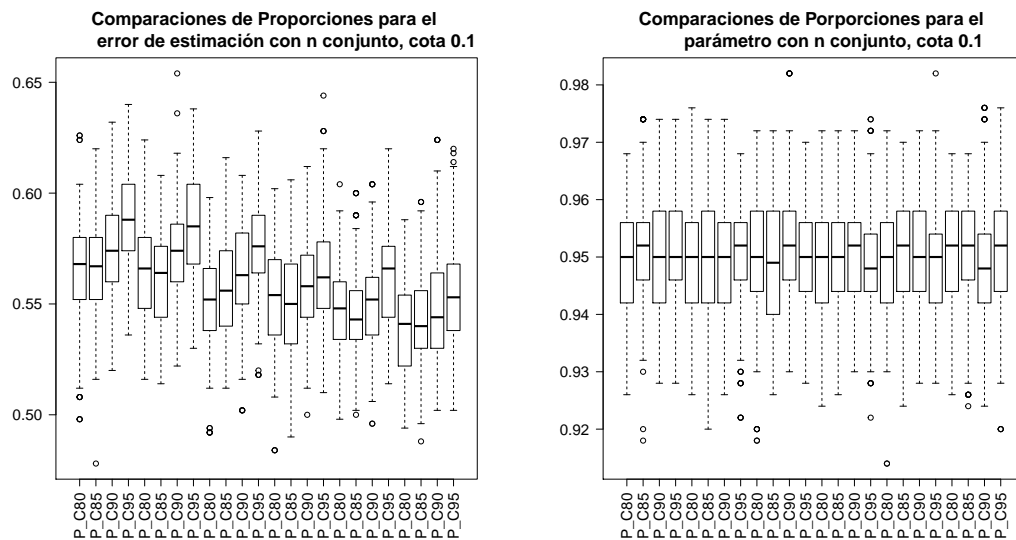


Figura 4.28: Comparaciones de la eficiencia del error de estimación y del parámetro del método conjunto

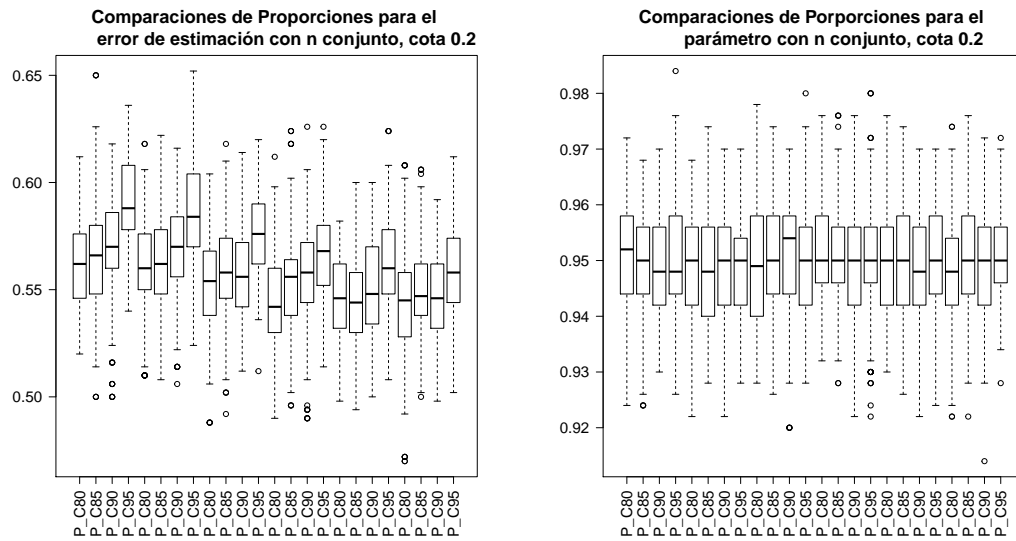


Figura 4.29: Comparaciones de la eficiencia del error de estimación y del parámetro del método conjunto

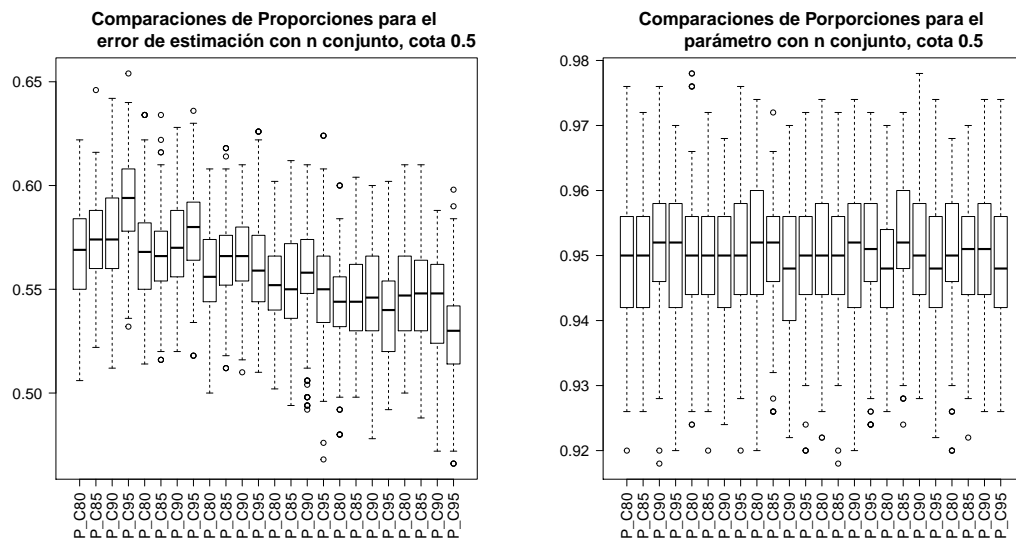


Figura 4.30: Comparaciones de la eficiencia del error de estimación y del parámetro del método conjunto

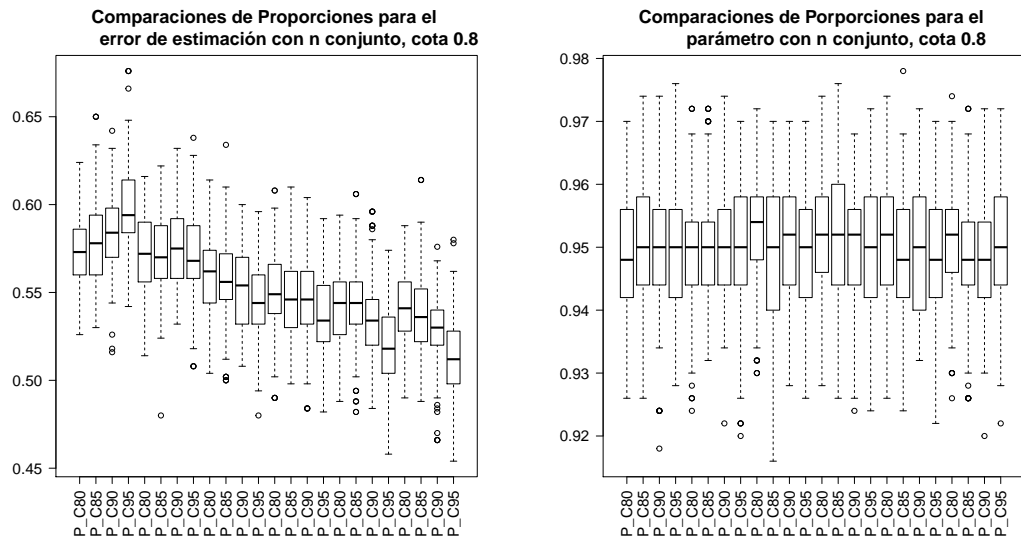


Figura 4.31: Comparaciones de la eficiencia del error de estimación y del parámetro del método conjunto

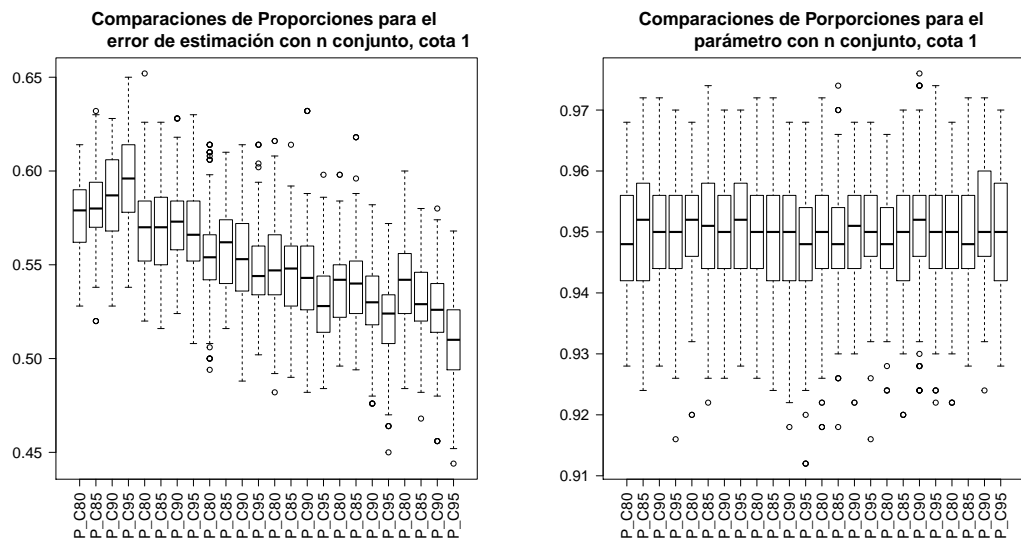


Figura 4.32: Comparaciones de la eficiencia del error de estimación y del parámetro del método conjunto

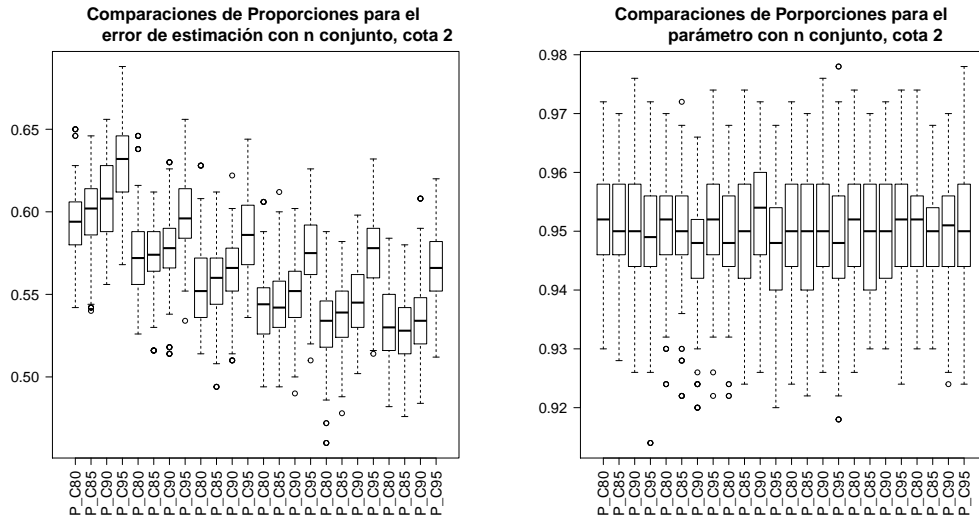


Figura 4.33: Comparaciones de la eficiencia del error de estimación y del parámetro del método conjunto

Obsérvese que para las cotas 0.1, 0.2 y 2, a medida que se aumenta la precisión, la eficiencia del error de estimación tiene valores más grandes; para las otras cotas, este comportamiento solo se presenta con un tamaño de muestra piloto 5, y para los siguientes tamaños esta eficiencia disminuye. En cuanto a la eficiencia del parámetro no se observa un comportamiento creciente o decreciente, y los valores se encuentran en general en un rango similar.

En las Figuras 4.34 y 4.35 se presentan las medias y medianas de las eficiencias para cada R^2 . Se puede observar que para la eficiencia del error de estimación con el método promedio, en general se tiene mejores resultados cuando se tiene más precisión y también se puede ver el comportamiento decreciente a medida que se aumenta el tamaño de muestra piloto. Para la eficiencia del parámetro, no se tiene un comportamiento claro que permita decir que para una determinada precisión se tenga mejor eficiencia, pues los valores fueron bastante cercanos. Un comportamiento similar se presenta en los métodos conjunto y máximo.

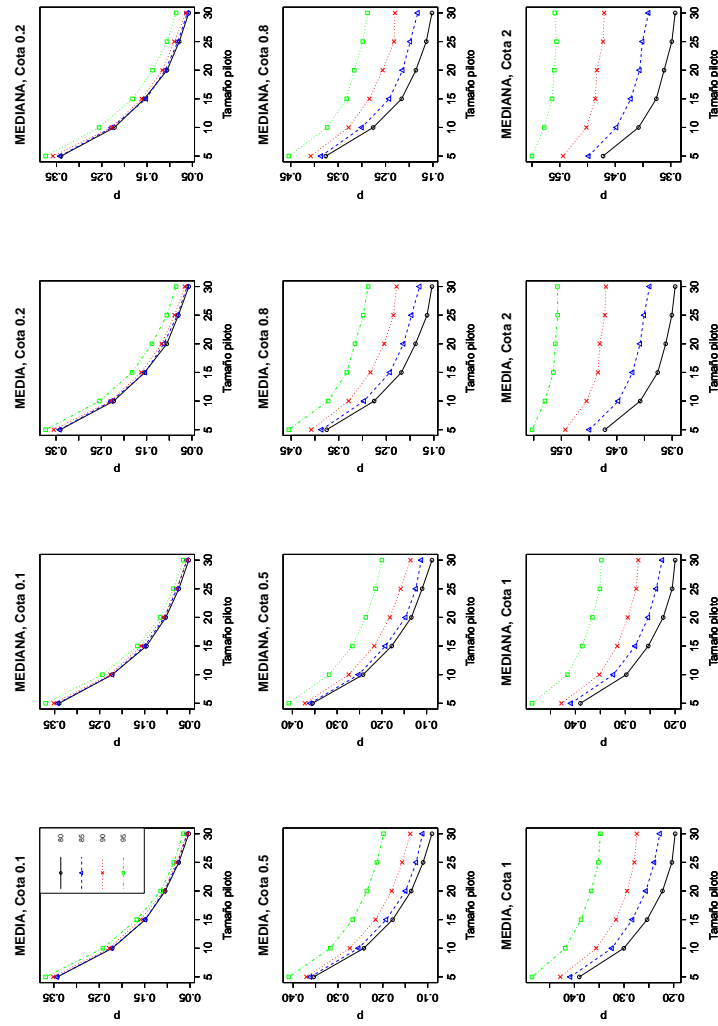


Figura 4.34: Comparaciones media y mediana de la eficiencia del error de estimación para $R^2 = 0.8, 0.85, 0.9, 0.95$, método promedio

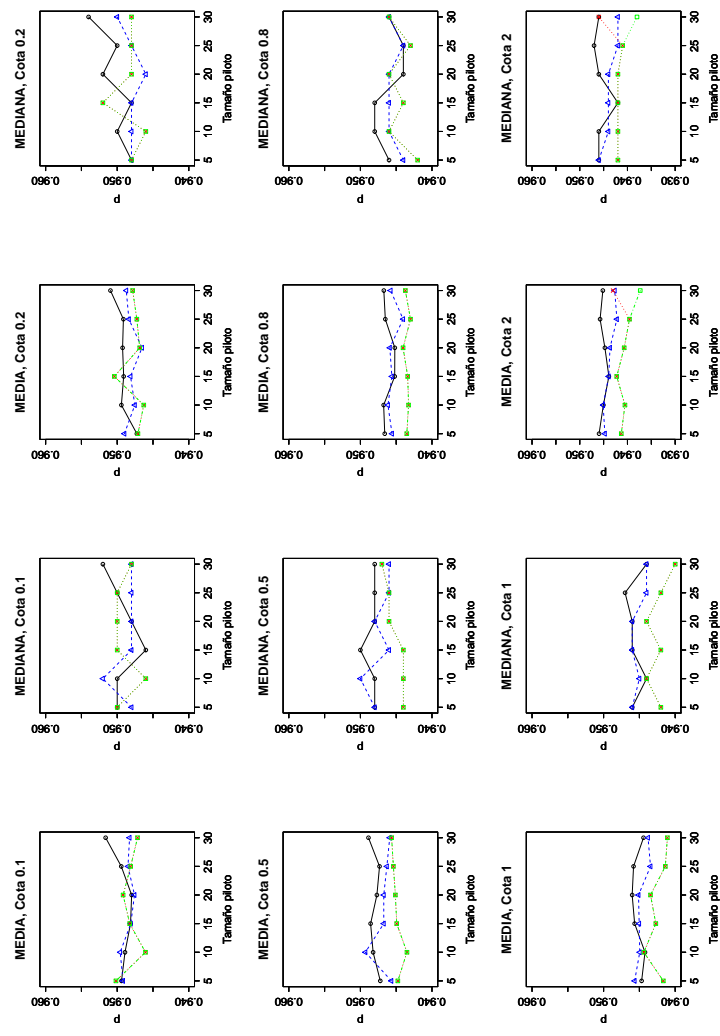


Figura 4.35: Comparaciones media y mediana de la eficiencia del parámetro para $R^2 = 0.8, 0.85, 0.9, 0.95$, método promedio

Los resultados para la eficiencia de la cota del error de estimación de los métodos en general fueron bajos, se esperaba que en alguno se observara eficiencias más altas. Recordando que para que se considerara éxito en la eficiencia de la cota, se necesitaba que la cota obtenida con los valores de la nueva muestra, debía ser menor que la cota máxima propuesta. Se hicieron algunas simulaciones más y se observó que en varios de los casos se tuvo que la cota estimada era mayor que la máxima propuesta, pero por muy poco, la diferencia entre ambas era muy pequeña.

Capítulo 5

Caso de estudio

Para ilustrar la metodología propuesta, se utilizó como muestra piloto los datos observados y predichos (cuadro 5.1) por un modelo dinámico mecanístico inédito llamado Wakax POS, el cual describe las relaciones biológicas durante la nutrición de bovinos alimentados con caña de azúcar y predice la ganancia de peso promedio (kg) por día de bovinos en pastoreo suplementado con caña de azúcar, maíz quebrado y/o melaza en una zona tropical de México (Medina *et al.*, 2010).

Predichos (z_i)	Observados (y_i)	Predichos (z_i)	Observados (y_i)
0	0.366	0	0.45
0	0.398	0.33	0.43
0.39	0.493	0.39	0.76
0.43	0.63	0	0.036
0.13	0.43	0	0.019
0.28	0.4	0	0.412
0.23	0.49	0	0.052
0.29	0.6	0	0.414
0.28	0	0	0.05
0.09	0.43	0.35	0.292
0.32	0.7	0	0.054
0.33	0.69	0.39	0.308
0.02	0.5	0	0.054
0	0.68	0	0.037
0	0.62	0	0.051
0.26	0.52	0	0.062
0	0.64	0	0.364

Cuadro 5.1: Promedios observados de ganancia de peso (kg) de 34 experimentos y sus correspondientes predichos con el modelo *Wakax POS*

Con los datos del Cuadro 5.1 se obtuvieron los valores $MS_{Res} = 0.0479021$, de $S_Z^2 = 0.02566064$ y de $\bar{Z}^2 = 0.01759524$ para determinar tamaños de muestra correspondientes a cada una de las cotas del error de estimación 0.3, 0.5, 1 y 1.5; utilizando tres niveles de confianza 0.85, 0.90 y 0.95.

Así, para encontrar los tamaños de muestra correspondientes primero se sustituyen los valores en cada una de las siguientes expresiones:

$$t_{(\alpha/2, n_{\beta_1}-2)} \left(\sqrt{\frac{MS_{res}}{(n_{\beta_1}-1)S_Z^2}} \right) = B_1$$

$$t_{(\alpha/2, n_{\beta_0}-2)} \left(\sqrt{\frac{1}{n_{\beta_0}} MS_{res} \left(1 + \frac{\bar{z}^2}{S_Z^2} \right)} \right) = B_0$$

$$\frac{F_{\alpha, 2, n-2}}{\frac{n}{4MS_{res}} \left[(1+S_Z^2+\bar{z}^2) - \sqrt{(1+S_Z^2+\bar{z}^2)^2 - 4S_Z^2} \right]} = B_0^2 + B_1^2$$

donde

$$\left| \hat{\beta}_1 - \beta_1 \right| \leq B_1$$

$$\left| \hat{\beta}_0 - \beta_0 \right| \leq B_0$$

Así, se obtuvieron los resultados presentados en el cuadro 5.2 que se muestra a continuación.

α	0.15			0.1			0.05		
Cota	n_{prom}	$n_{m\acute{a}x}$	$n_{conjunta}$	n_{prom}	$n_{m\acute{a}x}$	$n_{conjunta}$	n_{prom}	$n_{m\acute{a}x}$	$n_{conjunta}$
0.3	25	45	43	32	58	51	44	81	67
0.5	11	18	17	14	23	20	18	32	26
1	5	7	7	6	8	8	8	11	10
1.5	4	5	5	4	6	5	6	7	6

Cuadro 5.2: Tamaños de muestra para validar el modelo *Wakax POS*

Obsérvese que los tamaños de muestra se hacen más pequeños conforme se aumenta la cota para el error de estimación. Además, se observa que el tamaño de muestra con el método conjunto queda entre los que proporcionan los métodos del promedio y máximo, como se observó en el estudio de simulación.

También, se obtuvieron los tamaños de muestra quitando las parejas de datos que tiene cero en las predicciones del modelo *Wakax POS*, quedando 16 parejas de datos, donde

$MS_{Res} = 0.03615494$, de $S_{\bar{Z}}^2 = 0.01246523$ y de $\bar{Z}^2 = 0.07945352$. A continuación se presentan los resultados en el cuadro 5.3.

α	0.15			0.1			0.05		
Cota	n_{prom}	$n_{m\acute{a}x}$	$n_{conjunta}$	n_{prom}	$n_{m\acute{a}x}$	$n_{conjunta}$	n_{prom}	$n_{m\acute{a}x}$	$n_{conjunta}$
0.3	38	66	68	48	85	83	68	120	108
0.5	16	26	26	20	33	32	27	46	41
1	6	9	9	8	11	10	10	14	13
1.5	4	6	6	6	7	7	6	9	8

Cuadro 5.3: Tamaños de muestra para validar el modelo *Wakax POS* quitando las parejas de ceros

En este último caso observa que para el nivel de confianza del 85% se tiene que la n conjunta resulta ser mayor que la n máxima. Comparando los resultados de los cuadros 5.2 y 5.3 se tiene que los valores del segundo resultaron ser más grandes.

Capítulo 6

Conclusiones

Los métodos propuestos fueron tres, el primero fue tomar el promedio de los tamaños de muestra obtenidos por medio de los intervalos de confianza del intercepto y la pendiente del modelo de regresión lineal entre los valores predichos por el modelo y los observados; el segundo método fue tomar el tamaño de muestra más grande y por último se propuso el tamaño de muestra correspondiente a la región de confianza de los parámetros del modelo.

Del estudio de simulación, con los escenarios planteados, para los tamaños de muestra se tienen varias conclusiones. Cuando se tiene una muestra piloto de tamaño 5 se obtuvieron tamaños muestrales promedio, máximo y conjunto muy grandes, pudiendo alcanzar valores de hasta 300,000. También, se observó que a medida que se aumenta el tamaño de la muestra piloto se tienen valores más pequeños para el tamaño de muestra. Los tamaños de muestra del método conjunto, no son más pequeños que el promedio, pero sí lo son comparados con el máximo. Esto difiere de los resultados presentados por Colosimo (2007), en donde se obtuvo que sí resultó menor que ambos. En este trabajo se obtuvo algo diferente, debido a que se acotó la región de confianza a una circunferencia cuya distancia alcanzara a cubrir la región. Por otro lado, cuando se aumenta la cota del error de estimación se tienen tamaños muestrales menores. En general, a partir de un tamaño de muestra piloto

de 15 ya no se observa una disminución muy grande en los valores del tamaño muestral. En este sentido, respecto a los resultados obtenidos por Colosimo (2007), se mantuvo la característica que a medida que se aumenta el tamaño de muestra piloto y la cota, se tienen tamaños de muestra con los métodos promedio, máximo y conjunto más pequeños.

Respecto la precisión de los modelos se concluye que a medida que los modelos son más precisos, se obtienen tamaños muestrales menores. La eficiencia para el error de estimación, en general, resultó ser mejor con mayor precisión. Por otro lado si se aumenta el tamaño de muestra piloto la eficiencia disminuye para cada precisión, es decir, si se toma una precisión del 95 % y se aumenta el tamaño de muestra piloto la eficiencia del error de estimación disminuye. Respecto a la eficiencia del parámetro, se obtuvieron resultados similares para cada precisión dada.

Para elegir una muestra piloto se sugiere que sea a entre 10 y 15, pues a partir de 15 se obtienen menores tamaños muestrales y estabilizan los resultados, pero con tamaños de muestra piloto se 10 se tiene una mejor eficiencia para la cota del error de estimación.

En este caso, no es posible comparar los resultados de la eficiencia de los métodos propuestos con los resultados de los métodos por pruebas de hipótesis debido a que se evaluaron de manera diferente. En el presente trabajo se obtuvo que la eficiencia del parámetro, para cotas pequeñas no hay mucha diferencia entre los métodos promedio, máximo y conjunto. Pero para cotas más grandes la eficiencia del método conjunto es mejor.

La eficiencia del error de estimación en general estuvo baja comparándola con la del parámetro, en ningún caso se obtuvo una eficiencia de más de 0.7. Lo que sí se pudo identificar es que la eficiencia del método conjunto y máximo son muy parecidas, y son mejores que el método promedio. A pesar de que el intervalo de confianza cubrió al parámetro en más del 90 % de los casos, se tendrá una cota para el error de estimación más grande que la deseada.

Por todo lo anterior los mejores métodos son el conjunto y el máximo debido a que además de asegurar que en más del 90% de los casos el parámetro se encuentra en el intervalo (región), se tienen menos casos en los que el error de estimación es más grande que la deseada.

Para decidirse por uno de los dos métodos, es fundamental considerar que en el método conjunto sólo se utiliza un nivel de confianza, además proporciona tamaños de muestra menores que el método máximo. Por lo tanto la mejor opción para obtener el tamaño de muestra para validar modelos con la técnica de regresión lineal, enfoque de intervalos y región de confianza, es el método conjunto.

Capítulo 7

Recomendaciones

El método propuesto usando la región de confianza, está basado en la distancia del vector que se desea $(0, 1)$ con el vector de parámetros estimado $(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$. Se puede cambiar la forma de determinar el tamaño de muestra considerando que $-B_0 \leq \hat{\beta}_0 - \beta_0 \leq B_0$ y $-B_1 \leq \hat{\beta}_1 - \beta_1 \leq B_1$, obteniéndose así dos tamaños muestrales para el método conjunto. O bien, siguiendo la idea de los intervalos de confianza, en la cual se propone un tamaño máximo para ellos; en el caso de la región de confianza sería ponerle un máximo al área de la elipse.

Respecto a los resultados de la eficiencia para el error de estimación, se manejó como éxito cuando la cota máxima es mayor que la obtenida por la muestra, se vio que las eficiencias fueron bajas, esto se debió a algunos casos donde la diferencia entre las cotas era muy pequeña, entonces se podría agregar la condición de que si dicha diferencia es menor que un valor ϵ dado, el caso sea considerado como éxito.

Apéndice A

Programas en R

Funciones para obtener una muestra cumpliendo los supuestos de normalidad y varianza constante

El programa de Febles (2014) para obtener las muestras simuladas fue modificado:

Se cambió las expresión presentada en ese trabajo para S_Z^2 por $\frac{(SCE)R^2}{(n-1)\hat{\beta}_1^2(1-R^2)}$. A continuación se presenta el procedimiento para llegar a ésta. Se tiene las siguientes expresiones (Montgomery *et al.*, 2002):

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{ZY}}{S_{ZZ}} \quad (\text{A.0.1})$$

$$SCE = S_{YY} - \hat{\beta}_1 S_{ZY} \quad (\text{A.0.2})$$

$$R^2 = 1 - \frac{SCE}{S_{YY}} \quad (\text{A.0.3})$$

Despejando S_{ZY} de [A.0.2](#) y S_{YY} de [A.0.3](#) se obtiene

$$S_{ZY} = \frac{S_{YY} - SCE}{\hat{\beta}_1}, \quad (\text{A.0.4})$$

y

$$S_{YY} = \frac{SCE}{1 - R^2} \quad (\text{A.0.5})$$

Para obtener S_Z^2 , se despeja S_{ZZ} de A.0.1 y sustituye A.0.4 y A.0.5.

$$\begin{aligned} S_{ZZ} &= \frac{S_{ZY}}{\hat{\beta}_1} \\ S_{ZZ} &= \frac{S_{YY} - SCE}{\hat{\beta}_1^2} \\ S_{ZZ} &= \frac{\frac{SCE}{1-R^2} - SCE}{\hat{\beta}_1^2} \\ S_{ZZ} &= \frac{SCE - SCE(1 - R^2)}{\hat{\beta}_1^2(1 - R^2)} \\ S_{ZZ} &= \frac{SCE(R^2)}{\hat{\beta}_1^2(1 - R^2)} \\ S_Z^2 &= \frac{SCE(R^2)}{(n - 1)\hat{\beta}_1^2(1 - R^2)} \end{aligned}$$

El código de la función queda de la siguiente forma:

Datos de entrada:

- n: el tamaño deseado para la muestra
- b0: valor para el intercepto
- b1: valor para la pendiente
- R2: coeficiente de correlación
- muz: media deseada para el vector z
- SCE: suma de cuadrados de error para el modelo
- a: ancho de banda para controlar la varianza

```

Datoszy=function(n,b0,b1,R2,muz,SCE,a)
  {if(b1>0){signo=1} else signo=-1
  muy=b0+b1*muz
  varz=(SCE*R2)/(((n-1))*(b1^2)*(1-R2))
  vary=(b1^2*varz)/(R2)
  covzy=signo*sqrt(R2*varz*vary)
  mu=array(c(muz,muy),c(2,1))
  sigma=rbind(c(varz,covzy),c(covzy,vary))
  A=t(chol(sigma))
  B=matrix(nrow=n,ncol=2)
  for(i in 1:n)
  {Z=rnorm(2)
  B[i,]=A %* %Z+mu
  }
  return(B)
}##### Aquí termina la función Datoszy

```

Para comprobar el supuesto de normalidad se realizó el cambio descrito en el Capítulo

4. El código de la función que devuelve la muestra normal y con varianza constante queda

de la siguiente forma:

```

PruebaNorm=function(n,b0,b1,R2,muz,SCE,a) {library(nortest)
  pvalor=0.001
  if(4<n & n<5000)
  {
  while(pvalor<=0.1)
  {B=PruebaVar(n,b0,b1,R2,muz,SCE,a)
  modlin=lm(B[,2]~B[,1])
  Res=residuals(modlin)
  pvalor=min(lillie.test(Res)$p.value,shapiro.test(Res)$p.value)
  }
  }
  if(n<=4)
  {
  while(pvalor<=0.1)
  {B=PruebaVar(n,b0,b1,R2,muz,SCE,a)
  modlin=lm(B[,2]~B[,1])
  Res=residuals(modlin)
  }
  }
  }

```

```

pvalor=shapiro.test(Res)$p.value
}
}
else
{
while(pvalor<=0.1)
{B=PruebaVar(n,b0,b1,R2,muz,SCE,a)
modlin=lm(B[,2]~B[,1])
Res=residuals(modlin)
pvalor=lillie.test(Res)$p.value
}
}
return(B)
}

```

Función para obtener los tamaños de muestra promedio, máximo y conjunto.

La función Tamaño proporciona un vector que contiene a los tamaños de muestra promedio, máximo y conjunto correspondientes a los intervalos región de confianza:

Datos de entrada:

- z: vector de valores predichos por el modelo a validar
- y: vector de valores observados
- B0: cota máxima para el error de estimación para el intercepto
- B1: cota máxima para el error de estimación para la pendiente
- NivConf: Nivel de confianza deseado (95 %, 99 %, *etc.*)

```

Tamaño=function(z,y,B0,B1,NivConf)
{f0=function(n){qt(1-alfa/2, n-2)/sqrt(n)} #función de  $n_{\beta_0}$ 
f1=function(n){qt(1-alfa/2, n-2)/sqrt(n-1)} #función de  $n_{\beta_1}$ 
fc=function(n){qf(alfa, 2, n-2,lower.tail=0)/n} #función de  $n$  conjunta
n0=3 #valor inicial de n
alfa=1-NivConf
SCZ=sum((z-mean(z))^2)

```



```

SZ2=SCZ/length(z)
MSres=deviance(lm(y~z))/(length(z)-2)
aa=(B0*sqrt(SZ2))/sqrt(MSres*(SZ2+(mean(z)^2)))
bb=B1/sqrt(MSres/(SCZ/(length(z)-1)))
cc=(B0^2+B1^2)*((1+SZ2+(mean(z)^2)-sqrt((1+SZ2+(mean(z)^2)^2-4*SZ2)))/(4*MSres))
#Obteniendo el tamaño de muestra para  $\beta_0$ , intercepto
{ninf0=n0
finf0=f0(ninf0)
nsup0=n0
fsup0=f0(nsup0)
while(fsup0>aa)
{nsup0=2*nsup0
fsup0=f0(nsup0)
}
repeat
{
nfinal0=(ninf0+nsup0)/2
ffinal0=f0(nfinal0)
if(aa>ffinal0) nsup0=nfinal0
else ninf0=nfinal0
if(1>=nsup0-ninf0) break;
}
if(aa>f0(trunc(nsup0))) NB0=trunc(nsup0)
else NB0=trunc(nsup0)+1
}
#Obteniendo el tamaño de muestra para  $\beta_1$ , pendiente
{ninf1=n0
finf1=f1(ninf1)
nsup1=n0
fsup1=f1(nsup1)
while(fsup1>bb)
{nsup1=2*nsup1
fsup1=f1(nsup1)
}
repeat
{
nfinal1=(ninf1+nsup1)/2
ffinal1=f1(nfinal1)
if(bb>ffinal1) nsup1=nfinal1
else ninf1=nfinal1
if(1>=nsup1-ninf1) break;
}
}

```

```

if(bb>f1(trunc(nsup1))) NB1=trunc(nsup1)
else NB1=trunc(nsup1)+1
}

#Obteniendo el tamaño de muestra para el vector de parámetros  $\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$ 

{ninfc=n0
finfc=fc(ninfc)
nsupc=n0
fsupc=fc(nsupc)
while(fsupc>cc)
{nsupc=2*nsupc
fsupc=fc(nsupc)
}
repeat
{
nfinalc=(ninfc+nsupc)/2
ffinalc=fc(nfinalc)
if(cc>ffinalc) nsupc=nfinalc
else ninfc=nfinalc
if(1>=nsupc-ninfc) break;
}
if(cc>fc(trunc(nsupc))) NBc=trunc(nsupc)
else NBc=trunc(nsupc)+1
}
Tam=cbind(c((NB0+NB1)/2,max(NB0,NB1),NBc))
colnames(Tam)=c("n_prom", "n_max", "n_conj")
return(Tam)
}

```

Funciones para medir la eficiencia de los métodos

La función TamMuestras permite obtener una matriz que contiene los tamaños de muestra promedio, máximo y conjunto para varias cotas, varios tamaños de muestra piloto del número de muestras que se necesite.

Datos de entrada:

- b0: valor para el intercepto

- b1: valor para la pendiente
- muz: media deseada para el vector z
- SCE: suma de cuadrados de error para el modelo
- a: ancho de banda para controlar la varianza
- R2: coeficiente de correlación
- NivConf: Nivel de confianza deseado (95 %, 99 %, *etc.*)
- mp: número de muestras piloto deseadas.
- B01: vector que contiene las cotas máximas para el error de estimación para el intercepto y pendiente.
- nmp: vector que contiene los tamaños de la muestra piloto deseada.

```
TamMuestras=function(b0,b1,muz,SCE,a,R2,NivConf,mp,B01,nmp)
{
  nt=matrix(,nrow=mp+4, ncol=length(nmp)*length(B01)*length(R2)*3)
  d1=1
  d2=1
  d3=1
  d6=0
  nombren=c("n_prom", "n_max", "n_conj")
  nt[1,3*length(nmp)*length(B01)*d1]=R2[d1]
  d1=d1+1
  d5=1
  for(i in B01)
  {
    nt[2,3*length(nmp)*d2]=B01[d5]
    d2=d2+1
    d5=d5+1
    d4=1
    for(j in nmp)
    {
      nt[3,3*d3]=nmp[d4]
      nt[4,1+3*d6]=nombren[1]
      nt[4,2+3*d6]=nombren[2]
      nt[4,3+3*d6]=nombren[3]
      for(k in 1:mp)
      {
```

```

A=PruebaNorm(j,b0,b1,R2,muz,SCE,a)
z=A[,1]
y=A[,2]
nmb=Tamaño(z,y,i,i,NivConf)
nt[k+4,1+3*d6]=nmb[1]
nt[k+4,2+3*d6]=nmb[2]
nt[k+4,3+3*d6]=nmb[3]
}
d3=d3+1
d4=d4+1
d6=d6+1
}
}
return(nt)
}

```

La función eficiencia proporciona las proporciones de éxito para cada uno de las réplicas del modelo deseado. Internamente obtiene las muestras piloto y los respectivos n promedio, máximo y conjunto para cada una de ellas.

Datos de entrada:

- b_0 : valor para el intercepto
- b_1 : valor para la pendiente
- μ_z : media deseada para el vector z
- SCE: suma de cuadrados de error para el modelo
- a : ancho de banda para controlar la varianza
- R^2 : coeficiente de correlación
- NivConf: Nivel de confianza deseado (95 %, 99 %, *etc.*)
- mp : número de muestras piloto deseadas.
- B_01 : vector que contiene las cotas máximas para el error de estimación para el intercepto y pendiente.

- nmp: vector que contiene los tamaños de la muestra piloto deseada.
- rep: número de réplicas deseadas.

```

eficiencia=function(b0,b1,muz,SCE,a,R2,NivConf,mp,B01,nmp,rep)
  nombren=c("n_prom", "n_max", "n_conj")
  pnprom=matrix(,nrow=rep+4, ncol=2*length(B01)*length(nmp))
  pnmax=matrix(,nrow=rep+4, ncol=2*length(B01)*length(nmp))
  pncon=matrix(,nrow=rep+4, ncol=2*length(B01)*length(nmp))
  d7=1
  d8=1
  d10=0
  nombrep=c("p_cot", "p_parám")
  pnprom[1,2*length(B01)*length(nmp)]=R2
  pnmax[1,2*length(B01)*length(nmp)]=R2
  pncon[1,2*length(B01)*length(nmp)]=R2
  pnprom[1,1]=nombren[1]
  pnmax[1,1]=nombren[2]
  pncon[1,1]=nombren[3]
  #poniendolos nombres
  for(j in B01)
  {
    pnprom[2,2*length(nmp)*d7]=B01[d7]
    pnmax[2,2*length(nmp)*d7]=B01[d7]
    pncon[2,2*length(nmp)*d7]=B01[d7]
    d9=1
    d7=d7+1
    for(k in nmp)
    {
      pnprom[3,2*d8]=nmp[d9]
      pnmax[3,2*d8]=nmp[d9]
      pncon[3,2*d8]=nmp[d9]
      pnprom[4,1+2*d10]=nombrep[1]
      pnprom[4,2+2*d10]=nombrep[2]
      pnmax[4,1+2*d10]=nombrep[1]
      pnmax[4,2+2*d10]=nombrep[2]
      pncon[4,1+2*d10]=nombrep[1]
      pncon[4,2+2*d10]=nombrep[2]
      d10=d10+1
      d8=d8+1
      d9=d9+1
    }
  }

```

```

}
for(i in 1:rep)
{
nt=TamMuestras(b0,b1,muz,SCE,a,R2,NivConf,mp,B01,nmp)
arch1=paste('R=9 tabla tamaño de muestra modelo', i,sep = )
arch1=paste(arch1, ".csv",sep="")
write.table(nt, file=arch1, sep=";", col.names=NA)
d10=0
d11=0
for(j in B01)
{
for(k in nmp)
{
exitocp=0
exitocm=0
exitocc=0
exitopp=0
exitopm=0
exitopc=0
for(l in 1:mp)
{
Aprom=PruebaNorm(trunc(as.integer(nt[4+l, 1+3*d11])),b0,b1,R2,muz,SCE,a)
Amax=PruebaNorm(as.integer(nt[4+l,2+3*d11]),b0,b1,R2,muz,SCE,a)
Acon=PruebaNorm(as.integer(nt[4+l,3+3*d11]),b0,b1,R2,muz,SCE,a)
#pruebas para n_promedio
zp=Aprom[,1]
yp=Aprom[,2]
fitp = lm(yp~zp)
alfa=1-NivConf
SCZ=sum((zp-mean(zp))^2)
SZ2=SCZ/length(zp)
Z2=mean(zp)^2
MSres=deviance(fitp)/(length(zp)-2)
C=summary(fitp)$coefficients #parametros beta (centro de la elipse)
if(abs(C[1,1]-0)<=qt(1-alfa/2,length(zp)-2)/sqrt(length(zp))*sqrt(MSres*(1+Z2/SZ2))
& abs(C[2,1]-1)<=(qt(1-alfa/2,length(zp)-2)/sqrt(length(zp)-1))*sqrt(MSres/(SCZ/(length(zp)-1))))
1)))
{exitopp=exitopp+1}
if((qt(1-alfa/2,length(zp)-2)/sqrt(length(zp)))*sqrt(MSres*(1+Z2/SZ2))<=j & (qt(1-
alfa/2,length(zp)-2)/sqrt(length(zp)-1))*sqrt(MSres/(SCZ/(length(zp)-1)))<=j)
{exitocp=exitocp+1}
#pruebas para n_máximo

```

```

zm=Amax[,1]
ym=Amax[,2]
fitm = lm(ym~zm)
SCZm=sum((zm-mean(zm))^2)
SZ2m=SCZm/length(zm)
Z2m=mean(zm)^2
MSresm=deviance(fitm)/(length(zm)-2)
Cm=summary(fitm)$coefficients #parametros beta (centro de la elipse)
if(abs(Cm[1,1]-0)<=qt(1-alfa/2,length(zm)-2)/sqrt(length(zm))*sqrt(MSresm*(1 + Z2m
/ SZ2m)) & abs(Cm[2,1]-1)<=(qt(1-alfa/2,length(zm) -2)/sqrt(length(zm) - 1))*sqrt(MSresm
/ (SCZm/(length(zm)-1))))
  {exitopm=exitopm+1}
  if((qt(1-alfa/2,length(zm)-2)/sqrt(length(zm))*sqrt(MSresm*(1+Z2m/SZ2m))<=j &
(qt(1-alfa/2,length(zm) -2)/sqrt(length(zm) -1))*sqrt(MSresm / (SCZm / (length(zm) -
1))))<=j)
    {exitocm=exitocm+1}
  #pruebas para n_conjunto
  zc=Acon[,1]
  yc=Acon[,2]
  fitc = lm(yc~zc)
  Cc=summary(fitc)$coefficients #parametros beta (centro de la elipse)
  SCZc=sum((zc-mean(zc))^2)
  SZ2c=SCZc/length(zc)
  Z2c=mean(zc)^2
  MSresc=deviance(fitc)/(length(zc)-2)
  beta= matrix(c(Cc[1,1]-0,Cc[2,1]-1))
  ZTZ=(length(zc)/(2*MSresc))*matrix(c(1, mean(zc), mean(zc), SZ2c+Z2c), nrow = 2,
ncol = 2)
  Tc=t(beta) %* %ZTZ %* %beta
  if(Tc<=qf(alfa,2,length(zc)-2,lower.tail=0))
    {exitopc=exitopc+1}
  if(qf(alfa,2,length(zc)-2,lower.tail=0)/((length(zc)/(4*MSresc))*(1+SZ2c+Z2c-sqrt((1 +
SZ2c + Z2c)^2-4*SZ2c)))<=j^2+j^2)
    {exitocc=exitocc+1}
  }
  pnprom[4+i,1+2*d10]=exitocp/mp
  pnprom[4+i,2+2*d10]=exitopp/mp
  pnmax[4+i,1+2*d10]=exitocm/mp
  pnmax[4+i,2+2*d10]=exitopm/mp
  pncon[4+i,1+2*d10]=exitocc/mp
  pncon[4+i,2+2*d10]=exitopc/mp
  d11=d11+1

```

```

d10=d10+1
}
}
}
arch2=paste('R2=9 tabla proporciones para eficiencia', nombren[1] ,sep = " ")
arch2=paste(arch2, ".csv", sep="")
write.table(pnprom, file=arch2, sep=";", col.names=NA)
arch3=paste('R2=9 tabla proporciones para eficiencia', nombren[2] ,sep = " ")
arch3=paste(arch3, ".csv", sep="")
write.table(pnmax, file=arch3, sep=";", col.names=NA)
arch4=paste('R2=9 tabla proporciones para eficiencia', nombren[3] ,sep = " ")
arch4=paste(arch4, ".csv", sep="")
write.table(pncon, file=arch4, sep=";", col.names=NA)
Resultados=list(Tamaños_de_muestra=nt,Eficiencia_Promedio=pnprom,Eficiencia_Máxi-
mo=pnmax,Eficiencia_conjunto=pncon)
return(Resultados)
}

```


Apéndice B

Otros resultados del estudio de simulación

B.1. $R^2 = 0.85$

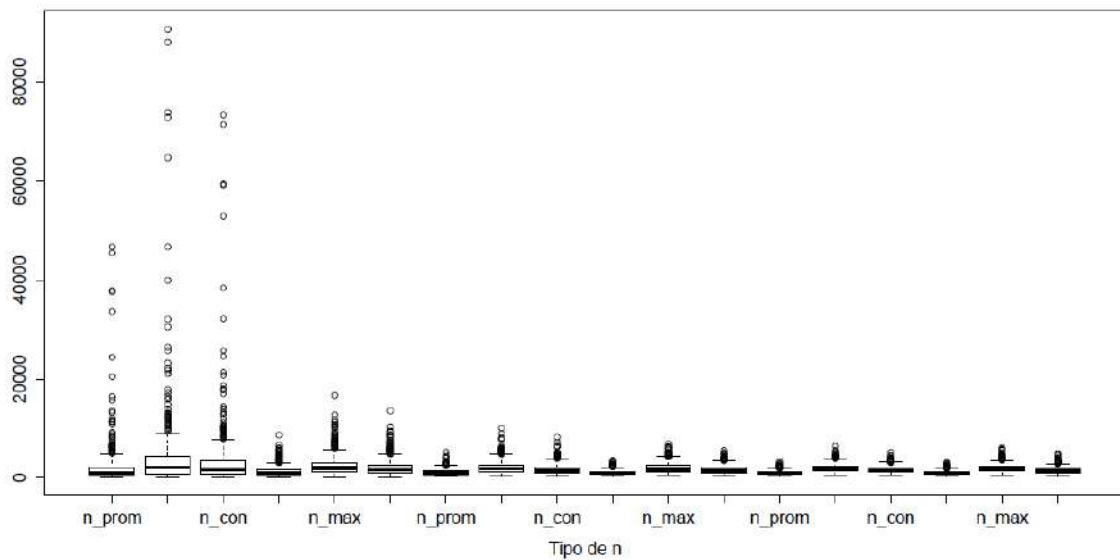


Figura B.1: Gráficos de caja para los tamaños de muestra promedio, máximo y conjunto correspondientes a la cota 0.1

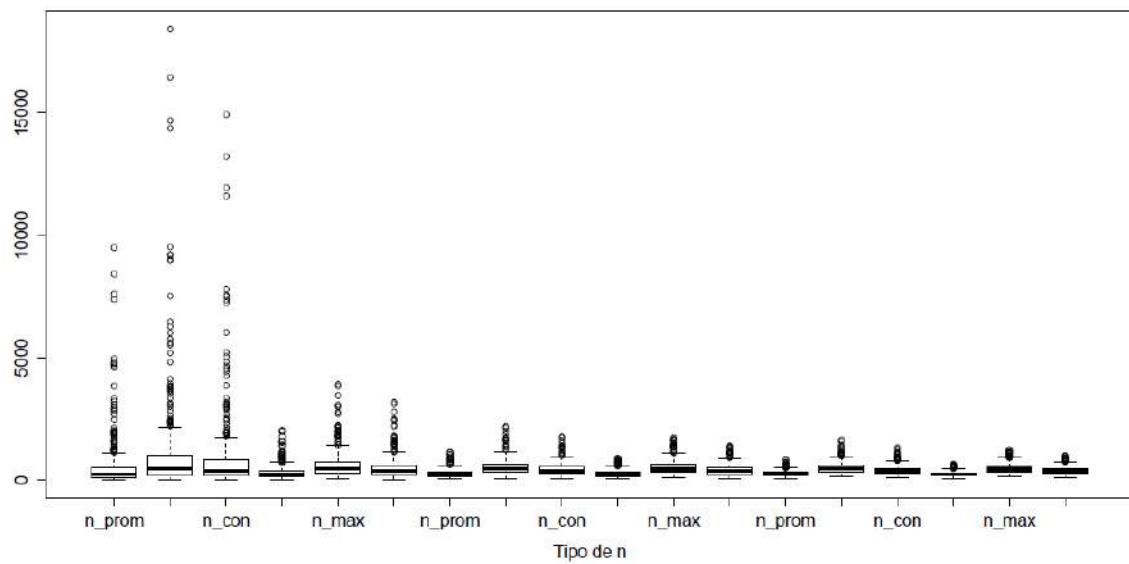


Figura B.2: Gráficos de caja para los tamaños de muestra promedio, máximo y conjunto correspondientes a la cota 0.2

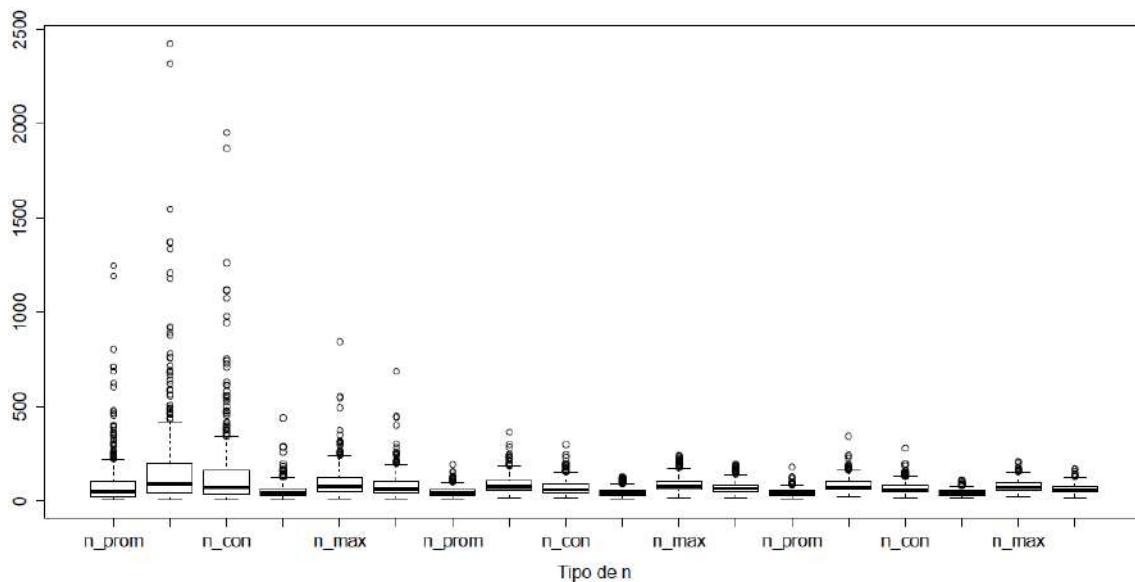


Figura B.3: Gráficos de caja para los tamaños de muestra promedio, máximo y conjunto correspondientes a la cota 0.5

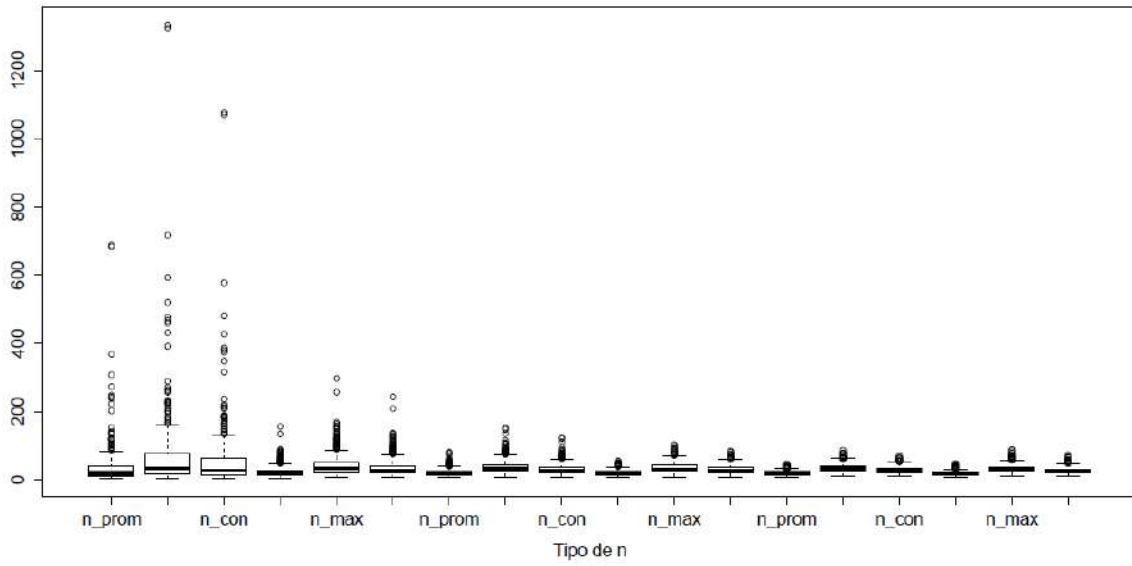


Figura B.4: Gráficos de caja para los tamaños de muestra promedio, máximo y conjunto correspondientes a la cota 0.8

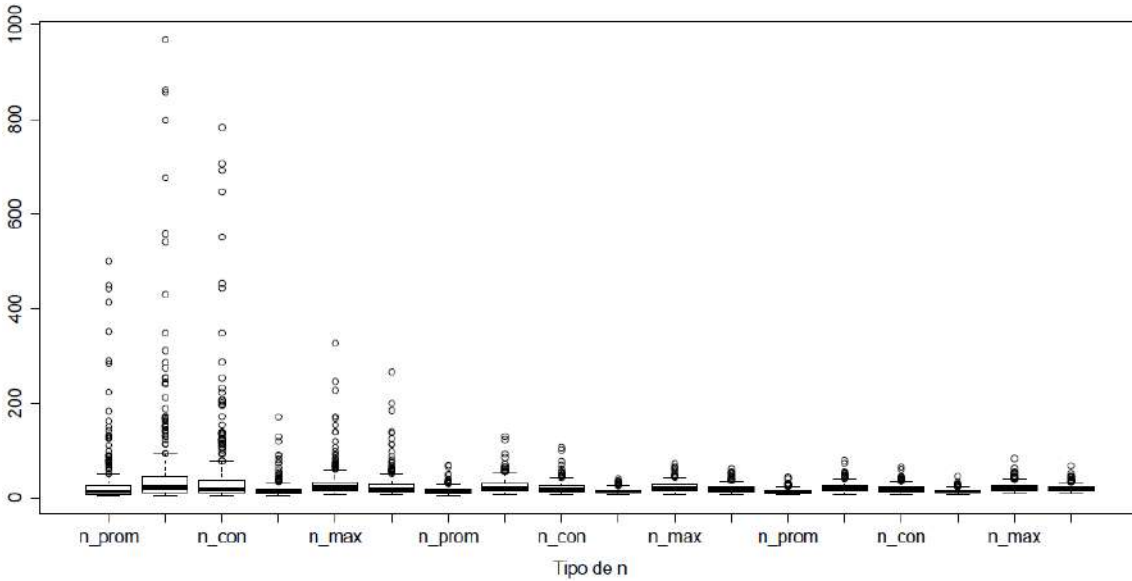


Figura B.5: Gráficos de caja para los tamaños de muestra promedio, máximo y conjunto correspondientes a la cota 1

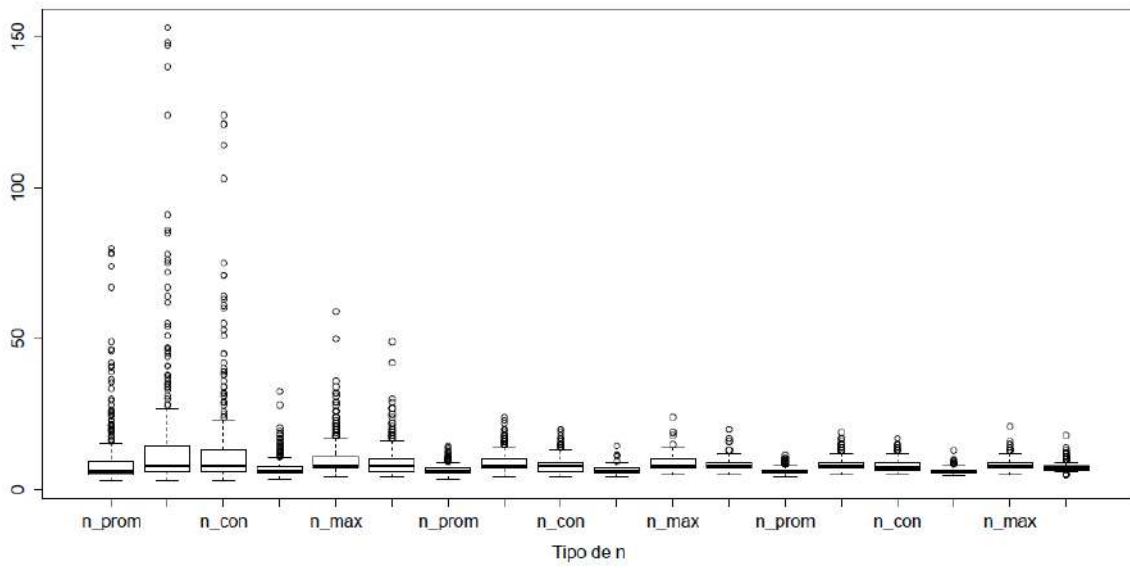


Figura B.6: Gráficos de caja para los tamaños de muestra promedio, máximo y conjunto correspondientes a la cota 2

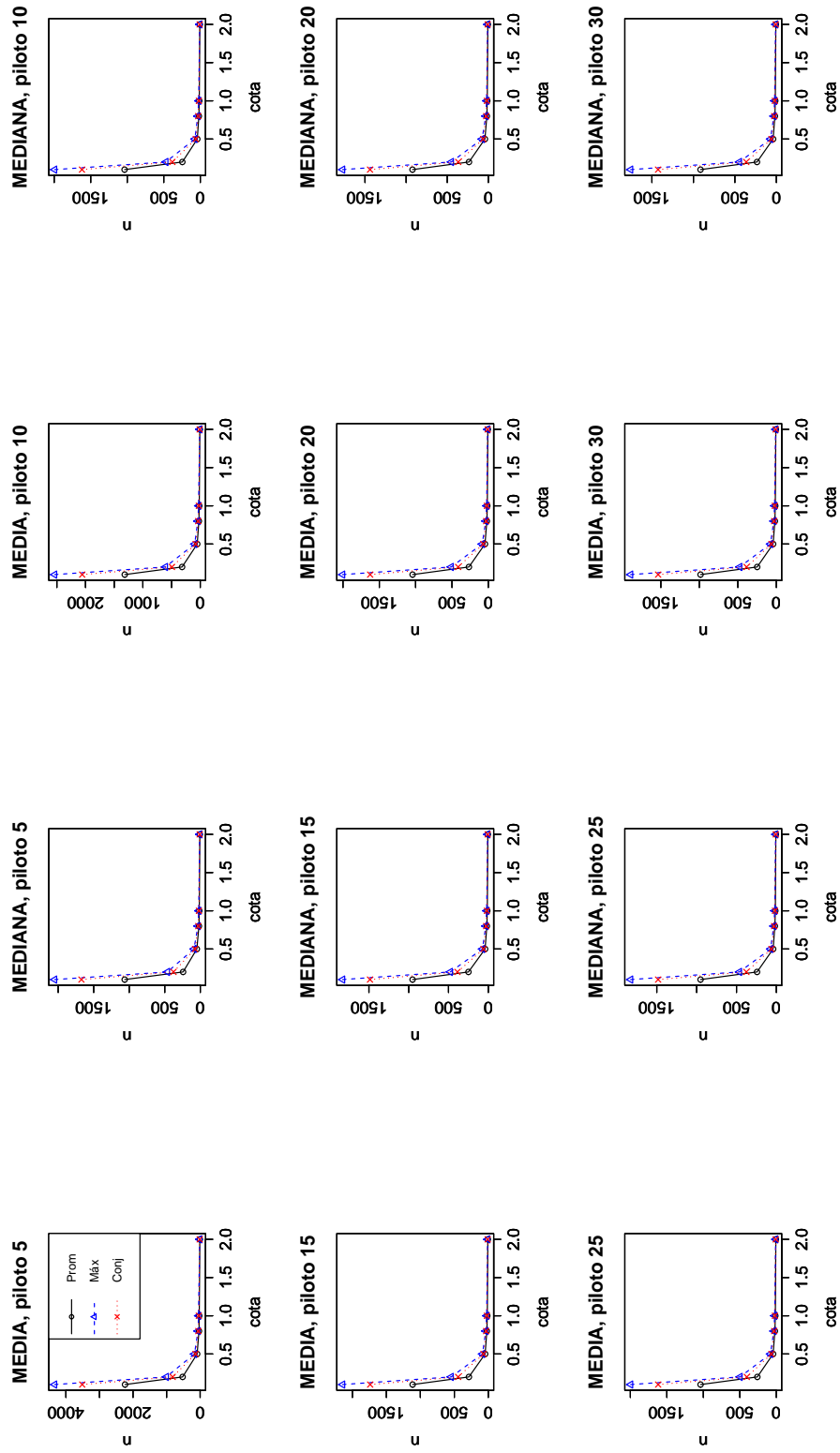


Figura B.7: Medias y medianas aumentando la cota, $R^2 = 0.85$

	0.1					0.2						
	5	10	15	20	25	30	5	10	15	20	25	30
	$P_{par.ám.}$	$P_{par.ám.}$	$P_{par.ám.}$	$P_{par.ám.}$	$P_{par.ám.}$	$P_{par.ám.}$	$P_{par.ám.}$	$P_{par.ám.}$	$P_{par.ám.}$	$P_{par.ám.}$	$P_{par.ám.}$	$P_{par.ám.}$
1	0.334	0.938	0.228	0.948	0.142	0.954	0.112	0.966	0.068	0.942	0.06	0.962
2	0.348	0.956	0.224	0.946	0.134	0.948	0.092	0.926	0.074	0.944	0.024	0.954
3	0.333	0.954	0.238	0.96	0.142	0.946	0.116	0.956	0.068	0.954	0.054	0.946
4	0.338	0.944	0.218	0.942	0.18	0.932	0.116	0.966	0.09	0.946	0.048	0.944
5	0.334	0.958	0.266	0.932	0.142	0.936	0.09	0.952	0.072	0.926	0.048	0.948
6	0.312	0.952	0.196	0.96	0.142	0.96	0.098	0.95	0.082	0.956	0.058	0.956
7	0.298	0.942	0.256	0.944	0.142	0.944	0.114	0.944	0.07	0.948	0.054	0.956
8	0.346	0.938	0.224	0.95	0.17	0.958	0.122	0.958	0.09	0.95	0.07	0.926
9	0.32	0.968	0.144	0.956	0.144	0.946	0.116	0.954	0.07	0.94	0.048	0.956
10	0.346	0.94	0.234	0.928	0.16	0.97	0.124	0.94	0.088	0.946	0.028	0.962
11	0.356	0.95	0.178	0.974	0.194	0.964	0.1	0.95	0.106	0.964	0.054	0.958
12	0.38	0.944	0.232	0.936	0.178	0.936	0.104	0.944	0.064	0.956	0.06	0.946
13	0.34	0.962	0.222	0.95	0.124	0.944	0.084	0.94	0.078	0.93	0.05	0.934
14	0.384	0.95	0.224	0.932	0.166	0.942	0.126	0.926	0.06	0.944	0.054	0.948
15	0.336	0.96	0.2	0.974	0.168	0.96	0.082	0.95	0.068	0.944	0.048	0.944
16	0.316	0.948	0.226	0.958	0.16	0.94	0.1	0.946	0.074	0.95	0.05	0.942
17	0.37	0.944	0.19	0.964	0.142	0.97	0.088	0.946	0.058	0.966	0.066	0.956
18	0.352	0.936	0.216	0.95	0.118	0.936	0.094	0.946	0.08	0.958	0.044	0.948
19	0.34	0.942	0.21	0.944	0.152	0.942	0.116	0.948	0.08	0.948	0.06	0.954
20	0.338	0.948	0.216	0.958	0.132	0.962	0.096	0.944	0.068	0.952	0.058	0.938
21	0.346	0.954	0.232	0.958	0.132	0.956	0.094	0.942	0.048	0.938	0.038	0.946
22	0.324	0.946	0.206	0.948	0.148	0.946	0.11	0.946	0.096	0.942	0.042	0.956
23	0.352	0.936	0.234	0.948	0.172	0.958	0.114	0.93	0.074	0.936	0.048	0.96
24	0.314	0.968	0.216	0.956	0.16	0.954	0.126	0.94	0.074	0.962	0.052	0.968
25	0.34	0.946	0.232	0.962	0.13	0.946	0.122	0.944	0.08	0.96	0.052	0.944
26	0.334	0.938	0.228	0.948	0.142	0.954	0.112	0.966	0.068	0.942	0.06	0.962
27	0.348	0.956	0.224	0.946	0.134	0.948	0.092	0.926	0.074	0.944	0.024	0.954
28	0.33	0.954	0.238	0.96	0.142	0.946	0.116	0.956	0.068	0.954	0.054	0.946
29	0.338	0.944	0.234	0.942	0.18	0.932	0.116	0.966	0.09	0.946	0.048	0.944
30	0.334	0.958	0.266	0.932	0.142	0.936	0.09	0.952	0.072	0.926	0.048	0.948
31	0.312	0.952	0.196	0.96	0.142	0.96	0.098	0.95	0.082	0.956	0.058	0.956
32	0.298	0.942	0.256	0.944	0.142	0.944	0.114	0.944	0.07	0.948	0.054	0.956
33	0.346	0.938	0.224	0.95	0.17	0.958	0.122	0.958	0.09	0.95	0.07	0.926
34	0.32	0.968	0.218	0.956	0.144	0.946	0.116	0.954	0.07	0.94	0.048	0.956
35	0.346	0.94	0.234	0.928	0.16	0.97	0.124	0.94	0.088	0.946	0.028	0.962
36	0.356	0.95	0.178	0.974	0.194	0.964	0.1	0.95	0.106	0.964	0.054	0.958
37	0.38	0.944	0.212	0.932	0.178	0.936	0.104	0.944	0.064	0.956	0.06	0.946
38	0.34	0.962	0.222	0.932	0.166	0.942	0.126	0.926	0.06	0.944	0.054	0.948
39	0.384	0.95	0.224	0.932	0.166	0.942	0.126	0.926	0.06	0.944	0.054	0.948
40	0.336	0.96	0.2	0.974	0.168	0.96	0.082	0.95	0.068	0.944	0.048	0.944
41	0.316	0.948	0.226	0.958	0.16	0.94	0.1	0.946	0.074	0.95	0.05	0.942
42	0.37	0.944	0.19	0.964	0.142	0.97	0.088	0.946	0.058	0.966	0.066	0.956
43	0.352	0.936	0.216	0.95	0.118	0.936	0.094	0.946	0.08	0.958	0.044	0.948
44	0.34	0.942	0.21	0.944	0.152	0.942	0.116	0.948	0.08	0.948	0.06	0.954
45	0.338	0.948	0.216	0.958	0.132	0.962	0.096	0.944	0.068	0.952	0.058	0.938
46	0.346	0.954	0.206	0.948	0.148	0.946	0.11	0.946	0.096	0.942	0.048	0.946
47	0.324	0.946	0.206	0.948	0.148	0.946	0.11	0.946	0.096	0.942	0.048	0.946
48	0.352	0.936	0.234	0.948	0.172	0.958	0.114	0.93	0.074	0.936	0.048	0.946
49	0.314	0.968	0.216	0.956	0.16	0.954	0.126	0.94	0.074	0.962	0.052	0.968
50	0.34	0.946	0.232	0.962	0.13	0.946	0.122	0.944	0.08	0.96	0.052	0.944
51	0.334	0.938	0.228	0.948	0.142	0.954	0.112	0.966	0.068	0.942	0.06	0.962
52	0.348	0.956	0.224	0.946	0.134	0.948	0.092	0.926	0.074	0.944	0.024	0.954
53	0.33	0.954	0.238	0.96	0.142	0.946	0.116	0.956	0.068	0.954	0.054	0.946
54	0.338	0.944	0.218	0.942	0.18	0.932	0.116	0.966	0.09	0.946	0.048	0.944
55	0.334	0.958	0.266	0.932	0.142	0.936	0.09	0.952	0.072	0.926	0.048	0.948
56	0.312	0.952	0.196	0.96	0.142	0.96	0.098	0.95	0.082	0.956	0.058	0.956
57	0.298	0.942	0.256	0.944	0.142	0.944	0.114	0.944	0.07	0.948	0.054	0.956

Cuadro B.1: Proporciones para medir la eficiencia de los métodos para $R^2 = 0.80$, cotas 0.1 y 0.2

58	0.346	0.938	0.224	0.95	0.17	0.958	0.122	0.958	0.09	0.95	0.07	0.926	0.354	0.936	0.236	0.926	0.186	0.948	0.112	0.956	0.076	0.95	0.054	0.972
59	0.32	0.968	0.218	0.956	0.144	0.946	0.116	0.954	0.07	0.94	0.048	0.956	0.36	0.948	0.212	0.97	0.166	0.942	0.106	0.936	0.098	0.946	0.066	0.954
60	0.346	0.94	0.234	0.928	0.16	0.97	0.124	0.94	0.088	0.946	0.028	0.962	0.326	0.95	0.236	0.94	0.146	0.95	0.094	0.944	0.104	0.954	0.078	0.938
61	0.356	0.95	0.178	0.974	0.194	0.964	0.1	0.95	0.106	0.964	0.054	0.958	0.38	0.958	0.192	0.956	0.144	0.954	0.124	0.962	0.074	0.94	0.064	0.946
62	0.38	0.944	0.212	0.932	0.178	0.936	0.104	0.944	0.064	0.956	0.06	0.946	0.322	0.932	0.224	0.962	0.142	0.948	0.106	0.95	0.064	0.952	0.064	0.958
63	0.34	0.962	0.222	0.95	0.124	0.944	0.084	0.94	0.078	0.93	0.05	0.934	0.348	0.956	0.248	0.958	0.166	0.966	0.106	0.964	0.074	0.962	0.058	0.944
64	0.384	0.95	0.224	0.932	0.166	0.942	0.126	0.926	0.06	0.944	0.054	0.948	0.308	0.946	0.212	0.954	0.17	0.936	0.116	0.944	0.082	0.954	0.06	0.958
65	0.336	0.96	0.2	0.974	0.168	0.96	0.082	0.95	0.068	0.944	0.048	0.944	0.37	0.954	0.196	0.936	0.124	0.956	0.116	0.956	0.088	0.946	0.044	0.954
66	0.316	0.948	0.226	0.958	0.16	0.94	0.1	0.946	0.074	0.95	0.05	0.942	0.358	0.952	0.242	0.952	0.16	0.95	0.092	0.954	0.082	0.966	0.05	0.954
67	0.37	0.944	0.19	0.964	0.142	0.97	0.088	0.946	0.058	0.966	0.066	0.956	0.334	0.942	0.238	0.94	0.168	0.954	0.114	0.962	0.088	0.944	0.046	0.96
68	0.352	0.936	0.216	0.95	0.118	0.936	0.094	0.946	0.08	0.958	0.044	0.948	0.294	0.946	0.22	0.97	0.142	0.952	0.084	0.946	0.076	0.962	0.052	0.96
69	0.34	0.942	0.21	0.944	0.152	0.942	0.116	0.948	0.08	0.948	0.06	0.954	0.324	0.934	0.216	0.954	0.156	0.95	0.12	0.934	0.076	0.952	0.032	0.964
70	0.338	0.948	0.216	0.958	0.132	0.962	0.096	0.944	0.068	0.952	0.058	0.938	0.34	0.952	0.22	0.958	0.166	0.936	0.108	0.952	0.084	0.958	0.058	0.928
71	0.346	0.954	0.232	0.958	0.132	0.956	0.094	0.942	0.048	0.938	0.038	0.946	0.31	0.94	0.202	0.954	0.144	0.93	0.118	0.942	0.086	0.942	0.062	0.956
72	0.324	0.946	0.206	0.948	0.148	0.946	0.11	0.946	0.096	0.942	0.042	0.956	0.33	0.952	0.232	0.954	0.154	0.944	0.12	0.958	0.068	0.948	0.046	0.934
73	0.352	0.936	0.234	0.948	0.172	0.958	0.114	0.93	0.074	0.936	0.048	0.96	0.354	0.942	0.232	0.962	0.154	0.97	0.09	0.954	0.074	0.954	0.046	0.962
74	0.314	0.968	0.216	0.956	0.16	0.954	0.126	0.94	0.074	0.962	0.052	0.968	0.358	0.954	0.206	0.938	0.164	0.946	0.108	0.944	0.088	0.934	0.054	0.956
75	0.34	0.946	0.232	0.962	0.13	0.946	0.122	0.944	0.08	0.96	0.052	0.944	0.354	0.938	0.226	0.946	0.16	0.952	0.098	0.938	0.076	0.946	0.072	0.936
76	0.334	0.938	0.228	0.948	0.142	0.954	0.112	0.966	0.068	0.942	0.06	0.962	0.348	0.954	0.246	0.946	0.16	0.942	0.09	0.95	0.088	0.946	0.052	0.942
77	0.348	0.956	0.224	0.946	0.134	0.948	0.092	0.926	0.074	0.944	0.024	0.954	0.348	0.936	0.222	0.95	0.15	0.942	0.116	0.952	0.1	0.948	0.054	0.94
78	0.33	0.954	0.238	0.96	0.142	0.946	0.116	0.956	0.068	0.954	0.054	0.946	0.3	0.932	0.22	0.94	0.134	0.932	0.11	0.95	0.072	0.958	0.064	0.944
79	0.338	0.944	0.218	0.942	0.18	0.932	0.116	0.966	0.09	0.946	0.048	0.944	0.326	0.942	0.214	0.934	0.162	0.948	0.11	0.938	0.1	0.948	0.062	0.962
80	0.334	0.958	0.266	0.932	0.142	0.936	0.09	0.952	0.072	0.926	0.048	0.948	0.318	0.934	0.204	0.95	0.148	0.942	0.09	0.942	0.06	0.948	0.058	0.956
81	0.312	0.952	0.196	0.96	0.142	0.96	0.098	0.95	0.082	0.956	0.058	0.956	0.336	0.946	0.232	0.954	0.17	0.954	0.102	0.936	0.088	0.956	0.06	0.964
82	0.298	0.942	0.256	0.944	0.142	0.944	0.114	0.944	0.07	0.948	0.054	0.956	0.34	0.95	0.206	0.956	0.15	0.94	0.088	0.952	0.074	0.952	0.052	0.966
83	0.346	0.938	0.224	0.95	0.17	0.958	0.122	0.958	0.09	0.95	0.07	0.926	0.354	0.936	0.236	0.926	0.186	0.948	0.112	0.956	0.076	0.95	0.054	0.972
84	0.32	0.968	0.218	0.956	0.144	0.946	0.116	0.954	0.07	0.94	0.048	0.956	0.36	0.948	0.212	0.97	0.166	0.942	0.106	0.936	0.098	0.946	0.066	0.954
85	0.346	0.94	0.234	0.928	0.16	0.97	0.124	0.94	0.088	0.946	0.028	0.962	0.326	0.95	0.236	0.956	0.146	0.95	0.094	0.954	0.078	0.94	0.064	0.946
86	0.356	0.95	0.178	0.974	0.194	0.964	0.1	0.95	0.106	0.964	0.054	0.958	0.38	0.958	0.192	0.956	0.144	0.954	0.124	0.962	0.074	0.94	0.064	0.946
87	0.38	0.944	0.212	0.932	0.178	0.936	0.104	0.944	0.064	0.956	0.06	0.946	0.322	0.932	0.224	0.962	0.142	0.948	0.106	0.95	0.064	0.952	0.064	0.958
88	0.34	0.962	0.224	0.95	0.124	0.944	0.084	0.94	0.078	0.93	0.05	0.934	0.348	0.956	0.248	0.958	0.166	0.966	0.106	0.964	0.074	0.962	0.058	0.944
89	0.384	0.95	0.224	0.932	0.166	0.942	0.126	0.926	0.06	0.944	0.054	0.948	0.308	0.946	0.212	0.954	0.17	0.936	0.116	0.944	0.082	0.954	0.06	0.958
90	0.336	0.96	0.2	0.974	0.168	0.96	0.082	0.95	0.068	0.944	0.048	0.944	0.37	0.954	0.196	0.936	0.124	0.956	0.116	0.956	0.088	0.946	0.044	0.954
91	0.316	0.948	0.226	0.958	0.16	0.94	0.1	0.946	0.074	0.95	0.05	0.942	0.358	0.952	0.242	0.952	0.16	0.95	0.092	0.954	0.082	0.966	0.05	0.954
92	0.37	0.944	0.19	0.964	0.142	0.97	0.088	0.946	0.058	0.966	0.066	0.956	0.334	0.942	0.238	0.94	0.168	0.954	0.114	0.962	0.088	0.944	0.046	0.96
93	0.352	0.936	0.216	0.95	0.118	0.936	0.094	0.946	0.08	0.958	0.044	0.948	0.294	0.946	0.22	0.97	0.142	0.952	0.084	0.946	0.076	0.962	0.052	0.96
94	0.34	0.942	0.21	0.944	0.152	0.942	0.116	0.948	0.08	0.948	0.06	0.954	0.324	0.934	0.216	0.954	0.156	0.95	0.12	0.934	0.076	0.952	0.032	0.964
95	0.338	0.948	0.216	0.958	0.132	0.962	0.096	0.944	0.068	0.952	0.058	0.938	0.34	0.952	0.22	0.958	0.166	0.936	0.108	0.952	0.084	0.958	0.058	0.928
96	0.346	0.954	0.206	0.948	0.148	0.946	0.11	0.946	0.096	0.942	0.042	0.956	0.33	0.952	0.232	0.954	0.154	0.944	0.112	0.958	0.068	0.948	0.046	0.934
97	0.324	0.946	0.232	0.958	0.132	0.956	0.094	0.942	0.048	0.938	0.038	0.946	0.31	0.94	0.202	0.954	0.144	0.93	0.118	0.942	0.086	0.942	0.062	0.956
98	0.352	0.936	0.234	0.948	0.172	0.958	0.114	0.93	0.074	0.936	0.048	0.96	0.354	0.942	0.232	0.962	0.154	0.97	0.09	0.954	0.074	0.954	0.046	0.962
99	0.314	0.968	0.216	0.956	0.16	0.954	0.126	0.94	0.074	0.962	0.052	0.968	0.358	0.954	0.206	0.938	0.164	0.946	0.108	0.944	0.088	0.934	0.054	0.956
100	0.34	0.946	0.232	0.962	0.13	0.946	0.122	0.944	0.08	0.96	0.052	0.944	0.354	0.938	0.226	0.946	0.16	0.952	0.098	0.938	0.076	0.946	0.072	0.936
101	0.368	0.958	0.208	0.936	0.116	0.944	0.106	0.954	0.082	0.948	0.064	0.95	0.334	0.958	0.2	0.948	0.162	0.966	0.088	0.954	0.072	0.94	0.048	0.94
102	0.334	0.954	0.223	0.96	0.16	0.944	0.11	0.958	0.066	0.96	0.044	0.958	0.324	0.938	0.222	0.95	0.14	0.968	0.102	0.964	0.1	0.952	0.052	0.95
103	0.328	0.948	0.2	0.946	0.162	0.96	0.092	0.942	0.064	0.936	0.062	0.95	0.386	0.94	0.246	0.956	0.16	0.956	0.106	0.948	0.06	0.962	0.046	0.942
104	0.326	0.952	0.236	0.97	0.158	0.956	0.096	0.95	0.068	0.958	0.046	0.95	0.332	0.966	0.234	0.95	0.17	0.942	0.112	0.954	0.082	0.938	0.064	0.938
105	0.346	0.934	0.218	0.958	0.144	0.944	0.084	0.944	0.084	0.936	0.042	0.942	0.316	0.932	0.196	0.938	0.142	0.944	0.096	0.938	0.07	0.952	0.072	0.954
106	0.362	0.95	0.204	0.942	0.164	0.95	0.114	0.944	0.078	0.958	0.048	0.95	0.388	0.94	0.208	0.966	0.16	0.948	0.112	0.932	0.08	0.956	0.042	0.948
107	0.36	0.952	0.222	0.954	0.136	0.948	0.102	0.928	0.066	0.954	0.052	0.968	0.342	0.95	0.23	0.946	0.16	0.942	0.124	0.946	0.096	0.942	0.	

118	0.322	0.948	0.25	0.962	0.144	0.948	0.088	0.948	0.086	0.954	0.07	0.962	0.394	0.942	0.234	0.94	0.166	0.932	0.12	0.94	0.086	0.958	0.078	0.93
119	0.306	0.952	0.214	0.95	0.138	0.956	0.092	0.956	0.084	0.956	0.052	0.938	0.348	0.942	0.218	0.966	0.146	0.964	0.116	0.952	0.076	0.95	0.06	0.958
120	0.376	0.942	0.234	0.968	0.14	0.944	0.092	0.95	0.086	0.958	0.06	0.924	0.35	0.942	0.238	0.944	0.164	0.94	0.104	0.952	0.07	0.942	0.044	0.94
121	0.382	0.942	0.216	0.956	0.152	0.942	0.122	0.942	0.068	0.952	0.048	0.946	0.332	0.938	0.24	0.966	0.156	0.946	0.132	0.944	0.064	0.954	0.074	0.966
122	0.342	0.944	0.234	0.964	0.14	0.954	0.098	0.95	0.078	0.946	0.06	0.962	0.318	0.935	0.206	0.946	0.132	0.936	0.086	0.93	0.08	0.958	0.068	0.946
123	0.328	0.96	0.23	0.968	0.154	0.952	0.074	0.94	0.074	0.958	0.06	0.938	0.358	0.952	0.2	0.95	0.172	0.96	0.13	0.968	0.076	0.952	0.052	0.96
124	0.32	0.954	0.222	0.942	0.144	0.944	0.128	0.942	0.09	0.962	0.054	0.942	0.334	0.946	0.242	0.95	0.148	0.946	0.096	0.94	0.074	0.954	0.072	0.95
125	0.342	0.952	0.222	0.944	0.154	0.964	0.12	0.946	0.07	0.966	0.06	0.936	0.334	0.958	0.256	0.934	0.144	0.944	0.156	0.936	0.076	0.954	0.064	0.944
126	0.372	0.948	0.216	0.932	0.15	0.94	0.106	0.956	0.076	0.962	0.06	0.95	0.372	0.96	0.226	0.94	0.168	0.984	0.074	0.956	0.074	0.95	0.068	0.946
127	0.348	0.94	0.222	0.948	0.154	0.958	0.1	0.954	0.11	0.962	0.054	0.974	0.332	0.952	0.21	0.942	0.134	0.95	0.112	0.944	0.068	0.922	0.064	0.968
128	0.338	0.948	0.204	0.956	0.162	0.944	0.15	0.942	0.072	0.96	0.066	0.958	0.368	0.954	0.266	0.952	0.18	0.952	0.122	0.942	0.09	0.97	0.05	0.962
129	0.33	0.958	0.208	0.926	0.126	0.938	0.126	0.952	0.078	0.956	0.046	0.964	0.358	0.948	0.208	0.944	0.158	0.958	0.086	0.916	0.072	0.956	0.05	0.954
130	0.336	0.938	0.242	0.962	0.138	0.936	0.106	0.948	0.068	0.958	0.068	0.952	0.348	0.946	0.238	0.942	0.17	0.946	0.116	0.944	0.086	0.95	0.05	0.966
131	0.33	0.96	0.24	0.928	0.16	0.956	0.128	0.968	0.088	0.94	0.024	0.968	0.346	0.944	0.204	0.948	0.162	0.952	0.102	0.956	0.084	0.94	0.054	0.952
132	0.318	0.954	0.202	0.95	0.13	0.938	0.088	0.956	0.068	0.944	0.054	0.966	0.358	0.952	0.188	0.95	0.158	0.944	0.108	0.952	0.102	0.96	0.068	0.944
133	0.336	0.944	0.252	0.95	0.182	0.948	0.1	0.955	0.076	0.94	0.058	0.94	0.318	0.958	0.244	0.936	0.122	0.948	0.098	0.966	0.074	0.93	0.052	0.95
134	0.344	0.936	0.256	0.95	0.144	0.942	0.09	0.96	0.086	0.948	0.054	0.944	0.354	0.952	0.212	0.958	0.158	0.966	0.104	0.938	0.074	0.936	0.044	0.934
135	0.358	0.952	0.234	0.958	0.124	0.956	0.078	0.952	0.068	0.952	0.05	0.95	0.282	0.95	0.208	0.944	0.168	0.954	0.118	0.948	0.082	0.952	0.07	0.94
136	0.31	0.948	0.24	0.948	0.156	0.94	0.078	0.954	0.064	0.948	0.038	0.96	0.336	0.944	0.214	0.936	0.176	0.956	0.118	0.956	0.078	0.936	0.062	0.954
137	0.366	0.952	0.224	0.93	0.15	0.946	0.082	0.926	0.08	0.954	0.06	0.962	0.342	0.956	0.256	0.952	0.134	0.954	0.082	0.94	0.106	0.952	0.046	0.948
138	0.35	0.95	0.202	0.956	0.15	0.95	0.112	0.958	0.054	0.948	0.052	0.954	0.356	0.954	0.222	0.95	0.172	0.958	0.112	0.948	0.064	0.962	0.048	0.95
139	0.346	0.952	0.216	0.954	0.184	0.94	0.098	0.942	0.06	0.954	0.04	0.952	0.328	0.948	0.208	0.956	0.144	0.95	0.118	0.96	0.088	0.954	0.066	0.956
140	0.348	0.95	0.23	0.934	0.134	0.942	0.124	0.938	0.076	0.942	0.054	0.956	0.34	0.964	0.232	0.96	0.144	0.946	0.098	0.958	0.072	0.942	0.054	0.956
141	0.298	0.958	0.222	0.94	0.146	0.966	0.074	0.936	0.1	0.952	0.074	0.94	0.322	0.938	0.244	0.952	0.166	0.946	0.112	0.96	0.082	0.956	0.042	0.954
142	0.308	0.97	0.216	0.942	0.146	0.952	0.124	0.946	0.08	0.928	0.044	0.934	0.334	0.962	0.206	0.938	0.142	0.938	0.088	0.948	0.07	0.94	0.054	0.934
143	0.338	0.956	0.21	0.934	0.156	0.956	0.114	0.96	0.074	0.958	0.072	0.952	0.36	0.968	0.228	0.954	0.166	0.948	0.114	0.954	0.09	0.958	0.058	0.956
144	0.356	0.948	0.206	0.946	0.13	0.938	0.116	0.974	0.08	0.932	0.052	0.946	0.36	0.93	0.236	0.95	0.134	0.948	0.096	0.954	0.068	0.916	0.048	0.964
145	0.328	0.948	0.158	0.958	0.158	0.95	0.114	0.948	0.092	0.96	0.064	0.952	0.346	0.946	0.23	0.95	0.166	0.954	0.088	0.962	0.062	0.946	0.064	0.942
146	0.338	0.946	0.23	0.948	0.124	0.958	0.094	0.948	0.092	0.954	0.052	0.956	0.35	0.95	0.204	0.938	0.148	0.966	0.096	0.952	0.078	0.958	0.068	0.942
147	0.382	0.944	0.198	0.956	0.146	0.926	0.144	0.956	0.07	0.954	0.046	0.954	0.312	0.948	0.228	0.952	0.132	0.946	0.12	0.956	0.06	0.968	0.044	0.942
148	0.352	0.948	0.208	0.954	0.152	0.948	0.096	0.962	0.064	0.93	0.052	0.968	0.358	0.948	0.23	0.962	0.148	0.944	0.106	0.966	0.068	0.932	0.046	0.956
149	0.328	0.952	0.234	0.954	0.15	0.942	0.082	0.952	0.058	0.936	0.05	0.96	0.326	0.946	0.228	0.938	0.142	0.938	0.088	0.948	0.07	0.94	0.054	0.934
150	0.37	0.95	0.17	0.94	0.12	0.952	0.09	0.956	0.062	0.954	0.052	0.968	0.334	0.952	0.23	0.954	0.138	0.948	0.088	0.96	0.068	0.95	0.066	0.946
151	0.372	0.948	0.216	0.932	0.15	0.94	0.106	0.956	0.076	0.962	0.064	0.95	0.372	0.96	0.226	0.94	0.168	0.984	0.074	0.956	0.074	0.95	0.068	0.946
152	0.348	0.94	0.222	0.948	0.154	0.958	0.1	0.954	0.11	0.962	0.054	0.974	0.332	0.952	0.21	0.942	0.134	0.95	0.112	0.944	0.068	0.922	0.064	0.968
153	0.338	0.948	0.204	0.956	0.162	0.944	0.15	0.942	0.072	0.96	0.066	0.958	0.368	0.954	0.266	0.952	0.18	0.952	0.122	0.942	0.09	0.97	0.05	0.962
154	0.33	0.958	0.208	0.926	0.126	0.936	0.126	0.952	0.078	0.956	0.046	0.964	0.358	0.948	0.208	0.944	0.158	0.958	0.086	0.916	0.072	0.956	0.05	0.954
155	0.336	0.938	0.242	0.962	0.138	0.936	0.106	0.948	0.068	0.958	0.068	0.952	0.348	0.946	0.238	0.942	0.17	0.946	0.116	0.944	0.086	0.95	0.05	0.966
156	0.33	0.96	0.24	0.928	0.16	0.956	0.128	0.968	0.088	0.94	0.028	0.968	0.346	0.944	0.204	0.948	0.162	0.952	0.102	0.956	0.084	0.94	0.054	0.952
157	0.318	0.954	0.202	0.95	0.13	0.938	0.088	0.956	0.068	0.944	0.054	0.966	0.358	0.952	0.188	0.948	0.162	0.952	0.102	0.956	0.102	0.96	0.068	0.944
158	0.336	0.944	0.252	0.95	0.182	0.948	0.1	0.955	0.076	0.94	0.058	0.94	0.318	0.958	0.244	0.936	0.122	0.948	0.098	0.966	0.074	0.93	0.052	0.95
159	0.344	0.936	0.256	0.95	0.144	0.942	0.09	0.96	0.086	0.948	0.054	0.944	0.354	0.952	0.212	0.958	0.158	0.966	0.104	0.938	0.074	0.936	0.044	0.934
160	0.358	0.952	0.234	0.958	0.124	0.956	0.078	0.952	0.068	0.952	0.05	0.95	0.282	0.95	0.208	0.944	0.168	0.954	0.118	0.948	0.082	0.952	0.07	0.94
161	0.31	0.948	0.24	0.948	0.156	0.94	0.078	0.954	0.064	0.948	0.038	0.96	0.336	0.944	0.214	0.936	0.176	0.956	0.118	0.956	0.078	0.936	0.062	0.954
162	0.366	0.952	0.224	0.93	0.15	0.946	0.082	0.926	0.08	0.954	0.06	0.962	0.342	0.956	0.256	0.952	0.134	0.954	0.082	0.94	0.106	0.952	0.046	0.948
163	0.35	0.95	0.202	0.956	0.15	0.95	0.112	0.958	0.054	0.948	0.054	0.954	0.356	0.954	0.222	0.95	0.172	0.958	0.112	0.948	0.064	0.962	0.048	0.95
164	0.346	0.952	0.216	0.954	0.184	0.94	0.098	0.942	0.06	0.954	0.064	0.952	0.328	0.948	0.238	0.956	0.144	0.946	0.098	0.96	0.088	0.954	0.066	0.956
165	0.348	0.95	0.23	0.934	0.134	0.942	0.124	0.938	0.076	0.942	0.054	0.956	0.34	0.964	0.232	0.96	0.144	0.946	0.098	0.958	0.072	0.942	0.054	0.956
166	0.298	0.958	0.222	0.94	0.146	0.966	0.074	0.936	0.1	0.952	0.074	0.94	0.322	0.938	0.244	0.952	0.166	0.946	0.112	0.96	0.082	0.956	0.042	0.954
167	0.308	0.97	0.216	0.942	0.146	0.952	0.124	0.946	0.08	0.928	0.044	0.934	0.332	0.962	0.206	0.938	0.142							

178	0.338	0.948	0.204	0.956	0.162	0.944	0.15	0.942	0.072	0.96	0.066	0.958	0.368	0.954	0.266	0.952	0.18	0.952	0.122	0.942	0.09	0.97	0.05	0.962
179	0.33	0.958	0.208	0.926	0.126	0.938	0.126	0.952	0.078	0.956	0.046	0.964	0.358	0.948	0.208	0.944	0.158	0.958	0.086	0.916	0.072	0.956	0.05	0.954
180	0.336	0.938	0.242	0.962	0.138	0.936	0.106	0.948	0.068	0.958	0.068	0.952	0.348	0.946	0.238	0.942	0.17	0.946	0.116	0.944	0.086	0.95	0.05	0.966
181	0.33	0.96	0.24	0.928	0.16	0.956	0.128	0.946	0.088	0.94	0.028	0.968	0.346	0.944	0.204	0.948	0.162	0.952	0.102	0.956	0.084	0.94	0.054	0.952
182	0.318	0.954	0.202	0.95	0.13	0.938	0.088	0.956	0.068	0.944	0.054	0.966	0.358	0.952	0.188	0.948	0.158	0.944	0.108	0.952	0.102	0.96	0.068	0.944
183	0.336	0.944	0.252	0.95	0.182	0.948	0.1	0.95	0.076	0.94	0.058	0.94	0.318	0.958	0.244	0.936	0.122	0.948	0.098	0.966	0.074	0.93	0.052	0.95
184	0.344	0.936	0.256	0.95	0.144	0.942	0.09	0.96	0.086	0.948	0.054	0.944	0.354	0.952	0.212	0.958	0.158	0.966	0.104	0.938	0.07	0.936	0.044	0.934
185	0.358	0.952	0.234	0.958	0.124	0.956	0.078	0.952	0.068	0.952	0.05	0.95	0.282	0.95	0.208	0.944	0.168	0.954	0.118	0.948	0.082	0.952	0.07	0.94
186	0.31	0.948	0.24	0.948	0.156	0.94	0.078	0.954	0.064	0.948	0.038	0.96	0.336	0.944	0.214	0.936	0.176	0.956	0.118	0.956	0.078	0.936	0.062	0.954
187	0.366	0.952	0.224	0.93	0.15	0.946	0.082	0.926	0.08	0.954	0.06	0.962	0.342	0.956	0.256	0.952	0.134	0.954	0.082	0.94	0.106	0.952	0.046	0.948
188	0.35	0.95	0.202	0.956	0.15	0.95	0.112	0.958	0.054	0.948	0.052	0.954	0.356	0.954	0.222	0.95	0.172	0.958	0.112	0.948	0.064	0.962	0.048	0.95
189	0.346	0.952	0.216	0.954	0.184	0.94	0.098	0.942	0.06	0.954	0.04	0.952	0.328	0.948	0.208	0.956	0.144	0.948	0.088	0.956	0.088	0.954	0.066	0.956
190	0.348	0.95	0.23	0.934	0.134	0.942	0.124	0.938	0.076	0.942	0.054	0.956	0.34	0.964	0.232	0.96	0.144	0.946	0.098	0.958	0.072	0.942	0.054	0.956
191	0.298	0.958	0.222	0.94	0.146	0.966	0.074	0.936	0.1	0.952	0.074	0.94	0.322	0.938	0.244	0.952	0.166	0.946	0.112	0.96	0.082	0.942	0.054	0.954
192	0.308	0.97	0.216	0.942	0.146	0.952	0.124	0.946	0.08	0.928	0.044	0.934	0.332	0.962	0.206	0.954	0.148	0.964	0.114	0.954	0.09	0.958	0.058	0.956
193	0.338	0.956	0.21	0.934	0.156	0.956	0.114	0.96	0.074	0.958	0.072	0.952	0.36	0.968	0.228	0.954	0.166	0.948	0.098	0.93	0.078	0.948	0.064	0.954
194	0.356	0.948	0.206	0.946	0.13	0.938	0.116	0.974	0.08	0.932	0.052	0.946	0.36	0.93	0.236	0.95	0.134	0.948	0.096	0.954	0.068	0.916	0.048	0.964
195	0.328	0.946	0.188	0.948	0.158	0.95	0.114	0.934	0.092	0.96	0.064	0.952	0.346	0.946	0.23	0.95	0.166	0.954	0.088	0.962	0.062	0.946	0.064	0.942
196	0.338	0.946	0.23	0.948	0.124	0.958	0.094	0.948	0.092	0.954	0.052	0.956	0.35	0.95	0.204	0.938	0.148	0.966	0.096	0.952	0.078	0.958	0.068	0.942
197	0.382	0.944	0.198	0.956	0.146	0.926	0.144	0.956	0.07	0.954	0.046	0.954	0.312	0.948	0.228	0.952	0.132	0.946	0.112	0.956	0.06	0.968	0.044	0.942
198	0.352	0.948	0.208	0.954	0.152	0.948	0.096	0.962	0.064	0.93	0.052	0.968	0.326	0.95	0.23	0.962	0.148	0.944	0.106	0.966	0.068	0.932	0.046	0.956
199	0.328	0.952	0.234	0.954	0.15	0.942	0.082	0.952	0.058	0.936	0.05	0.96	0.326	0.946	0.228	0.938	0.142	0.938	0.088	0.948	0.07	0.94	0.054	0.934
200	0.37	0.95	0.17	0.94	0.12	0.952	0.09	0.956	0.062	0.954	0.052	0.968	0.334	0.952	0.23	0.954	0.138	0.948	0.088	0.96	0.068	0.95	0.066	0.946
201	0.326	0.944	0.254	0.94	0.156	0.93	0.1	0.944	0.082	0.948	0.048	0.952	0.32	0.94	0.224	0.944	0.17	0.936	0.078	0.95	0.078	0.95	0.066	0.948
202	0.348	0.952	0.204	0.948	0.134	0.956	0.086	0.928	0.088	0.944	0.076	0.954	0.374	0.952	0.212	0.946	0.168	0.956	0.108	0.93	0.1	0.95	0.084	0.96
203	0.342	0.942	0.216	0.966	0.136	0.94	0.102	0.954	0.064	0.946	0.06	0.964	0.348	0.948	0.238	0.952	0.168	0.942	0.122	0.948	0.088	0.938	0.058	0.946
204	0.354	0.952	0.234	0.956	0.172	0.928	0.098	0.952	0.076	0.956	0.044	0.954	0.346	0.948	0.228	0.952	0.132	0.934	0.102	0.942	0.06	0.952	0.074	0.958
205	0.346	0.95	0.236	0.946	0.146	0.944	0.112	0.964	0.07	0.956	0.056	0.954	0.358	0.958	0.212	0.964	0.148	0.956	0.102	0.956	0.088	0.954	0.056	0.934
206	0.33	0.954	0.216	0.938	0.178	0.948	0.102	0.946	0.07	0.94	0.056	0.952	0.33	0.958	0.228	0.934	0.156	0.956	0.11	0.918	0.084	0.96	0.06	0.962
207	0.344	0.95	0.206	0.948	0.156	0.954	0.104	0.95	0.064	0.952	0.038	0.952	0.336	0.956	0.21	0.942	0.15	0.95	0.098	0.952	0.088	0.932	0.062	0.954
208	0.388	0.944	0.21	0.944	0.13	0.944	0.092	0.956	0.078	0.944	0.038	0.944	0.338	0.956	0.206	0.942	0.174	0.944	0.09	0.952	0.084	0.932	0.058	0.958
209	0.318	0.95	0.194	0.924	0.162	0.962	0.104	0.93	0.072	0.936	0.062	0.95	0.342	0.96	0.204	0.948	0.17	0.946	0.094	0.952	0.086	0.948	0.068	0.956
210	0.322	0.95	0.204	0.95	0.134	0.942	0.118	0.958	0.086	0.952	0.064	0.956	0.334	0.938	0.204	0.956	0.178	0.956	0.1	0.938	0.084	0.954	0.048	0.96
211	0.39	0.948	0.26	0.946	0.124	0.946	0.096	0.964	0.056	0.956	0.042	0.944	0.316	0.952	0.216	0.948	0.168	0.942	0.1	0.96	0.092	0.95	0.046	0.964
212	0.382	0.95	0.25	0.952	0.162	0.936	0.098	0.954	0.07	0.942	0.062	0.94	0.312	0.946	0.204	0.948	0.168	0.946	0.12	0.954	0.058	0.956	0.058	0.948
213	0.362	0.942	0.242	0.936	0.146	0.946	0.082	0.936	0.052	0.958	0.038	0.944	0.344	0.94	0.252	0.95	0.15	0.96	0.132	0.97	0.082	0.944	0.064	0.946
214	0.342	0.936	0.2	0.952	0.182	0.952	0.088	0.944	0.056	0.95	0.06	0.942	0.37	0.924	0.216	0.934	0.154	0.952	0.102	0.962	0.082	0.95	0.084	0.952
215	0.352	0.952	0.206	0.946	0.118	0.96	0.118	0.94	0.068	0.956	0.032	0.954	0.3	0.938	0.224	0.944	0.126	0.956	0.09	0.954	0.098	0.924	0.052	0.954
216	0.35	0.944	0.224	0.944	0.13	0.968	0.13	0.94	0.052	0.946	0.058	0.934	0.348	0.932	0.2	0.934	0.156	0.932	0.106	0.952	0.088	0.958	0.046	0.952
217	0.324	0.96	0.236	0.942	0.134	0.964	0.11	0.97	0.074	0.96	0.048	0.946	0.368	0.93	0.266	0.956	0.146	0.946	0.114	0.936	0.08	0.956	0.062	0.948
218	0.322	0.956	0.218	0.954	0.132	0.946	0.102	0.942	0.078	0.962	0.064	0.944	0.338	0.954	0.228	0.962	0.126	0.942	0.104	0.956	0.088	0.962	0.056	0.938
219	0.35	0.942	0.238	0.952	0.152	0.962	0.126	0.958	0.064	0.942	0.05	0.962	0.336	0.95	0.242	0.962	0.176	0.94	0.116	0.944	0.07	0.956	0.054	0.946
220	0.332	0.932	0.254	0.956	0.15	0.95	0.102	0.956	0.074	0.958	0.058	0.958	0.334	0.952	0.216	0.964	0.158	0.946	0.088	0.962	0.07	0.942	0.066	0.93
221	0.342	0.946	0.24	0.964	0.158	0.928	0.108	0.942	0.068	0.95	0.086	0.95	0.374	0.952	0.18	0.938	0.15	0.916	0.13	0.954	0.07	0.95	0.034	0.932
222	0.41	0.956	0.222	0.952	0.176	0.938	0.122	0.958	0.088	0.954	0.066	0.94	0.332	0.944	0.228	0.938	0.168	0.956	0.126	0.946	0.09	0.942	0.052	0.956
223	0.348	0.954	0.244	0.942	0.144	0.94	0.104	0.946	0.078	0.952	0.052	0.958	0.388	0.944	0.244	0.954	0.154	0.956	0.094	0.956	0.084	0.948	0.068	0.938
224	0.332	0.95	0.238	0.94	0.116	0.932	0.11	0.946	0.08	0.95	0.06	0.942	0.344	0.938	0.214	0.96	0.144	0.942	0.118	0.932	0.086	0.946	0.056	0.942
225	0.302	0.966	0.222	0.95	0.134	0.95	0.102	0.958	0.08	0.962	0.056	0.954	0.37	0.95	0.244	0.946	0.138	0.952	0.098	0.956	0.054	0.948	0.052	0.95
226	0.326	0.944	0.254	0.944	0.156	0.93	0.1	0.944	0.082	0.948	0.048	0.952	0.32	0.94	0.224	0.944	0.17	0.936	0.078	0.95	0.078	0.95	0.066	0.948
227	0.348	0.952	0.204	0.948	0.134	0.956	0.086	0.928	0.088	0.948	0.076	0.954	0.374	0.952	0.212	0.946	0.1							

238	0.362	0.942	0.242	0.936	0.146	0.946	0.082	0.936	0.052	0.958	0.038	0.944	0.344	0.94	0.252	0.95	0.15	0.96	0.132	0.97	0.082	0.944	0.064	0.946
239	0.342	0.936	0.2	0.952	0.182	0.952	0.088	0.944	0.056	0.95	0.06	0.942	0.37	0.924	0.216	0.934	0.154	0.952	0.102	0.962	0.082	0.95	0.084	0.952
240	0.352	0.952	0.206	0.946	0.118	0.96	0.118	0.94	0.068	0.956	0.032	0.954	0.3	0.938	0.224	0.944	0.126	0.956	0.09	0.954	0.098	0.924	0.052	0.954
241	0.35	0.944	0.224	0.944	0.13	0.968	0.13	0.94	0.052	0.946	0.058	0.934	0.348	0.932	0.2	0.934	0.156	0.932	0.106	0.952	0.088	0.958	0.046	0.952
242	0.324	0.96	0.236	0.942	0.134	0.964	0.11	0.97	0.074	0.96	0.048	0.946	0.368	0.93	0.266	0.956	0.146	0.946	0.114	0.936	0.08	0.956	0.062	0.948
243	0.322	0.956	0.218	0.954	0.132	0.946	0.102	0.942	0.078	0.962	0.064	0.944	0.338	0.954	0.228	0.962	0.126	0.942	0.104	0.956	0.088	0.962	0.056	0.938
244	0.35	0.942	0.238	0.952	0.152	0.962	0.126	0.958	0.064	0.942	0.05	0.962	0.336	0.95	0.242	0.962	0.176	0.94	0.116	0.944	0.07	0.956	0.054	0.946
245	0.332	0.932	0.254	0.956	0.15	0.95	0.102	0.956	0.074	0.958	0.058	0.958	0.334	0.952	0.216	0.964	0.158	0.946	0.088	0.962	0.07	0.942	0.066	0.93
246	0.342	0.946	0.24	0.964	0.158	0.928	0.108	0.942	0.068	0.95	0.086	0.95	0.374	0.952	0.18	0.938	0.15	0.916	0.13	0.954	0.07	0.95	0.034	0.932
247	0.41	0.956	0.222	0.952	0.176	0.938	0.122	0.958	0.088	0.954	0.066	0.94	0.332	0.944	0.228	0.938	0.168	0.956	0.126	0.946	0.09	0.942	0.052	0.956
248	0.348	0.954	0.244	0.942	0.144	0.94	0.104	0.946	0.078	0.952	0.052	0.958	0.388	0.94	0.244	0.954	0.154	0.956	0.094	0.956	0.084	0.948	0.068	0.938
249	0.332	0.95	0.238	0.94	0.116	0.932	0.11	0.946	0.08	0.95	0.06	0.942	0.344	0.938	0.214	0.96	0.144	0.942	0.118	0.932	0.086	0.946	0.056	0.942
250	0.302	0.966	0.222	0.95	0.134	0.95	0.102	0.958	0.08	0.962	0.056	0.954	0.37	0.95	0.244	0.946	0.138	0.952	0.098	0.956	0.054	0.948	0.052	0.95

Cuadro B.5: Proporciones para medir la eficiencia de los métodos para $R^2 = 0.80$, cotas 0.1 y 0.2 continuación

	0.5					0.8						
	5	10	15	20	25	30	5	10	15	20	25	30
	$P_{par.ám.}$	$P_{par.ám.}$	$P_{par.ám.}$	$P_{par.ám.}$	$P_{par.ám.}$	$P_{par.ám.}$	$P_{par.ám.}$	$P_{par.ám.}$	$P_{par.ám.}$	$P_{par.ám.}$	$P_{par.ám.}$	$P_{par.ám.}$
1	0.36	0.944	0.244	0.956	0.19	0.968	0.14	0.952	0.128	0.948	0.086	0.956
2	0.306	0.954	0.248	0.958	0.18	0.966	0.136	0.926	0.106	0.964	0.076	0.934
3	0.348	0.946	0.244	0.94	0.176	0.944	0.158	0.958	0.112	0.948	0.116	0.94
4	0.368	0.95	0.254	0.95	0.192	0.966	0.136	0.954	0.112	0.934	0.108	0.966
5	0.324	0.956	0.222	0.962	0.168	0.952	0.132	0.942	0.088	0.934	0.076	0.95
6	0.362	0.96	0.256	0.944	0.184	0.956	0.116	0.946	0.106	0.93	0.088	0.958
7	0.376	0.964	0.216	0.942	0.174	0.946	0.166	0.946	0.122	0.958	0.102	0.96
8	0.356	0.962	0.262	0.946	0.168	0.948	0.124	0.958	0.098	0.962	0.072	0.948
9	0.366	0.968	0.234	0.932	0.196	0.952	0.132	0.93	0.126	0.952	0.086	0.958
10	0.336	0.948	0.248	0.93	0.174	0.938	0.144	0.942	0.098	0.952	0.074	0.94
11	0.386	0.958	0.256	0.942	0.186	0.946	0.158	0.932	0.128	0.928	0.106	0.948
12	0.388	0.936	0.268	0.944	0.194	0.934	0.156	0.954	0.096	0.962	0.104	0.942
13	0.352	0.942	0.242	0.946	0.2	0.952	0.16	0.96	0.114	0.954	0.098	0.948
14	0.322	0.944	0.226	0.96	0.178	0.956	0.158	0.964	0.1	0.944	0.09	0.952
15	0.332	0.948	0.234	0.954	0.158	0.952	0.138	0.928	0.118	0.944	0.104	0.942
16	0.374	0.952	0.2	0.93	0.188	0.952	0.172	0.934	0.116	0.95	0.122	0.938
17	0.392	0.944	0.268	0.956	0.208	0.948	0.132	0.948	0.104	0.964	0.084	0.954
18	0.32	0.956	0.268	0.944	0.194	0.934	0.156	0.954	0.096	0.962	0.104	0.942
19	0.362	0.948	0.232	0.974	0.166	0.958	0.128	0.956	0.092	0.966	0.078	0.97
20	0.318	0.956	0.256	0.93	0.178	0.944	0.13	0.944	0.086	0.956	0.108	0.952
21	0.38	0.948	0.252	0.96	0.2	0.946	0.16	0.956	0.11	0.954	0.088	0.946
22	0.372	0.952	0.24	0.934	0.178	0.948	0.112	0.954	0.114	0.944	0.09	0.932
23	0.372	0.948	0.224	0.956	0.186	0.932	0.128	0.956	0.098	0.954	0.088	0.942
24	0.336	0.926	0.25	0.962	0.152	0.962	0.116	0.952	0.094	0.942	0.076	0.95
25	0.334	0.938	0.214	0.962	0.154	0.948	0.128	0.948	0.09	0.952	0.084	0.956
26	0.36	0.944	0.244	0.956	0.19	0.968	0.14	0.952	0.128	0.948	0.086	0.956
27	0.306	0.954	0.248	0.958	0.18	0.966	0.136	0.926	0.106	0.964	0.076	0.934
28	0.348	0.946	0.244	0.94	0.176	0.944	0.158	0.958	0.112	0.948	0.116	0.94
29	0.368	0.95	0.254	0.95	0.192	0.966	0.136	0.954	0.112	0.934	0.108	0.966
30	0.324	0.956	0.22	0.962	0.168	0.952	0.132	0.942	0.088	0.934	0.076	0.95
31	0.362	0.96	0.256	0.944	0.184	0.956	0.116	0.946	0.106	0.93	0.088	0.958
32	0.376	0.954	0.216	0.942	0.174	0.946	0.166	0.946	0.122	0.958	0.102	0.96
33	0.356	0.962	0.262	0.946	0.168	0.948	0.124	0.958	0.098	0.962	0.076	0.948
34	0.336	0.968	0.234	0.932	0.196	0.952	0.132	0.93	0.126	0.952	0.082	0.958
35	0.386	0.948	0.248	0.93	0.174	0.938	0.144	0.942	0.098	0.952	0.074	0.94
36	0.386	0.958	0.256	0.942	0.186	0.946	0.158	0.932	0.128	0.928	0.106	0.948
37	0.388	0.936	0.268	0.938	0.16	0.958	0.124	0.944	0.09	0.932	0.09	0.946
38	0.352	0.942	0.242	0.946	0.2	0.952	0.16	0.96	0.114	0.954	0.098	0.948
39	0.322	0.944	0.226	0.96	0.178	0.956	0.158	0.964	0.1	0.944	0.09	0.952
40	0.332	0.948	0.234	0.954	0.158	0.952	0.138	0.928	0.118	0.944	0.104	0.942
41	0.374	0.952	0.2	0.93	0.188	0.952	0.172	0.934	0.116	0.95	0.122	0.938
42	0.392	0.944	0.268	0.956	0.208	0.948	0.132	0.948	0.104	0.964	0.084	0.954
43	0.32	0.956	0.268	0.944	0.194	0.934	0.156	0.954	0.096	0.962	0.104	0.942
44	0.362	0.948	0.232	0.974	0.166	0.958	0.128	0.956	0.092	0.966	0.078	0.97
45	0.318	0.956	0.256	0.93	0.178	0.944	0.13	0.944	0.086	0.956	0.108	0.952
46	0.38	0.948	0.252	0.96	0.2	0.946	0.16	0.956	0.11	0.954	0.088	0.946
47	0.372	0.952	0.24	0.934	0.178	0.948	0.112	0.954	0.114	0.944	0.09	0.932
48	0.372	0.948	0.224	0.956	0.186	0.932	0.128	0.956	0.098	0.954	0.088	0.946
49	0.336	0.926	0.25	0.962	0.152	0.962	0.116	0.952	0.094	0.942	0.076	0.95
50	0.334	0.938	0.214	0.962	0.154	0.948	0.128	0.948	0.09	0.952	0.084	0.956
51	0.36	0.944	0.244	0.956	0.19	0.968	0.14	0.952	0.128	0.948	0.086	0.956
52	0.306	0.954	0.248	0.958	0.18	0.966	0.136	0.926	0.106	0.964	0.076	0.934
53	0.348	0.946	0.244	0.94	0.176	0.944	0.158	0.958	0.112	0.948	0.116	0.94
54	0.368	0.95	0.254	0.95	0.192	0.966	0.136	0.954	0.112	0.934	0.108	0.966
55	0.324	0.956	0.222	0.962	0.168	0.952	0.132	0.942	0.088	0.934	0.076	0.95
56	0.362	0.96	0.256	0.944	0.184	0.956	0.116	0.946	0.106	0.93	0.088	0.958
57	0.376	0.954	0.216	0.942	0.174	0.946	0.166	0.946	0.122	0.958	0.102	0.96

Cuadro B.6: Proporciones para medir la eficiencia de los métodos para $R^2 = 0.80$, cotas 0.5 y 0.8

58	0.356	0.962	0.262	0.946	0.168	0.948	0.124	0.958	0.098	0.962	0.076	0.948	0.38	0.948	0.258	0.942	0.212	0.956	0.166	0.928	0.14	0.944	0.15	0.946
59	0.336	0.968	0.234	0.932	0.196	0.952	0.132	0.93	0.126	0.952	0.082	0.958	0.378	0.942	0.262	0.96	0.196	0.938	0.196	0.95	0.14	0.958	0.164	0.944
60	0.336	0.948	0.248	0.93	0.174	0.938	0.144	0.942	0.098	0.952	0.074	0.94	0.4	0.964	0.256	0.948	0.222	0.934	0.168	0.934	0.178	0.94	0.162	0.934
61	0.386	0.958	0.256	0.942	0.186	0.946	0.158	0.942	0.128	0.928	0.106	0.948	0.384	0.962	0.276	0.942	0.246	0.952	0.18	0.924	0.182	0.94	0.16	0.94
62	0.388	0.936	0.268	0.938	0.16	0.958	0.124	0.944	0.09	0.932	0.09	0.946	0.358	0.946	0.286	0.964	0.25	0.942	0.152	0.94	0.184	0.968	0.106	0.952
63	0.352	0.942	0.242	0.946	0.2	0.952	0.16	0.96	0.114	0.954	0.098	0.948	0.352	0.928	0.274	0.934	0.206	0.91	0.166	0.952	0.164	0.944	0.198	0.934
64	0.322	0.944	0.226	0.96	0.178	0.956	0.158	0.964	0.1	0.944	0.09	0.952	0.358	0.944	0.302	0.934	0.232	0.928	0.204	0.948	0.138	0.948	0.128	0.936
65	0.332	0.948	0.234	0.954	0.158	0.952	0.138	0.928	0.118	0.944	0.104	0.942	0.354	0.942	0.29	0.932	0.212	0.954	0.182	0.962	0.174	0.95	0.152	0.944
66	0.374	0.952	0.2	0.93	0.188	0.952	0.172	0.934	0.116	0.95	0.122	0.938	0.36	0.936	0.276	0.96	0.232	0.952	0.188	0.932	0.178	0.962	0.152	0.952
67	0.392	0.944	0.268	0.956	0.208	0.948	0.132	0.948	0.104	0.964	0.084	0.954	0.384	0.954	0.274	0.946	0.214	0.946	0.152	0.958	0.154	0.942	0.158	0.96
68	0.32	0.956	0.268	0.944	0.194	0.934	0.156	0.954	0.096	0.962	0.104	0.942	0.37	0.954	0.286	0.946	0.19	0.934	0.164	0.942	0.13	0.938	0.16	0.938
69	0.362	0.948	0.232	0.974	0.166	0.958	0.128	0.956	0.092	0.966	0.078	0.97	0.396	0.956	0.248	0.932	0.216	0.96	0.204	0.936	0.162	0.954	0.144	0.954
70	0.318	0.956	0.256	0.93	0.178	0.944	0.13	0.944	0.086	0.956	0.08	0.952	0.384	0.946	0.246	0.954	0.18	0.948	0.204	0.946	0.19	0.944	0.14	0.948
71	0.38	0.948	0.252	0.96	0.2	0.946	0.16	0.956	0.11	0.954	0.088	0.946	0.378	0.956	0.24	0.968	0.24	0.944	0.186	0.936	0.188	0.944	0.148	0.954
72	0.372	0.952	0.24	0.934	0.178	0.948	0.112	0.954	0.114	0.944	0.09	0.932	0.394	0.942	0.296	0.952	0.24	0.962	0.216	0.934	0.158	0.936	0.182	0.946
73	0.372	0.948	0.224	0.956	0.186	0.932	0.128	0.956	0.098	0.954	0.088	0.942	0.384	0.94	0.3	0.96	0.202	0.948	0.188	0.926	0.15	0.926	0.154	0.966
74	0.336	0.926	0.25	0.962	0.152	0.962	0.116	0.952	0.104	0.942	0.084	0.956	0.358	0.956	0.278	0.944	0.204	0.948	0.218	0.926	0.208	0.938	0.146	0.946
75	0.334	0.938	0.214	0.962	0.154	0.948	0.128	0.948	0.09	0.952	0.084	0.956	0.398	0.956	0.278	0.944	0.204	0.948	0.218	0.926	0.208	0.938	0.146	0.946
76	0.36	0.944	0.244	0.956	0.19	0.968	0.14	0.952	0.128	0.948	0.086	0.956	0.358	0.954	0.3	0.962	0.198	0.936	0.166	0.962	0.158	0.948	0.162	0.95
77	0.306	0.954	0.248	0.958	0.18	0.966	0.136	0.926	0.106	0.964	0.076	0.934	0.37	0.954	0.278	0.946	0.206	0.954	0.206	0.962	0.184	0.956	0.176	0.952
78	0.348	0.946	0.244	0.94	0.176	0.944	0.158	0.958	0.112	0.948	0.116	0.94	0.368	0.958	0.268	0.924	0.222	0.95	0.172	0.96	0.134	0.94	0.136	0.94
79	0.368	0.95	0.254	0.95	0.192	0.966	0.136	0.954	0.112	0.934	0.108	0.966	0.36	0.94	0.282	0.952	0.256	0.942	0.176	0.954	0.152	0.934	0.146	0.948
80	0.324	0.956	0.22	0.962	0.168	0.952	0.132	0.942	0.088	0.934	0.076	0.95	0.38	0.958	0.28	0.956	0.214	0.936	0.176	0.93	0.178	0.944	0.182	0.96
81	0.362	0.96	0.256	0.944	0.184	0.956	0.116	0.946	0.106	0.93	0.088	0.958	0.37	0.942	0.274	0.962	0.226	0.934	0.208	0.94	0.158	0.954	0.164	0.958
82	0.376	0.954	0.216	0.942	0.174	0.946	0.166	0.946	0.166	0.946	0.122	0.958	0.392	0.948	0.266	0.964	0.228	0.946	0.182	0.936	0.164	0.95	0.172	0.944
83	0.356	0.962	0.262	0.946	0.168	0.948	0.124	0.958	0.098	0.962	0.076	0.948	0.38	0.948	0.258	0.942	0.212	0.956	0.166	0.928	0.14	0.944	0.15	0.946
84	0.336	0.968	0.234	0.932	0.196	0.952	0.132	0.93	0.126	0.952	0.082	0.958	0.378	0.942	0.262	0.96	0.196	0.938	0.196	0.95	0.14	0.958	0.164	0.944
85	0.336	0.948	0.248	0.93	0.174	0.938	0.144	0.942	0.098	0.952	0.074	0.94	0.4	0.964	0.256	0.948	0.222	0.934	0.168	0.934	0.178	0.94	0.162	0.934
86	0.386	0.958	0.256	0.942	0.186	0.946	0.158	0.932	0.128	0.928	0.106	0.948	0.384	0.962	0.276	0.942	0.246	0.952	0.18	0.924	0.182	0.94	0.16	0.94
87	0.388	0.936	0.268	0.938	0.16	0.958	0.124	0.944	0.09	0.932	0.09	0.946	0.358	0.946	0.286	0.964	0.25	0.942	0.152	0.94	0.184	0.968	0.106	0.952
88	0.352	0.942	0.242	0.946	0.2	0.952	0.16	0.96	0.114	0.954	0.098	0.948	0.352	0.928	0.274	0.934	0.206	0.91	0.166	0.952	0.164	0.944	0.198	0.934
89	0.322	0.944	0.226	0.96	0.178	0.956	0.158	0.964	0.1	0.944	0.09	0.952	0.358	0.944	0.302	0.934	0.232	0.928	0.204	0.948	0.138	0.948	0.128	0.936
90	0.332	0.948	0.234	0.954	0.158	0.952	0.138	0.928	0.118	0.944	0.104	0.942	0.354	0.942	0.29	0.932	0.212	0.954	0.182	0.962	0.174	0.95	0.152	0.944
91	0.374	0.952	0.2	0.93	0.188	0.952	0.172	0.934	0.116	0.95	0.122	0.938	0.36	0.936	0.276	0.96	0.232	0.952	0.188	0.962	0.178	0.962	0.152	0.952
92	0.392	0.944	0.268	0.956	0.208	0.948	0.132	0.948	0.104	0.964	0.084	0.954	0.384	0.954	0.274	0.946	0.214	0.946	0.152	0.958	0.154	0.942	0.158	0.96
93	0.32	0.956	0.268	0.944	0.194	0.934	0.156	0.954	0.096	0.962	0.104	0.942	0.37	0.958	0.286	0.946	0.19	0.934	0.164	0.942	0.13	0.938	0.16	0.938
94	0.362	0.948	0.232	0.974	0.166	0.958	0.128	0.956	0.092	0.966	0.076	0.97	0.396	0.956	0.248	0.932	0.216	0.96	0.204	0.936	0.162	0.954	0.144	0.954
95	0.318	0.956	0.256	0.93	0.178	0.944	0.13	0.944	0.086	0.956	0.08	0.952	0.384	0.946	0.246	0.954	0.18	0.948	0.204	0.946	0.19	0.944	0.14	0.948
96	0.38	0.948	0.252	0.96	0.2	0.946	0.16	0.956	0.11	0.954	0.088	0.946	0.378	0.956	0.24	0.968	0.24	0.944	0.186	0.936	0.188	0.964	0.148	0.954
97	0.372	0.952	0.24	0.934	0.178	0.948	0.112	0.954	0.114	0.944	0.09	0.932	0.394	0.942	0.296	0.952	0.24	0.962	0.216	0.934	0.158	0.936	0.182	0.946
98	0.372	0.948	0.224	0.956	0.186	0.932	0.128	0.956	0.098	0.954	0.088	0.942	0.384	0.94	0.3	0.96	0.202	0.948	0.188	0.926	0.15	0.926	0.154	0.966
99	0.336	0.926	0.25	0.962	0.152	0.962	0.116	0.952	0.104	0.942	0.094	0.95	0.404	0.95	0.27	0.934	0.24	0.926	0.166	0.97	0.146	0.946	0.154	0.946
100	0.334	0.938	0.214	0.962	0.154	0.948	0.128	0.948	0.09	0.952	0.084	0.956	0.398	0.956	0.278	0.944	0.204	0.948	0.218	0.926	0.208	0.938	0.146	0.946
101	0.36	0.928	0.242	0.934	0.174	0.95	0.106	0.946	0.114	0.93	0.072	0.946	0.386	0.95	0.258	0.944	0.21	0.952	0.178	0.942	0.144	0.938	0.146	0.946
102	0.358	0.956	0.212	0.962	0.202	0.956	0.156	0.958	0.106	0.944	0.09	0.946	0.356	0.946	0.292	0.958	0.19	0.94	0.202	0.96	0.178	0.944	0.19	0.966
103	0.346	0.922	0.228	0.944	0.158	0.938	0.134	0.952	0.078	0.958	0.11	0.944	0.34	0.962	0.272	0.948	0.218	0.954	0.186	0.938	0.166	0.96	0.132	0.954
104	0.334	0.944	0.26	0.948	0.182	0.936	0.152	0.94	0.09	0.946	0.08	0.948	0.368	0.914	0.266	0.952	0.236	0.956	0.184	0.938	0.176	0.952	0.152	0.944
105	0.35	0.958	0.218	0.954	0.182	0.938	0.158	0.946	0.108	0.956	0.084	0.938	0.406	0.946	0.308	0.93	0.228	0.932	0.172	0.946	0.162	0.938	0.156	0.938
106	0.348	0.942	0.218	0.948	0.184	0.948	0.138	0.936	0.1	0.956	0.082	0.962	0.388	0.952	0.256	0.956	0.206	0.952	0.184	0.942	0.172	0.942	0.156	0.95
107	0.344	0.96	0.27	0.938	0.162	0.958	0.138	0.956	0.104	0.938	0.08	0.958	0.388	0.948	0.314	0.924	0.214	0.95						

118	0.354	0.974	0.23	0.942	0.186	0.924	0.124	0.936	0.12	0.922	0.072	0.942	0.336	0.942	0.286	0.954	0.228	0.946	0.196	0.932	0.17	0.938	0.146	0.954
119	0.352	0.954	0.23	0.936	0.168	0.94	0.122	0.94	0.112	0.942	0.096	0.936	0.396	0.942	0.252	0.952	0.244	0.954	0.186	0.94	0.17	0.948	0.14	0.944
120	0.35	0.96	0.258	0.934	0.158	0.934	0.166	0.964	0.132	0.944	0.076	0.964	0.364	0.948	0.26	0.954	0.206	0.956	0.154	0.948	0.17	0.936	0.13	0.954
121	0.346	0.96	0.238	0.946	0.188	0.932	0.15	0.95	0.13	0.926	0.078	0.964	0.398	0.932	0.254	0.934	0.23	0.936	0.192	0.94	0.16	0.956	0.142	0.95
122	0.35	0.958	0.24	0.968	0.19	0.958	0.106	0.964	0.098	0.934	0.116	0.944	0.352	0.954	0.248	0.94	0.22	0.948	0.192	0.942	0.186	0.958	0.144	0.936
123	0.34	0.952	0.24	0.968	0.164	0.942	0.156	0.948	0.12	0.94	0.088	0.946	0.394	0.934	0.294	0.95	0.19	0.936	0.192	0.934	0.152	0.942	0.132	0.936
124	0.372	0.944	0.254	0.956	0.174	0.946	0.13	0.95	0.108	0.95	0.088	0.95	0.37	0.944	0.252	0.926	0.246	0.942	0.174	0.96	0.154	0.948	0.142	0.938
125	0.372	0.944	0.264	0.934	0.162	0.952	0.146	0.93	0.118	0.962	0.082	0.954	0.382	0.924	0.276	0.954	0.234	0.95	0.196	0.942	0.154	0.948	0.136	0.944
126	0.398	0.93	0.242	0.942	0.176	0.928	0.112	0.946	0.102	0.954	0.084	0.95	0.364	0.944	0.272	0.93	0.184	0.934	0.182	0.944	0.166	0.962	0.142	0.952
127	0.332	0.94	0.242	0.938	0.186	0.956	0.15	0.948	0.1	0.932	0.09	0.952	0.366	0.95	0.268	0.942	0.22	0.938	0.212	0.942	0.146	0.948	0.128	0.922
128	0.356	0.912	0.21	0.956	0.164	0.958	0.164	0.948	0.128	0.948	0.086	0.966	0.33	0.954	0.282	0.95	0.226	0.942	0.21	0.928	0.162	0.94	0.16	0.952
129	0.35	0.962	0.266	0.94	0.168	0.946	0.11	0.944	0.094	0.964	0.102	0.962	0.388	0.956	0.266	0.958	0.232	0.95	0.18	0.942	0.156	0.924	0.15	0.934
130	0.37	0.934	0.222	0.948	0.176	0.934	0.134	0.956	0.11	0.968	0.106	0.95	0.406	0.938	0.272	0.926	0.238	0.936	0.192	0.958	0.168	0.948	0.134	0.956
131	0.338	0.954	0.26	0.944	0.188	0.956	0.136	0.948	0.104	0.94	0.068	0.954	0.396	0.934	0.256	0.948	0.188	0.932	0.232	0.958	0.144	0.954	0.164	0.932
132	0.338	0.954	0.242	0.95	0.196	0.954	0.146	0.944	0.134	0.956	0.078	0.938	0.356	0.948	0.284	0.934	0.208	0.946	0.206	0.94	0.19	0.952	0.134	0.946
133	0.358	0.96	0.262	0.946	0.182	0.95	0.112	0.96	0.106	0.958	0.102	0.942	0.35	0.936	0.246	0.926	0.178	0.95	0.186	0.96	0.17	0.94	0.168	0.93
134	0.368	0.944	0.236	0.934	0.198	0.948	0.162	0.954	0.124	0.95	0.086	0.944	0.366	0.954	0.246	0.952	0.198	0.948	0.174	0.942	0.152	0.94	0.158	0.928
135	0.33	0.946	0.212	0.96	0.182	0.966	0.158	0.956	0.118	0.94	0.086	0.938	0.364	0.95	0.272	0.944	0.212	0.942	0.2	0.952	0.162	0.942	0.18	0.966
136	0.358	0.94	0.214	0.946	0.148	0.954	0.13	0.956	0.124	0.946	0.078	0.936	0.378	0.934	0.282	0.934	0.214	0.968	0.184	0.958	0.162	0.966	0.184	0.958
137	0.34	0.95	0.242	0.962	0.16	0.954	0.134	0.956	0.122	0.932	0.108	0.95	0.362	0.954	0.3	0.958	0.226	0.952	0.156	0.948	0.166	0.932	0.154	0.946
138	0.332	0.954	0.224	0.946	0.178	0.954	0.13	0.924	0.094	0.944	0.088	0.946	0.37	0.948	0.278	0.94	0.206	0.95	0.184	0.958	0.174	0.942	0.152	0.95
139	0.37	0.952	0.236	0.96	0.178	0.936	0.12	0.95	0.112	0.944	0.062	0.956	0.334	0.944	0.25	0.956	0.242	0.952	0.204	0.932	0.172	0.948	0.144	0.938
140	0.406	0.964	0.236	0.934	0.182	0.946	0.124	0.944	0.124	0.938	0.062	0.936	0.368	0.946	0.29	0.918	0.216	0.968	0.212	0.958	0.16	0.962	0.166	0.942
141	0.344	0.964	0.24	0.942	0.192	0.942	0.13	0.934	0.1	0.948	0.094	0.958	0.382	0.942	0.268	0.968	0.224	0.956	0.21	0.95	0.174	0.962	0.15	0.952
142	0.322	0.946	0.248	0.946	0.178	0.936	0.118	0.966	0.098	0.96	0.09	0.96	0.398	0.958	0.3	0.944	0.208	0.956	0.174	0.958	0.19	0.954	0.142	0.954
143	0.356	0.936	0.256	0.934	0.154	0.948	0.16	0.948	0.118	0.952	0.082	0.94	0.404	0.938	0.288	0.95	0.238	0.942	0.184	0.952	0.15	0.942	0.156	0.956
144	0.374	0.946	0.232	0.942	0.168	0.958	0.12	0.936	0.128	0.956	0.076	0.942	0.402	0.926	0.284	0.956	0.204	0.962	0.18	0.944	0.126	0.942	0.146	0.942
145	0.33	0.934	0.232	0.956	0.142	0.928	0.112	0.954	0.126	0.948	0.088	0.95	0.374	0.95	0.246	0.952	0.178	0.934	0.2	0.936	0.154	0.936	0.182	0.954
146	0.348	0.94	0.258	0.942	0.176	0.94	0.116	0.948	0.11	0.948	0.084	0.95	0.354	0.948	0.284	0.94	0.216	0.948	0.224	0.94	0.162	0.93	0.174	0.962
147	0.384	0.964	0.228	0.942	0.176	0.95	0.136	0.946	0.082	0.948	0.088	0.956	0.376	0.952	0.29	0.956	0.192	0.958	0.194	0.94	0.166	0.938	0.166	0.95
148	0.348	0.932	0.234	0.958	0.172	0.92	0.154	0.926	0.11	0.932	0.098	0.94	0.354	0.938	0.277	0.93	0.21	0.954	0.174	0.962	0.178	0.942	0.142	0.952
149	0.36	0.95	0.254	0.954	0.18	0.952	0.118	0.952	0.132	0.958	0.086	0.948	0.37	0.946	0.288	0.948	0.228	0.948	0.196	0.952	0.174	0.946	0.138	0.952
150	0.384	0.942	0.256	0.95	0.202	0.95	0.14	0.958	0.102	0.936	0.088	0.966	0.406	0.944	0.252	0.944	0.22	0.924	0.194	0.952	0.174	0.948	0.14	0.948
151	0.398	0.93	0.242	0.942	0.176	0.928	0.112	0.946	0.102	0.954	0.084	0.95	0.364	0.944	0.272	0.93	0.184	0.934	0.182	0.944	0.166	0.962	0.142	0.952
152	0.332	0.94	0.242	0.938	0.186	0.956	0.15	0.948	0.1	0.932	0.09	0.952	0.366	0.945	0.268	0.942	0.2	0.938	0.212	0.942	0.146	0.948	0.128	0.922
153	0.356	0.912	0.21	0.956	0.164	0.95	0.128	0.948	0.094	0.942	0.086	0.966	0.33	0.954	0.282	0.95	0.226	0.942	0.21	0.928	0.162	0.94	0.16	0.952
154	0.35	0.962	0.266	0.94	0.168	0.946	0.11	0.944	0.094	0.964	0.102	0.962	0.388	0.956	0.266	0.958	0.232	0.95	0.18	0.942	0.156	0.924	0.15	0.934
155	0.37	0.934	0.222	0.948	0.176	0.934	0.134	0.956	0.11	0.968	0.106	0.95	0.406	0.938	0.272	0.926	0.238	0.936	0.192	0.958	0.168	0.948	0.134	0.956
156	0.338	0.954	0.26	0.944	0.188	0.956	0.136	0.958	0.104	0.94	0.068	0.954	0.396	0.934	0.256	0.948	0.188	0.932	0.232	0.958	0.144	0.954	0.164	0.932
157	0.338	0.954	0.242	0.95	0.196	0.954	0.146	0.944	0.134	0.956	0.078	0.938	0.356	0.948	0.284	0.934	0.208	0.946	0.206	0.94	0.19	0.952	0.134	0.946
158	0.358	0.96	0.262	0.946	0.182	0.95	0.112	0.96	0.106	0.956	0.102	0.942	0.35	0.936	0.246	0.926	0.178	0.95	0.186	0.96	0.17	0.94	0.168	0.93
159	0.368	0.944	0.262	0.938	0.198	0.948	0.162	0.954	0.124	0.95	0.086	0.944	0.366	0.954	0.246	0.952	0.198	0.948	0.174	0.942	0.152	0.94	0.158	0.928
160	0.33	0.946	0.212	0.96	0.182	0.966	0.158	0.956	0.118	0.94	0.086	0.938	0.364	0.95	0.272	0.944	0.212	0.922	0.2	0.952	0.162	0.942	0.18	0.966
161	0.358	0.94	0.214	0.946	0.148	0.954	0.13	0.956	0.124	0.946	0.078	0.936	0.378	0.934	0.282	0.934	0.214	0.968	0.184	0.958	0.162	0.966	0.184	0.958
162	0.34	0.95	0.242	0.962	0.16	0.954	0.134	0.956	0.122	0.932	0.108	0.95	0.362	0.954	0.3	0.958	0.226	0.952	0.156	0.948	0.166	0.932	0.154	0.946
163	0.332	0.954	0.224	0.946	0.178	0.954	0.13	0.924	0.094	0.944	0.088	0.946	0.37	0.948	0.278	0.94	0.206	0.95	0.184	0.958	0.174	0.942	0.152	0.95
164	0.37	0.952	0.236	0.96	0.178	0.936	0.12	0.95	0.112	0.944	0.062	0.956	0.334	0.944	0.25	0.956	0.242	0.952	0.204	0.932	0.172	0.948	0.144	0.938
165	0.406	0.964	0.236	0.934	0.182	0.946	0.124	0.944	0.124	0.938	0.086	0.936	0.368	0.946	0.29	0.918	0.216	0.968	0.212	0.958	0.16	0.962	0.166	0.942
166	0.344	0.964	0.24	0.942	0.192	0.942	0.13	0.934	0.1	0.948	0.094	0.958	0.382	0.942	0.268	0.968	0.224	0.956	0.21	0.95	0.174	0.962	0.15	0.952
167	0.322	0.946	0.248	0.946	0.178	0.936	0.118	0.966	0.098	0.96	0.09	0.96	0.398	0.958	0.3	0.944	0.208	0.956						

178	0.356	0.912	0.21	0.956	0.164	0.95	0.128	0.948	0.094	0.942	0.086	0.966	0.33	0.954	0.282	0.95	0.226	0.942	0.21	0.928	0.162	0.94	0.16	0.952
179	0.35	0.962	0.266	0.94	0.168	0.946	0.11	0.944	0.094	0.964	0.102	0.962	0.388	0.956	0.266	0.958	0.232	0.942	0.18	0.942	0.156	0.94	0.15	0.934
180	0.37	0.934	0.222	0.948	0.176	0.934	0.134	0.956	0.11	0.968	0.106	0.95	0.406	0.938	0.272	0.926	0.238	0.958	0.168	0.958	0.144	0.954	0.164	0.932
181	0.338	0.954	0.26	0.944	0.188	0.956	0.136	0.958	0.104	0.94	0.068	0.954	0.396	0.934	0.256	0.948	0.208	0.932	0.232	0.958	0.144	0.954	0.164	0.932
182	0.338	0.954	0.242	0.95	0.196	0.954	0.146	0.944	0.134	0.956	0.078	0.938	0.356	0.948	0.284	0.934	0.208	0.946	0.206	0.94	0.19	0.952	0.134	0.946
183	0.358	0.96	0.262	0.946	0.182	0.95	0.112	0.96	0.106	0.958	0.102	0.942	0.35	0.936	0.246	0.926	0.178	0.95	0.186	0.96	0.17	0.94	0.168	0.93
184	0.368	0.944	0.262	0.938	0.198	0.948	0.162	0.954	0.124	0.95	0.086	0.944	0.366	0.954	0.246	0.952	0.198	0.948	0.174	0.942	0.152	0.94	0.158	0.928
185	0.33	0.946	0.212	0.96	0.182	0.966	0.158	0.956	0.118	0.94	0.086	0.938	0.364	0.95	0.272	0.944	0.212	0.922	0.2	0.952	0.162	0.942	0.18	0.966
186	0.358	0.94	0.214	0.946	0.148	0.954	0.13	0.956	0.122	0.946	0.078	0.936	0.378	0.934	0.282	0.934	0.214	0.968	0.184	0.958	0.162	0.966	0.184	0.958
187	0.34	0.95	0.242	0.962	0.16	0.954	0.134	0.956	0.122	0.932	0.108	0.95	0.362	0.954	0.3	0.958	0.226	0.952	0.156	0.948	0.166	0.932	0.154	0.946
188	0.332	0.954	0.242	0.946	0.178	0.954	0.13	0.924	0.094	0.944	0.088	0.946	0.37	0.948	0.278	0.94	0.206	0.95	0.184	0.958	0.174	0.942	0.152	0.95
189	0.37	0.952	0.236	0.96	0.178	0.936	0.12	0.95	0.112	0.944	0.062	0.956	0.334	0.944	0.25	0.956	0.242	0.952	0.204	0.932	0.172	0.948	0.144	0.938
190	0.406	0.964	0.236	0.934	0.182	0.946	0.124	0.944	0.124	0.938	0.086	0.936	0.368	0.946	0.29	0.918	0.216	0.968	0.212	0.958	0.16	0.962	0.166	0.942
191	0.344	0.964	0.24	0.942	0.192	0.942	0.13	0.934	0.1	0.948	0.084	0.958	0.382	0.942	0.268	0.968	0.224	0.956	0.21	0.95	0.174	0.962	0.15	0.952
192	0.322	0.946	0.248	0.946	0.178	0.936	0.118	0.966	0.098	0.96	0.09	0.96	0.398	0.958	0.3	0.944	0.208	0.956	0.174	0.958	0.19	0.954	0.142	0.954
193	0.356	0.936	0.256	0.934	0.154	0.948	0.16	0.948	0.118	0.952	0.082	0.94	0.404	0.938	0.288	0.95	0.238	0.942	0.184	0.952	0.15	0.942	0.156	0.956
194	0.374	0.946	0.232	0.942	0.168	0.958	0.12	0.936	0.128	0.956	0.076	0.942	0.402	0.926	0.284	0.956	0.204	0.962	0.18	0.944	0.126	0.942	0.146	0.942
195	0.33	0.934	0.232	0.956	0.142	0.928	0.112	0.954	0.126	0.948	0.088	0.95	0.374	0.95	0.246	0.952	0.178	0.934	0.2	0.936	0.154	0.936	0.182	0.954
196	0.348	0.94	0.258	0.942	0.176	0.94	0.116	0.948	0.1	0.948	0.084	0.95	0.35	0.962	0.28	0.94	0.216	0.948	0.224	0.94	0.162	0.93	0.174	0.962
197	0.384	0.964	0.228	0.942	0.176	0.95	0.136	0.946	0.082	0.948	0.088	0.956	0.376	0.952	0.29	0.956	0.192	0.958	0.194	0.94	0.166	0.938	0.166	0.95
198	0.348	0.932	0.234	0.958	0.172	0.92	0.154	0.926	0.11	0.932	0.098	0.94	0.354	0.938	0.27	0.93	0.21	0.954	0.174	0.962	0.178	0.942	0.142	0.952
199	0.36	0.95	0.254	0.954	0.18	0.952	0.118	0.95	0.132	0.958	0.086	0.948	0.37	0.946	0.288	0.948	0.228	0.948	0.196	0.962	0.174	0.946	0.138	0.952
200	0.384	0.942	0.256	0.95	0.202	0.95	0.14	0.958	0.102	0.936	0.088	0.966	0.406	0.944	0.252	0.944	0.22	0.924	0.194	0.952	0.174	0.948	0.14	0.948
201	0.334	0.946	0.258	0.956	0.17	0.94	0.15	0.946	0.132	0.934	0.106	0.956	0.37	0.932	0.276	0.942	0.2	0.954	0.182	0.938	0.158	0.952	0.148	0.966
202	0.346	0.95	0.238	0.954	0.164	0.95	0.114	0.96	0.124	0.946	0.102	0.938	0.392	0.952	0.32	0.914	0.226	0.952	0.182	0.942	0.14	0.946	0.156	0.946
203	0.358	0.95	0.258	0.94	0.182	0.946	0.14	0.938	0.102	0.94	0.068	0.946	0.388	0.954	0.232	0.942	0.24	0.956	0.198	0.938	0.156	0.948	0.14	0.926
204	0.344	0.942	0.246	0.95	0.174	0.95	0.148	0.956	0.126	0.934	0.08	0.952	0.402	0.954	0.334	0.954	0.19	0.948	0.186	0.948	0.144	0.946	0.144	0.956
205	0.32	0.934	0.296	0.956	0.178	0.966	0.146	0.964	0.106	0.952	0.098	0.946	0.398	0.942	0.286	0.954	0.208	0.944	0.194	0.956	0.174	0.934	0.17	0.928
206	0.346	0.946	0.224	0.956	0.168	0.952	0.17	0.954	0.12	0.954	0.084	0.954	0.376	0.928	0.258	0.952	0.238	0.934	0.194	0.936	0.154	0.944	0.156	0.944
207	0.356	0.94	0.22	0.94	0.192	0.95	0.126	0.942	0.12	0.936	0.1	0.958	0.39	0.944	0.276	0.956	0.218	0.95	0.186	0.946	0.178	0.926	0.132	0.96
208	0.37	0.958	0.214	0.928	0.166	0.954	0.102	0.968	0.114	0.946	0.09	0.944	0.38	0.946	0.296	0.97	0.236	0.96	0.18	0.946	0.182	0.968	0.16	0.944
209	0.378	0.936	0.262	0.956	0.178	0.95	0.142	0.942	0.132	0.936	0.114	0.954	0.394	0.954	0.324	0.948	0.2	0.95	0.222	0.954	0.17	0.956	0.15	0.942
210	0.35	0.938	0.27	0.942	0.188	0.948	0.126	0.938	0.1	0.944	0.09	0.964	0.336	0.968	0.242	0.93	0.236	0.942	0.176	0.948	0.142	0.942	0.178	0.942
211	0.336	0.928	0.274	0.948	0.202	0.948	0.132	0.968	0.106	0.948	0.086	0.932	0.378	0.936	0.262	0.962	0.208	0.938	0.212	0.958	0.154	0.95	0.18	0.94
212	0.374	0.94	0.232	0.946	0.192	0.952	0.146	0.958	0.102	0.92	0.082	0.942	0.37	0.934	0.288	0.942	0.244	0.932	0.18	0.95	0.158	0.948	0.152	0.954
213	0.364	0.934	0.242	0.96	0.228	0.95	0.158	0.95	0.132	0.938	0.108	0.946	0.342	0.942	0.306	0.95	0.238	0.936	0.176	0.95	0.176	0.96	0.148	0.946
214	0.406	0.966	0.24	0.954	0.176	0.95	0.152	0.952	0.096	0.962	0.096	0.954	0.4	0.95	0.272	0.948	0.25	0.946	0.208	0.93	0.16	0.944	0.174	0.938
215	0.348	0.93	0.258	0.95	0.14	0.94	0.132	0.948	0.146	0.938	0.09	0.936	0.414	0.938	0.262	0.936	0.22	0.952	0.198	0.94	0.142	0.94	0.152	0.924
216	0.358	0.958	0.188	0.956	0.162	0.952	0.162	0.942	0.114	0.962	0.072	0.936	0.374	0.942	0.328	0.936	0.234	0.93	0.154	0.942	0.172	0.96	0.138	0.946
217	0.374	0.952	0.222	0.952	0.164	0.952	0.142	0.946	0.116	0.95	0.074	0.962	0.374	0.942	0.328	0.944	0.242	0.934	0.202	0.94	0.178	0.94	0.122	0.95
218	0.374	0.94	0.242	0.958	0.186	0.956	0.144	0.946	0.118	0.94	0.106	0.936	0.372	0.968	0.29	0.948	0.232	0.942	0.158	0.948	0.178	0.974	0.142	0.954
219	0.308	0.954	0.236	0.926	0.198	0.944	0.128	0.932	0.114	0.958	0.11	0.948	0.382	0.942	0.324	0.97	0.208	0.944	0.2	0.948	0.15	0.944	0.174	0.944
220	0.35	0.95	0.23	0.952	0.17	0.944	0.14	0.934	0.11	0.936	0.086	0.94	0.37	0.962	0.266	0.962	0.192	0.946	0.212	0.926	0.168	0.942	0.17	0.94
221	0.388	0.932	0.23	0.954	0.176	0.936	0.13	0.942	0.11	0.936	0.1	0.95	0.37	0.914	0.266	0.952	0.252	0.93	0.182	0.96	0.164	0.96	0.136	0.952
222	0.344	0.936	0.236	0.956	0.174	0.948	0.132	0.94	0.132	0.956	0.112	0.948	0.384	0.94	0.28	0.924	0.214	0.954	0.194	0.96	0.158	0.944	0.172	0.942
223	0.32	0.956	0.264	0.96	0.178	0.956	0.152	0.932	0.128	0.94	0.088	0.958	0.344	0.94	0.268	0.94	0.224	0.956	0.224	0.938	0.19	0.94	0.132	0.958
224	0.338	0.928	0.26	0.956	0.17	0.946	0.128	0.952	0.132	0.924	0.078	0.948	0.348	0.962	0.242	0.95	0.2	0.938	0.192	0.952	0.162	0.946	0.154	0.95
225	0.374	0.946	0.24	0.964	0.196	0.956	0.15	0.948	0.114	0.952	0.078	0.956	0.382	0.944	0.254	0.966	0.238	0.952	0.176	0.948	0.194	0.936	0.13	0.934
226	0.334	0.946	0.258	0.956	0.17	0.94	0.15	0.946	0.132	0.934	0.106	0.956	0.37	0.932	0.276	0.942	0.2	0.954	0.182	0.938	0.158	0.952	0.148	0.966
227	0.346	0.95	0.238	0.954	0.164	0.95	0.114	0.96	0.124	0.946	0.102	0.938	0.392	0.952	0.32	0.914	0.226	0.952	0.182	0.942				

238	0.364	0.934	0.242	0.96	0.228	0.95	0.158	0.95	0.132	0.938	0.108	0.946	0.342	0.942	0.306	0.95	0.238	0.936	0.176	0.95	0.176	0.96	0.148	0.946
239	0.406	0.966	0.24	0.954	0.176	0.95	0.152	0.952	0.096	0.962	0.096	0.954	0.4	0.95	0.272	0.948	0.25	0.946	0.206	0.93	0.16	0.944	0.174	0.938
240	0.348	0.93	0.258	0.95	0.14	0.94	0.132	0.948	0.146	0.938	0.09	0.936	0.414	0.938	0.262	0.936	0.22	0.952	0.198	0.94	0.142	0.94	0.152	0.924
241	0.358	0.958	0.188	0.956	0.162	0.952	0.162	0.942	0.114	0.962	0.072	0.936	0.374	0.942	0.328	0.936	0.234	0.93	0.154	0.942	0.172	0.96	0.138	0.946
242	0.374	0.952	0.222	0.952	0.164	0.952	0.142	0.946	0.116	0.95	0.074	0.962	0.386	0.93	0.276	0.944	0.242	0.934	0.202	0.94	0.178	0.94	0.122	0.95
243	0.374	0.94	0.242	0.958	0.186	0.956	0.144	0.946	0.118	0.94	0.106	0.936	0.372	0.968	0.29	0.948	0.232	0.942	0.158	0.948	0.178	0.974	0.142	0.954
244	0.308	0.954	0.236	0.926	0.198	0.944	0.128	0.932	0.114	0.958	0.11	0.948	0.382	0.942	0.324	0.97	0.208	0.944	0.2	0.948	0.15	0.944	0.174	0.944
245	0.35	0.95	0.23	0.952	0.17	0.944	0.14	0.934	0.11	0.936	0.086	0.94	0.37	0.962	0.266	0.962	0.192	0.946	0.212	0.926	0.168	0.942	0.17	0.94
246	0.388	0.932	0.23	0.954	0.176	0.936	0.13	0.942	0.11	0.936	0.1	0.95	0.37	0.914	0.266	0.952	0.252	0.93	0.182	0.96	0.164	0.96	0.136	0.952
247	0.344	0.936	0.236	0.956	0.174	0.948	0.132	0.94	0.132	0.956	0.112	0.948	0.384	0.94	0.28	0.924	0.214	0.954	0.194	0.96	0.158	0.944	0.172	0.942
248	0.32	0.956	0.264	0.96	0.178	0.956	0.152	0.932	0.128	0.94	0.088	0.958	0.344	0.94	0.268	0.94	0.224	0.956	0.224	0.938	0.19	0.94	0.132	0.958
249	0.338	0.928	0.26	0.956	0.17	0.946	0.128	0.952	0.132	0.924	0.078	0.948	0.348	0.962	0.242	0.95	0.2	0.938	0.192	0.952	0.162	0.946	0.154	0.95
250	0.374	0.946	0.24	0.964	0.196	0.956	0.15	0.948	0.114	0.952	0.09	0.956	0.382	0.944	0.254	0.966	0.238	0.952	0.176	0.948	0.194	0.936	0.13	0.934

Cuadro B.10: Proporciones para medir la eficiencia de los métodos para $R^2 = 0.80$, cotas 0.5 y 0.8 continuación

	1					2						
	5	10	15	20	25	30	5	10	15	20	25	30
	P_{Data}	$P_{\text{Par-ám}}$	P_{Data}	$P_{\text{Par-ám}}$	P_{Data}	$P_{\text{Par-ám}}$	P_{Data}	$P_{\text{Par-ám}}$	P_{Data}	$P_{\text{Par-ám}}$	P_{Data}	$P_{\text{Par-ám}}$
1	0.36	0.946	0.308	0.926	0.284	0.948	0.19	0.952	0.218	0.944	0.484	0.956
2	0.356	0.948	0.32	0.95	0.282	0.934	0.232	0.958	0.188	0.95	0.2	0.93
3	0.41	0.946	0.288	0.946	0.196	0.944	0.212	0.944	0.22	0.944	0.22	0.944
4	0.42	0.936	0.326	0.962	0.26	0.922	0.224	0.936	0.17	0.946	0.168	0.958
5	0.42	0.944	0.308	0.936	0.232	0.956	0.216	0.962	0.216	0.942	0.178	0.952
6	0.382	0.952	0.284	0.932	0.296	0.946	0.218	0.954	0.19	0.944	0.224	0.942
7	0.39	0.95	0.284	0.956	0.292	0.948	0.27	0.938	0.218	0.95	0.208	0.928
8	0.424	0.926	0.306	0.938	0.248	0.946	0.222	0.948	0.184	0.948	0.21	0.94
9	0.386	0.918	0.298	0.948	0.26	0.952	0.228	0.942	0.154	0.94	0.208	0.95
10	0.404	0.952	0.294	0.936	0.238	0.962	0.216	0.944	0.216	0.954	0.23	0.952
11	0.376	0.938	0.342	0.958	0.286	0.946	0.228	0.94	0.222	0.956	0.216	0.944
12	0.358	0.966	0.306	0.94	0.25	0.938	0.228	0.948	0.18	0.942	0.208	0.93
13	0.396	0.936	0.298	0.948	0.238	0.944	0.218	0.942	0.222	0.936	0.21	0.932
14	0.372	0.956	0.278	0.958	0.248	0.952	0.206	0.948	0.2	0.946	0.174	0.95
15	0.396	0.942	0.348	0.942	0.244	0.932	0.228	0.932	0.222	0.96	0.18	0.954
16	0.366	0.944	0.282	0.942	0.258	0.954	0.222	0.946	0.206	0.94	0.172	0.932
17	0.382	0.944	0.286	0.954	0.214	0.944	0.208	0.932	0.226	0.934	0.178	0.95
18	0.394	0.928	0.286	0.944	0.25	0.95	0.252	0.946	0.2	0.948	0.21	0.946
19	0.38	0.956	0.27	0.952	0.238	0.938	0.228	0.954	0.206	0.95	0.25	0.938
20	0.36	0.954	0.292	0.958	0.28	0.946	0.224	0.942	0.208	0.94	0.204	0.938
21	0.41	0.956	0.284	0.96	0.23	0.954	0.214	0.938	0.192	0.956	0.158	0.944
22	0.392	0.938	0.298	0.938	0.268	0.918	0.194	0.946	0.222	0.948	0.194	0.946
23	0.428	0.956	0.284	0.946	0.226	0.926	0.152	0.954	0.216	0.958	0.224	0.948
24	0.416	0.936	0.318	0.934	0.272	0.948	0.224	0.954	0.222	0.948	0.176	0.944
25	0.38	0.944	0.278	0.944	0.25	0.95	0.204	0.93	0.226	0.928	0.202	0.946
26	0.36	0.946	0.308	0.946	0.284	0.926	0.266	0.948	0.188	0.95	0.2	0.93
27	0.356	0.948	0.32	0.95	0.282	0.934	0.232	0.958	0.188	0.95	0.2	0.944
28	0.41	0.946	0.288	0.946	0.24	0.946	0.196	0.944	0.212	0.944	0.22	0.944
29	0.42	0.936	0.326	0.962	0.26	0.922	0.224	0.936	0.17	0.946	0.168	0.958
30	0.42	0.944	0.308	0.936	0.232	0.956	0.216	0.962	0.216	0.942	0.178	0.952
31	0.382	0.952	0.284	0.932	0.296	0.946	0.218	0.954	0.19	0.944	0.224	0.942
32	0.39	0.95	0.284	0.956	0.292	0.948	0.27	0.938	0.218	0.95	0.208	0.928
33	0.424	0.926	0.306	0.938	0.248	0.946	0.228	0.948	0.184	0.948	0.21	0.94
34	0.386	0.918	0.298	0.948	0.26	0.952	0.228	0.942	0.154	0.94	0.208	0.95
35	0.404	0.952	0.294	0.936	0.238	0.962	0.216	0.944	0.216	0.954	0.23	0.952
36	0.376	0.938	0.342	0.958	0.286	0.946	0.228	0.94	0.222	0.956	0.216	0.944
37	0.358	0.966	0.306	0.94	0.25	0.938	0.228	0.948	0.18	0.942	0.208	0.93
38	0.396	0.936	0.298	0.948	0.238	0.944	0.218	0.942	0.222	0.936	0.21	0.932
39	0.372	0.956	0.278	0.958	0.248	0.952	0.206	0.948	0.2	0.946	0.174	0.95
40	0.396	0.942	0.348	0.942	0.244	0.932	0.228	0.932	0.222	0.96	0.18	0.954
41	0.366	0.944	0.282	0.942	0.258	0.954	0.222	0.946	0.206	0.94	0.172	0.932
42	0.382	0.944	0.286	0.954	0.214	0.944	0.208	0.932	0.226	0.934	0.178	0.95
43	0.394	0.928	0.286	0.944	0.25	0.95	0.252	0.946	0.2	0.948	0.21	0.946
44	0.38	0.956	0.27	0.952	0.238	0.938	0.228	0.942	0.206	0.95	0.25	0.938
45	0.36	0.954	0.292	0.958	0.28	0.946	0.224	0.942	0.208	0.94	0.204	0.938
46	0.41	0.956	0.284	0.96	0.23	0.954	0.214	0.938	0.192	0.956	0.158	0.944
47	0.392	0.938	0.298	0.938	0.268	0.918	0.194	0.946	0.222	0.948	0.194	0.946
48	0.428	0.956	0.284	0.946	0.226	0.926	0.152	0.954	0.216	0.958	0.224	0.948
49	0.416	0.936	0.318	0.934	0.272	0.948	0.224	0.954	0.222	0.948	0.176	0.944
50	0.38	0.944	0.278	0.944	0.25	0.95	0.204	0.93	0.226	0.928	0.202	0.946
51	0.36	0.946	0.308	0.946	0.284	0.926	0.266	0.948	0.188	0.95	0.2	0.93
52	0.356	0.948	0.32	0.95	0.282	0.934	0.232	0.958	0.188	0.95	0.2	0.944
53	0.41	0.946	0.288	0.946	0.24	0.946	0.196	0.944	0.212	0.944	0.22	0.944
54	0.42	0.936	0.326	0.962	0.26	0.922	0.224	0.936	0.17	0.946	0.168	0.958
55	0.42	0.944	0.308	0.936	0.232	0.956	0.216	0.962	0.216	0.942	0.178	0.952
56	0.382	0.952	0.284	0.932	0.296	0.946	0.218	0.954	0.19	0.944	0.224	0.942
57	0.39	0.95	0.284	0.956	0.292	0.948	0.27	0.938	0.218	0.95	0.208	0.928

Cuadro B.1.1: Proporciones para medir la eficiencia de los métodos para $R^2 = 0.80$, cotas 1 y 2

58	0.424	0.926	0.306	0.938	0.248	0.946	0.222	0.948	0.184	0.948	0.21	0.94	0.458	0.958	0.386	0.952	0.388	0.95	0.376	0.95	0.332	0.936	0.314	0.952
59	0.386	0.918	0.298	0.948	0.26	0.952	0.228	0.942	0.154	0.94	0.208	0.95	0.418	0.954	0.428	0.956	0.404	0.944	0.34	0.946	0.326	0.942	0.31	0.958
60	0.404	0.932	0.294	0.936	0.238	0.962	0.216	0.944	0.216	0.954	0.23	0.952	0.484	0.936	0.468	0.938	0.412	0.942	0.376	0.91	0.348	0.932	0.336	0.932
61	0.376	0.938	0.342	0.958	0.286	0.946	0.228	0.94	0.222	0.956	0.216	0.944	0.47	0.962	0.384	0.952	0.412	0.94	0.384	0.95	0.326	0.944	0.322	0.934
62	0.358	0.966	0.306	0.94	0.25	0.938	0.228	0.948	0.18	0.942	0.208	0.93	0.458	0.95	0.392	0.928	0.358	0.96	0.368	0.938	0.348	0.956	0.36	0.952
63	0.396	0.936	0.298	0.948	0.238	0.944	0.218	0.942	0.222	0.936	0.21	0.932	0.454	0.938	0.424	0.95	0.39	0.938	0.372	0.974	0.354	0.946	0.318	0.958
64	0.372	0.956	0.278	0.958	0.248	0.952	0.206	0.948	0.2	0.946	0.174	0.95	0.448	0.944	0.422	0.954	0.362	0.95	0.344	0.954	0.378	0.953	0.358	0.956
65	0.396	0.942	0.348	0.942	0.244	0.932	0.228	0.932	0.222	0.96	0.18	0.954	0.482	0.948	0.434	0.946	0.382	0.942	0.364	0.944	0.346	0.958	0.352	0.948
66	0.366	0.944	0.282	0.942	0.258	0.954	0.222	0.946	0.206	0.94	0.172	0.932	0.454	0.95	0.394	0.946	0.388	0.924	0.332	0.96	0.386	0.952	0.33	0.946
67	0.382	0.944	0.286	0.954	0.214	0.944	0.208	0.932	0.226	0.934	0.178	0.95	0.454	0.942	0.41	0.946	0.35	0.936	0.37	0.924	0.342	0.94	0.376	0.93
68	0.394	0.928	0.286	0.944	0.25	0.95	0.252	0.946	0.2	0.948	0.21	0.946	0.484	0.944	0.388	0.944	0.38	0.936	0.372	0.926	0.3	0.946	0.364	0.952
69	0.38	0.956	0.27	0.952	0.238	0.938	0.228	0.954	0.206	0.95	0.25	0.938	0.47	0.954	0.37	0.948	0.384	0.954	0.324	0.942	0.364	0.946	0.334	0.946
70	0.36	0.954	0.292	0.958	0.28	0.946	0.224	0.942	0.208	0.94	0.204	0.938	0.524	0.94	0.408	0.952	0.37	0.948	0.408	0.956	0.37	0.95	0.398	0.936
71	0.41	0.956	0.284	0.96	0.23	0.954	0.214	0.938	0.192	0.956	0.158	0.944	0.466	0.938	0.388	0.956	0.394	0.94	0.362	0.932	0.368	0.918	0.298	0.946
72	0.392	0.938	0.298	0.938	0.268	0.918	0.194	0.946	0.222	0.948	0.194	0.946	0.498	0.96	0.38	0.97	0.364	0.942	0.354	0.932	0.372	0.954	0.35	0.946
73	0.428	0.956	0.284	0.946	0.226	0.926	0.152	0.954	0.216	0.958	0.224	0.948	0.43	0.94	0.388	0.936	0.342	0.936	0.37	0.954	0.35	0.944	0.344	0.946
74	0.416	0.936	0.318	0.934	0.272	0.948	0.224	0.954	0.222	0.948	0.176	0.944	0.478	0.964	0.426	0.954	0.376	0.978	0.368	0.962	0.38	0.948	0.368	0.942
75	0.38	0.944	0.278	0.944	0.25	0.95	0.204	0.93	0.226	0.928	0.202	0.946	0.51	0.948	0.39	0.942	0.35	0.952	0.344	0.924	0.35	0.932	0.334	0.956
76	0.36	0.946	0.308	0.946	0.284	0.926	0.266	0.948	0.19	0.952	0.218	0.944	0.484	0.956	0.46	0.95	0.38	0.954	0.348	0.942	0.328	0.948	0.332	0.946
77	0.356	0.948	0.32	0.95	0.282	0.934	0.232	0.958	0.188	0.95	0.2	0.93	0.472	0.96	0.422	0.934	0.396	0.938	0.38	0.93	0.356	0.958	0.338	0.952
78	0.41	0.946	0.288	0.946	0.24	0.946	0.196	0.944	0.212	0.944	0.22	0.944	0.478	0.934	0.42	0.948	0.336	0.948	0.376	0.942	0.346	0.956	0.368	0.928
79	0.42	0.936	0.326	0.962	0.26	0.922	0.224	0.936	0.17	0.946	0.168	0.958	0.458	0.954	0.438	0.92	0.378	0.934	0.36	0.934	0.374	0.946	0.35	0.938
80	0.42	0.944	0.308	0.936	0.232	0.956	0.216	0.962	0.216	0.942	0.178	0.952	0.448	0.936	0.418	0.934	0.374	0.938	0.368	0.96	0.362	0.95	0.338	0.924
81	0.382	0.952	0.284	0.932	0.296	0.946	0.218	0.954	0.19	0.944	0.224	0.942	0.454	0.938	0.408	0.938	0.356	0.94	0.316	0.954	0.344	0.95	0.348	0.934
82	0.39	0.95	0.284	0.956	0.292	0.948	0.27	0.938	0.218	0.95	0.208	0.928	0.474	0.938	0.456	0.942	0.382	0.932	0.346	0.938	0.334	0.952	0.334	0.96
83	0.424	0.926	0.306	0.938	0.248	0.946	0.222	0.948	0.184	0.948	0.21	0.94	0.458	0.958	0.386	0.952	0.388	0.95	0.376	0.95	0.332	0.936	0.314	0.952
84	0.386	0.918	0.298	0.948	0.26	0.952	0.228	0.942	0.154	0.94	0.208	0.95	0.418	0.954	0.428	0.956	0.404	0.944	0.34	0.946	0.326	0.942	0.31	0.958
85	0.404	0.952	0.294	0.936	0.238	0.962	0.216	0.944	0.216	0.954	0.23	0.952	0.47	0.962	0.384	0.952	0.412	0.942	0.376	0.91	0.348	0.932	0.336	0.932
86	0.376	0.938	0.342	0.958	0.286	0.946	0.228	0.94	0.222	0.956	0.216	0.944	0.47	0.962	0.384	0.952	0.412	0.94	0.384	0.95	0.326	0.944	0.322	0.934
87	0.358	0.966	0.306	0.94	0.25	0.938	0.228	0.948	0.18	0.942	0.208	0.93	0.458	0.95	0.392	0.928	0.358	0.96	0.368	0.938	0.348	0.956	0.36	0.952
88	0.396	0.936	0.298	0.948	0.238	0.944	0.218	0.942	0.222	0.936	0.21	0.932	0.454	0.938	0.424	0.95	0.39	0.938	0.372	0.974	0.354	0.946	0.318	0.958
89	0.372	0.956	0.278	0.958	0.248	0.952	0.206	0.948	0.2	0.946	0.174	0.95	0.448	0.944	0.422	0.954	0.362	0.95	0.344	0.954	0.358	0.93	0.358	0.956
90	0.396	0.942	0.348	0.942	0.244	0.932	0.228	0.932	0.222	0.96	0.18	0.954	0.482	0.948	0.434	0.946	0.382	0.942	0.364	0.944	0.346	0.958	0.352	0.948
91	0.366	0.944	0.286	0.942	0.258	0.944	0.222	0.946	0.206	0.94	0.172	0.932	0.472	0.95	0.394	0.954	0.388	0.924	0.332	0.96	0.386	0.952	0.33	0.946
92	0.382	0.944	0.286	0.954	0.214	0.944	0.208	0.932	0.226	0.934	0.178	0.95	0.454	0.942	0.41	0.946	0.35	0.936	0.37	0.924	0.342	0.94	0.376	0.93
93	0.394	0.928	0.286	0.944	0.25	0.95	0.252	0.946	0.2	0.948	0.21	0.946	0.484	0.944	0.388	0.944	0.38	0.936	0.372	0.926	0.3	0.946	0.364	0.952
94	0.38	0.956	0.27	0.952	0.238	0.938	0.228	0.954	0.208	0.94	0.172	0.938	0.47	0.954	0.37	0.948	0.384	0.942	0.324	0.942	0.364	0.946	0.334	0.946
95	0.36	0.954	0.292	0.958	0.28	0.946	0.224	0.942	0.206	0.94	0.204	0.938	0.524	0.94	0.408	0.952	0.37	0.948	0.408	0.956	0.37	0.95	0.398	0.936
96	0.41	0.956	0.284	0.96	0.23	0.954	0.214	0.938	0.192	0.956	0.158	0.944	0.466	0.938	0.388	0.956	0.394	0.94	0.362	0.932	0.368	0.918	0.298	0.946
97	0.392	0.938	0.298	0.938	0.268	0.918	0.194	0.946	0.222	0.948	0.194	0.946	0.498	0.96	0.38	0.97	0.364	0.942	0.354	0.932	0.372	0.954	0.35	0.946
98	0.428	0.956	0.284	0.946	0.226	0.926	0.152	0.954	0.216	0.958	0.224	0.948	0.43	0.94	0.388	0.936	0.342	0.936	0.37	0.954	0.35	0.944	0.344	0.946
99	0.416	0.936	0.318	0.934	0.272	0.948	0.224	0.954	0.222	0.948	0.176	0.944	0.478	0.964	0.426	0.954	0.376	0.954	0.368	0.962	0.38	0.948	0.368	0.942
100	0.398	0.944	0.278	0.944	0.25	0.95	0.204	0.93	0.226	0.928	0.202	0.946	0.51	0.948	0.39	0.942	0.35	0.952	0.344	0.924	0.35	0.932	0.334	0.956
101	0.396	0.95	0.312	0.944	0.248	0.938	0.238	0.94	0.202	0.958	0.178	0.93	0.474	0.95	0.44	0.932	0.362	0.924	0.362	0.928	0.35	0.946	0.32	0.94
102	0.406	0.94	0.294	0.944	0.274	0.944	0.23	0.958	0.188	0.948	0.198	0.916	0.464	0.932	0.388	0.948	0.334	0.944	0.336	0.956	0.352	0.928	0.344	0.942
103	0.394	0.954	0.278	0.942	0.226	0.938	0.224	0.958	0.214	0.948	0.198	0.95	0.414	0.942	0.402	0.932	0.372	0.946	0.376	0.95	0.38	0.952	0.314	0.952
104	0.372	0.926	0.316	0.93	0.262	0.926	0.204	0.952	0.18	0.938	0.154	0.94	0.45	0.94	0.424	0.922	0.386	0.952	0.392	0.948	0.38	0.938	0.338	0.964
105	0.396	0.924	0.288	0.942	0.264	0.958	0.234	0.93	0.226	0.942	0.172	0.946	0.444	0.958	0.374	0.95	0.388	0.944	0.332	0.944	0.38	0.946	0.34	0.968
106	0.41	0.948	0.358	0.926	0.258	0.952	0.204	0.964	0.2	0.944	0.214	0.96	0.474	0.956	0.36	0.948	0.368	0.954	0.378	0.948	0.37	0.938	0.374	0.938
107	0.412	0.954	0.32	0.948	0.254	0.954	0.248	0.954	0.178	0.952	0.198	0.944	0.458	0.924	0.406	0.94	0.364	0.95	0.356	0.958	0.35	0.		

118	0.384	0.932	0.278	0.942	0.252	0.95	0.226	0.954	0.202	0.93	0.178	0.938	0.468	0.954	0.41	0.954	0.364	0.942	0.358	0.954	0.364	0.942	0.312	0.95
119	0.404	0.934	0.27	0.962	0.244	0.966	0.224	0.922	0.21	0.944	0.152	0.95	0.472	0.94	0.398	0.948	0.39	0.934	0.348	0.938	0.36	0.94	0.34	0.948
120	0.36	0.952	0.3	0.944	0.266	0.934	0.246	0.942	0.192	0.94	0.176	0.946	0.472	0.936	0.358	0.936	0.358	0.95	0.338	0.958	0.36	0.954	0.338	0.948
121	0.39	0.956	0.324	0.952	0.256	0.944	0.22	0.922	0.194	0.948	0.182	0.946	0.472	0.942	0.42	0.938	0.38	0.94	0.394	0.92	0.328	0.942	0.34	0.94
122	0.372	0.944	0.298	0.944	0.258	0.946	0.2	0.948	0.232	0.954	0.214	0.944	0.458	0.95	0.388	0.944	0.376	0.944	0.342	0.95	0.354	0.942	0.35	0.934
123	0.41	0.928	0.318	0.948	0.26	0.938	0.248	0.926	0.21	0.942	0.172	0.964	0.478	0.932	0.426	0.928	0.364	0.932	0.374	0.95	0.39	0.938	0.316	0.952
124	0.408	0.942	0.288	0.954	0.246	0.938	0.21	0.952	0.214	0.958	0.214	0.948	0.444	0.932	0.418	0.954	0.398	0.958	0.342	0.952	0.352	0.934	0.406	0.934
125	0.378	0.954	0.332	0.966	0.234	0.968	0.202	0.954	0.212	0.948	0.174	0.96	0.496	0.932	0.398	0.934	0.4	0.948	0.328	0.944	0.376	0.958	0.342	0.94
126	0.364	0.944	0.3	0.954	0.254	0.958	0.228	0.958	0.19	0.96	0.19	0.952	0.462	0.94	0.392	0.946	0.356	0.938	0.372	0.956	0.368	0.952	0.338	0.948
127	0.412	0.956	0.294	0.948	0.226	0.942	0.228	0.94	0.214	0.948	0.208	0.942	0.466	0.95	0.402	0.924	0.366	0.942	0.358	0.938	0.34	0.938	0.362	0.946
128	0.384	0.956	0.308	0.938	0.216	0.94	0.22	0.946	0.226	0.942	0.228	0.95	0.464	0.958	0.428	0.95	0.368	0.954	0.36	0.95	0.336	0.948	0.328	0.936
129	0.382	0.956	0.35	0.938	0.226	0.958	0.22	0.962	0.196	0.966	0.182	0.942	0.482	0.94	0.408	0.932	0.368	0.964	0.404	0.958	0.344	0.96	0.354	0.936
130	0.418	0.936	0.28	0.934	0.256	0.934	0.23	0.944	0.2	0.93	0.188	0.954	0.466	0.942	0.44	0.948	0.364	0.938	0.37	0.954	0.346	0.942	0.32	0.95
131	0.354	0.946	0.266	0.946	0.232	0.966	0.23	0.938	0.19	0.958	0.168	0.944	0.46	0.96	0.43	0.94	0.372	0.952	0.358	0.938	0.368	0.946	0.386	0.95
132	0.384	0.938	0.282	0.936	0.248	0.95	0.204	0.948	0.224	0.95	0.19	0.966	0.5	0.946	0.41	0.944	0.374	0.94	0.356	0.958	0.34	0.964	0.35	0.946
133	0.366	0.946	0.298	0.932	0.262	0.964	0.21	0.942	0.172	0.946	0.202	0.952	0.472	0.946	0.396	0.946	0.348	0.956	0.35	0.938	0.36	0.954	0.364	0.924
134	0.4	0.928	0.362	0.944	0.256	0.938	0.218	0.936	0.224	0.956	0.214	0.93	0.474	0.932	0.41	0.958	0.402	0.92	0.372	0.952	0.356	0.954	0.344	0.958
135	0.39	0.926	0.308	0.95	0.252	0.954	0.2	0.936	0.226	0.954	0.202	0.934	0.502	0.95	0.402	0.958	0.356	0.92	0.376	0.958	0.36	0.942	0.312	0.954
136	0.354	0.954	0.294	0.946	0.284	0.928	0.246	0.938	0.198	0.934	0.206	0.936	0.456	0.946	0.428	0.936	0.344	0.942	0.35	0.932	0.346	0.95	0.354	0.94
137	0.414	0.95	0.316	0.94	0.254	0.976	0.208	0.948	0.194	0.952	0.18	0.942	0.464	0.938	0.444	0.92	0.372	0.944	0.348	0.952	0.328	0.944	0.372	0.946
138	0.378	0.94	0.308	0.934	0.254	0.946	0.23	0.932	0.208	0.938	0.21	0.956	0.498	0.932	0.4	0.964	0.37	0.958	0.368	0.93	0.34	0.934	0.33	0.934
139	0.382	0.954	0.32	0.938	0.278	0.95	0.238	0.95	0.208	0.934	0.18	0.942	0.464	0.938	0.416	0.946	0.36	0.952	0.366	0.95	0.342	0.95	0.35	0.958
140	0.422	0.952	0.314	0.962	0.27	0.954	0.244	0.938	0.188	0.95	0.202	0.94	0.522	0.948	0.424	0.952	0.356	0.938	0.358	0.956	0.336	0.95	0.338	0.938
141	0.392	0.942	0.262	0.946	0.224	0.956	0.24	0.946	0.212	0.94	0.188	0.95	0.5	0.954	0.394	0.94	0.386	0.956	0.36	0.924	0.34	0.95	0.334	0.948
142	0.384	0.922	0.314	0.938	0.268	0.928	0.19	0.95	0.198	0.934	0.212	0.942	0.45	0.942	0.408	0.938	0.39	0.934	0.386	0.956	0.376	0.95	0.35	0.938
143	0.4	0.942	0.324	0.93	0.258	0.946	0.258	0.942	0.178	0.952	0.178	0.942	0.496	0.932	0.392	0.946	0.39	0.942	0.386	0.93	0.316	0.934	0.294	0.962
144	0.372	0.94	0.32	0.952	0.236	0.946	0.236	0.96	0.194	0.946	0.206	0.944	0.498	0.944	0.386	0.946	0.37	0.942	0.394	0.954	0.348	0.942	0.326	0.936
145	0.43	0.964	0.292	0.956	0.272	0.942	0.246	0.95	0.184	0.946	0.186	0.946	0.48	0.94	0.416	0.926	0.4	0.948	0.384	0.938	0.346	0.95	0.332	0.938
146	0.398	0.946	0.32	0.926	0.27	0.956	0.232	0.936	0.178	0.932	0.21	0.926	0.49	0.936	0.4	0.934	0.384	0.95	0.35	0.96	0.344	0.95	0.354	0.946
147	0.416	0.96	0.29	0.936	0.3	0.952	0.198	0.96	0.19	0.926	0.226	0.952	0.486	0.946	0.388	0.936	0.378	0.914	0.354	0.922	0.362	0.93	0.342	0.956
148	0.404	0.922	0.33	0.924	0.262	0.938	0.222	0.956	0.202	0.938	0.21	0.954	0.46	0.938	0.38	0.958	0.396	0.94	0.344	0.95	0.364	0.948	0.378	0.942
149	0.428	0.954	0.324	0.944	0.226	0.952	0.226	0.938	0.212	0.936	0.192	0.956	0.466	0.956	0.416	0.964	0.44	0.924	0.334	0.936	0.364	0.95	0.366	0.944
150	0.41	0.952	0.32	0.942	0.228	0.938	0.228	0.938	0.218	0.936	0.22	0.93	0.47	0.956	0.394	0.934	0.384	0.974	0.318	0.95	0.364	0.952	0.322	0.962
151	0.364	0.944	0.3	0.954	0.254	0.958	0.228	0.958	0.19	0.96	0.19	0.952	0.462	0.94	0.392	0.946	0.356	0.938	0.372	0.956	0.368	0.952	0.338	0.948
152	0.412	0.96	0.294	0.948	0.226	0.942	0.228	0.94	0.214	0.948	0.208	0.942	0.466	0.946	0.428	0.924	0.366	0.942	0.358	0.938	0.34	0.938	0.362	0.946
153	0.384	0.956	0.308	0.928	0.216	0.94	0.22	0.946	0.226	0.942	0.228	0.95	0.464	0.958	0.428	0.95	0.368	0.954	0.36	0.95	0.336	0.948	0.328	0.936
154	0.382	0.956	0.35	0.938	0.226	0.958	0.22	0.962	0.196	0.966	0.182	0.942	0.482	0.94	0.408	0.932	0.368	0.964	0.404	0.958	0.344	0.96	0.354	0.936
155	0.418	0.936	0.28	0.934	0.256	0.934	0.23	0.944	0.2	0.93	0.188	0.954	0.466	0.942	0.44	0.948	0.364	0.938	0.37	0.954	0.346	0.942	0.32	0.95
156	0.354	0.946	0.266	0.946	0.232	0.966	0.23	0.938	0.19	0.958	0.168	0.944	0.46	0.96	0.43	0.94	0.372	0.952	0.358	0.938	0.368	0.946	0.386	0.95
157	0.384	0.938	0.282	0.936	0.248	0.95	0.204	0.948	0.224	0.95	0.19	0.966	0.5	0.946	0.41	0.944	0.374	0.94	0.356	0.958	0.34	0.964	0.35	0.946
158	0.366	0.946	0.298	0.932	0.262	0.964	0.21	0.942	0.172	0.946	0.202	0.952	0.472	0.946	0.396	0.946	0.348	0.956	0.35	0.938	0.36	0.954	0.364	0.924
159	0.4	0.928	0.362	0.944	0.256	0.938	0.218	0.962	0.24	0.956	0.214	0.93	0.474	0.932	0.41	0.958	0.402	0.93	0.35	0.952	0.356	0.954	0.344	0.958
160	0.39	0.926	0.308	0.95	0.252	0.954	0.2	0.936	0.226	0.954	0.202	0.936	0.456	0.946	0.428	0.936	0.344	0.942	0.35	0.932	0.346	0.95	0.354	0.94
161	0.354	0.954	0.294	0.946	0.284	0.928	0.246	0.938	0.198	0.934	0.206	0.936	0.456	0.946	0.428	0.936	0.344	0.942	0.35	0.932	0.346	0.95	0.354	0.94
162	0.414	0.95	0.316	0.94	0.254	0.976	0.208	0.948	0.194	0.952	0.18	0.942	0.464	0.938	0.444	0.92	0.372	0.952	0.348	0.952	0.328	0.944	0.372	0.946
163	0.378	0.94	0.308	0.934	0.254	0.946	0.23	0.932	0.208	0.938	0.21	0.956	0.464	0.938	0.416	0.946	0.36	0.952	0.366	0.93	0.34	0.934	0.33	0.934
164	0.382	0.954	0.32	0.938	0.278	0.95	0.238	0.95	0.208	0.934	0.18	0.942	0.464	0.938	0.416	0.946	0.36	0.952	0.366	0.95	0.342	0.95	0.35	0.958
165	0.422	0.952	0.314	0.962	0.27	0.954	0.244	0.938	0.188	0.95	0.202	0.94	0.522	0.948	0.424	0.952	0.356	0.938	0.358	0.956	0.336	0.95	0.338	0.938
166	0.392	0.942	0.262	0.946	0.224	0.956	0.24	0.946	0.212	0.94	0.188	0.95	0.5	0.954	0.394	0.94	0.386	0.956	0.36	0.924	0.34	0.95	0.334	0.948
167	0.384	0.922	0.314	0.938	0.268	0.928	0.19	0.95	0.198	0.934	0.212	0.942	0.456	0.946	0.428	0.936	0.344	0.942	0.35	0.932	0.346	0.95	0.354</	

178	0.384	0.956	0.308	0.928	0.216	0.94	0.22	0.946	0.226	0.942	0.228	0.95	0.464	0.958	0.428	0.95	0.368	0.954	0.36	0.95	0.336	0.948	0.328	0.936
179	0.382	0.956	0.35	0.938	0.226	0.958	0.22	0.962	0.196	0.966	0.182	0.942	0.482	0.94	0.408	0.932	0.368	0.964	0.404	0.958	0.344	0.96	0.354	0.936
180	0.418	0.936	0.28	0.934	0.256	0.934	0.23	0.944	0.2	0.93	0.188	0.954	0.466	0.942	0.44	0.948	0.364	0.938	0.37	0.954	0.346	0.942	0.32	0.95
181	0.354	0.946	0.266	0.946	0.232	0.966	0.23	0.938	0.19	0.958	0.168	0.944	0.46	0.96	0.43	0.94	0.372	0.952	0.358	0.938	0.368	0.946	0.36	0.95
182	0.384	0.938	0.282	0.936	0.248	0.95	0.204	0.948	0.224	0.95	0.19	0.966	0.5	0.946	0.41	0.944	0.374	0.94	0.356	0.958	0.34	0.964	0.35	0.946
183	0.366	0.946	0.298	0.932	0.262	0.964	0.21	0.942	0.172	0.946	0.202	0.952	0.472	0.946	0.396	0.946	0.348	0.956	0.35	0.938	0.36	0.954	0.364	0.924
184	0.4	0.928	0.362	0.944	0.256	0.938	0.218	0.962	0.24	0.956	0.214	0.93	0.474	0.932	0.41	0.958	0.408	0.93	0.35	0.952	0.356	0.954	0.344	0.958
185	0.39	0.926	0.308	0.95	0.252	0.954	0.2	0.936	0.226	0.954	0.202	0.934	0.502	0.95	0.402	0.958	0.356	0.92	0.376	0.958	0.36	0.942	0.312	0.954
186	0.354	0.954	0.294	0.946	0.284	0.928	0.246	0.938	0.198	0.934	0.206	0.936	0.456	0.946	0.428	0.936	0.344	0.942	0.35	0.932	0.346	0.95	0.354	0.94
187	0.414	0.95	0.316	0.94	0.254	0.976	0.208	0.948	0.194	0.952	0.18	0.942	0.464	0.938	0.444	0.92	0.372	0.95	0.348	0.952	0.328	0.944	0.372	0.946
188	0.378	0.94	0.308	0.934	0.254	0.946	0.23	0.932	0.208	0.938	0.21	0.956	0.498	0.932	0.44	0.964	0.37	0.958	0.368	0.93	0.34	0.934	0.33	0.934
189	0.382	0.954	0.32	0.938	0.278	0.95	0.238	0.95	0.208	0.934	0.18	0.942	0.464	0.938	0.416	0.946	0.36	0.952	0.366	0.95	0.342	0.95	0.35	0.958
190	0.422	0.952	0.314	0.962	0.27	0.954	0.244	0.938	0.188	0.95	0.202	0.94	0.522	0.948	0.424	0.952	0.356	0.938	0.358	0.956	0.336	0.95	0.338	0.938
191	0.392	0.942	0.262	0.946	0.224	0.956	0.24	0.946	0.212	0.94	0.188	0.95	0.5	0.954	0.424	0.94	0.386	0.956	0.36	0.924	0.34	0.95	0.334	0.948
192	0.384	0.922	0.314	0.938	0.268	0.928	0.19	0.95	0.198	0.934	0.212	0.942	0.45	0.942	0.408	0.938	0.39	0.934	0.386	0.956	0.376	0.95	0.35	0.938
193	0.4	0.942	0.324	0.93	0.254	0.946	0.258	0.942	0.178	0.952	0.178	0.942	0.496	0.932	0.392	0.946	0.39	0.942	0.386	0.93	0.316	0.934	0.294	0.962
194	0.372	0.94	0.32	0.952	0.236	0.946	0.236	0.96	0.194	0.946	0.206	0.944	0.498	0.944	0.386	0.946	0.37	0.942	0.394	0.954	0.348	0.942	0.326	0.936
195	0.43	0.964	0.292	0.956	0.272	0.942	0.246	0.95	0.184	0.946	0.186	0.946	0.48	0.94	0.416	0.926	0.4	0.948	0.384	0.938	0.346	0.95	0.332	0.938
196	0.398	0.946	0.32	0.926	0.27	0.956	0.232	0.936	0.178	0.932	0.21	0.926	0.49	0.936	0.4	0.934	0.384	0.95	0.35	0.96	0.344	0.95	0.354	0.946
197	0.416	0.96	0.29	0.936	0.3	0.952	0.198	0.96	0.19	0.926	0.226	0.952	0.486	0.946	0.388	0.936	0.378	0.914	0.354	0.922	0.362	0.93	0.342	0.956
198	0.404	0.922	0.33	0.924	0.262	0.938	0.222	0.956	0.202	0.938	0.21	0.954	0.46	0.938	0.38	0.958	0.396	0.94	0.344	0.95	0.364	0.948	0.378	0.942
199	0.428	0.954	0.324	0.944	0.226	0.952	0.226	0.938	0.212	0.936	0.192	0.956	0.466	0.956	0.416	0.964	0.44	0.924	0.334	0.936	0.364	0.95	0.366	0.944
200	0.41	0.952	0.32	0.942	0.228	0.938	0.228	0.938	0.218	0.936	0.22	0.93	0.47	0.956	0.394	0.934	0.384	0.974	0.318	0.95	0.364	0.952	0.322	0.962
201	0.366	0.942	0.308	0.96	0.232	0.938	0.216	0.952	0.168	0.942	0.168	0.932	0.47	0.946	0.434	0.938	0.376	0.934	0.394	0.96	0.344	0.952	0.336	0.934
202	0.408	0.946	0.29	0.946	0.258	0.956	0.218	0.952	0.18	0.954	0.212	0.932	0.456	0.952	0.386	0.944	0.378	0.936	0.382	0.952	0.334	0.954	0.354	0.936
203	0.37	0.95	0.31	0.954	0.212	0.962	0.232	0.95	0.228	0.944	0.2	0.942	0.494	0.946	0.368	0.958	0.36	0.946	0.382	0.952	0.324	0.934	0.33	0.938
204	0.394	0.93	0.262	0.93	0.246	0.944	0.204	0.942	0.188	0.952	0.202	0.924	0.488	0.944	0.394	0.964	0.368	0.94	0.346	0.934	0.346	0.942	0.414	0.948
205	0.41	0.94	0.27	0.932	0.244	0.942	0.262	0.942	0.188	0.946	0.188	0.946	0.494	0.944	0.408	0.924	0.362	0.964	0.376	0.958	0.392	0.944	0.326	0.936
206	0.374	0.956	0.268	0.928	0.24	0.946	0.236	0.934	0.19	0.932	0.182	0.934	0.496	0.94	0.412	0.944	0.362	0.946	0.36	0.94	0.356	0.956	0.37	0.952
207	0.42	0.95	0.314	0.946	0.262	0.926	0.222	0.926	0.208	0.958	0.2	0.956	0.472	0.942	0.4	0.956	0.35	0.956	0.374	0.946	0.382	0.928	0.366	0.942
208	0.356	0.94	0.298	0.942	0.23	0.932	0.228	0.962	0.23	0.95	0.182	0.952	0.478	0.942	0.398	0.968	0.408	0.956	0.394	0.936	0.312	0.962	0.338	0.964
209	0.372	0.952	0.254	0.96	0.254	0.962	0.214	0.944	0.21	0.95	0.18	0.936	0.472	0.952	0.394	0.94	0.38	0.95	0.364	0.942	0.334	0.97	0.342	0.914
210	0.372	0.946	0.314	0.952	0.28	0.952	0.222	0.96	0.226	0.95	0.2	0.964	0.448	0.958	0.392	0.956	0.374	0.958	0.374	0.966	0.324	0.946	0.352	0.96
211	0.406	0.944	0.282	0.922	0.234	0.938	0.214	0.944	0.238	0.95	0.202	0.946	0.444	0.942	0.394	0.936	0.362	0.94	0.324	0.958	0.346	0.948	0.344	0.942
212	0.366	0.96	0.332	0.938	0.266	0.944	0.18	0.956	0.226	0.932	0.194	0.92	0.447	0.936	0.434	0.952	0.418	0.95	0.36	0.94	0.352	0.934	0.284	0.952
213	0.392	0.948	0.348	0.952	0.25	0.936	0.26	0.94	0.188	0.942	0.166	0.94	0.432	0.96	0.402	0.952	0.39	0.948	0.402	0.916	0.374	0.932	0.34	0.932
214	0.402	0.956	0.262	0.926	0.25	0.96	0.22	0.942	0.178	0.942	0.178	0.946	0.478	0.922	0.43	0.958	0.408	0.948	0.36	0.918	0.326	0.946	0.328	0.954
215	0.41	0.966	0.28	0.942	0.23	0.952	0.23	0.96	0.208	0.942	0.176	0.946	0.44	0.936	0.426	0.96	0.346	0.94	0.378	0.948	0.338	0.944	0.39	0.946
216	0.404	0.928	0.302	0.954	0.258	0.946	0.186	0.956	0.194	0.94	0.198	0.956	0.474	0.948	0.42	0.932	0.348	0.95	0.338	0.956	0.374	0.922	0.336	0.964
217	0.388	0.946	0.308	0.932	0.246	0.954	0.218	0.944	0.224	0.956	0.198	0.924	0.482	0.93	0.378	0.926	0.376	0.954	0.34	0.956	0.328	0.944	0.342	0.948
218	0.356	0.958	0.338	0.944	0.268	0.952	0.242	0.944	0.224	0.942	0.172	0.952	0.45	0.954	0.398	0.93	0.388	0.942	0.362	0.94	0.35	0.94	0.34	0.952
219	0.4	0.948	0.274	0.942	0.224	0.964	0.208	0.954	0.192	0.964	0.184	0.95	0.436	0.95	0.42	0.958	0.388	0.93	0.372	0.942	0.322	0.948	0.326	0.956
220	0.396	0.936	0.304	0.948	0.266	0.95	0.202	0.942	0.184	0.95	0.17	0.932	0.482	0.942	0.408	0.95	0.406	0.95	0.348	0.964	0.364	0.94	0.37	0.95
221	0.36	0.942	0.286	0.956	0.308	0.946	0.22	0.952	0.24	0.952	0.182	0.952	0.484	0.948	0.406	0.934	0.352	0.948	0.346	0.956	0.33	0.928	0.364	0.944
222	0.398	0.956	0.252	0.95	0.256	0.942	0.224	0.94	0.214	0.922	0.2	0.954	0.496	0.948	0.39	0.942	0.364	0.942	0.338	0.932	0.37	0.946	0.342	0.938
223	0.38	0.936	0.306	0.93	0.254	0.952	0.232	0.944	0.212	0.952	0.174	0.952	0.464	0.942	0.364	0.954	0.354	0.956	0.366	0.97	0.368	0.958	0.372	0.932
224	0.364	0.95	0.276	0.954	0.268	0.924	0.218	0.944	0.212	0.922	0.206	0.956	0.48	0.952	0.402	0.932	0.364	0.956	0.344	0.944	0.336	0.934	0.354	0.934
225	0.352	0.924	0.304	0.936	0.256	0.952	0.23	0.94	0.216	0.934	0.21	0.962	0.484	0.946	0.362	0.952	0.414	0.924	0.338	0.954	0.302	0.952	0.368	0.942
226	0.366	0.942	0.308	0.96	0.232	0.938	0.216	0.932	0.168	0.942	0.168	0.932	0.47	0.946	0.434	0.938	0.376	0.934	0.394	0.96	0.344	0.954	0.336	0.934
227	0.408	0.946	0.29	0.946	0.258	0.956	0.218	0.952	0.18	0.954	0.212	0.932	0.456	0.952	0.386	0.944	0.378	0.936	0.384	0.938	0.35			

238	0.392	0.948	0.348	0.952	0.25	0.936	0.26	0.94	0.188	0.942	0.166	0.94	0.432	0.96	0.402	0.952	0.39	0.948	0.402	0.916	0.374	0.932	0.34	0.932
239	0.402	0.956	0.262	0.926	0.25	0.96	0.22	0.942	0.178	0.954	0.208	0.946	0.478	0.922	0.43	0.958	0.408	0.948	0.36	0.918	0.326	0.946	0.328	0.954
240	0.41	0.966	0.28	0.942	0.23	0.952	0.23	0.96	0.208	0.942	0.176	0.946	0.44	0.936	0.426	0.96	0.346	0.94	0.378	0.948	0.338	0.944	0.39	0.946
241	0.404	0.928	0.302	0.954	0.258	0.946	0.186	0.956	0.194	0.94	0.198	0.956	0.474	0.948	0.42	0.932	0.348	0.95	0.338	0.956	0.374	0.922	0.336	0.964
242	0.388	0.946	0.308	0.932	0.246	0.954	0.218	0.956	0.18	0.962	0.198	0.924	0.482	0.93	0.378	0.926	0.376	0.954	0.34	0.956	0.328	0.944	0.342	0.948
243	0.356	0.958	0.338	0.944	0.268	0.952	0.242	0.944	0.224	0.942	0.172	0.952	0.45	0.954	0.398	0.93	0.388	0.942	0.362	0.94	0.35	0.94	0.34	0.952
244	0.4	0.948	0.274	0.942	0.224	0.964	0.208	0.954	0.192	0.964	0.184	0.95	0.436	0.95	0.42	0.958	0.388	0.93	0.372	0.942	0.322	0.948	0.326	0.956
245	0.396	0.936	0.304	0.948	0.266	0.95	0.202	0.942	0.184	0.95	0.17	0.932	0.432	0.954	0.408	0.95	0.406	0.95	0.348	0.964	0.364	0.94	0.37	0.95
246	0.36	0.942	0.286	0.956	0.308	0.946	0.22	0.952	0.24	0.952	0.182	0.952	0.484	0.948	0.406	0.934	0.352	0.948	0.346	0.956	0.33	0.928	0.364	0.944
247	0.398	0.956	0.252	0.95	0.256	0.942	0.224	0.94	0.214	0.922	0.2	0.954	0.496	0.948	0.39	0.942	0.364	0.942	0.338	0.932	0.37	0.946	0.342	0.938
248	0.38	0.936	0.306	0.93	0.254	0.952	0.232	0.944	0.212	0.952	0.174	0.952	0.464	0.942	0.364	0.954	0.354	0.95	0.366	0.97	0.368	0.958	0.372	0.932
249	0.364	0.95	0.276	0.954	0.268	0.924	0.218	0.944	0.212	0.922	0.206	0.956	0.48	0.952	0.402	0.932	0.364	0.956	0.344	0.944	0.336	0.934	0.354	0.934
250	0.352	0.924	0.304	0.936	0.256	0.952	0.23	0.94	0.216	0.934	0.21	0.962	0.484	0.946	0.362	0.952	0.414	0.924	0.338	0.954	0.302	0.952	0.368	0.942

Cuadro B.15: Proporciones para medir la eficiencia de los métodos para $R^2 = 0.80$, cotas 1 y 2 continuación

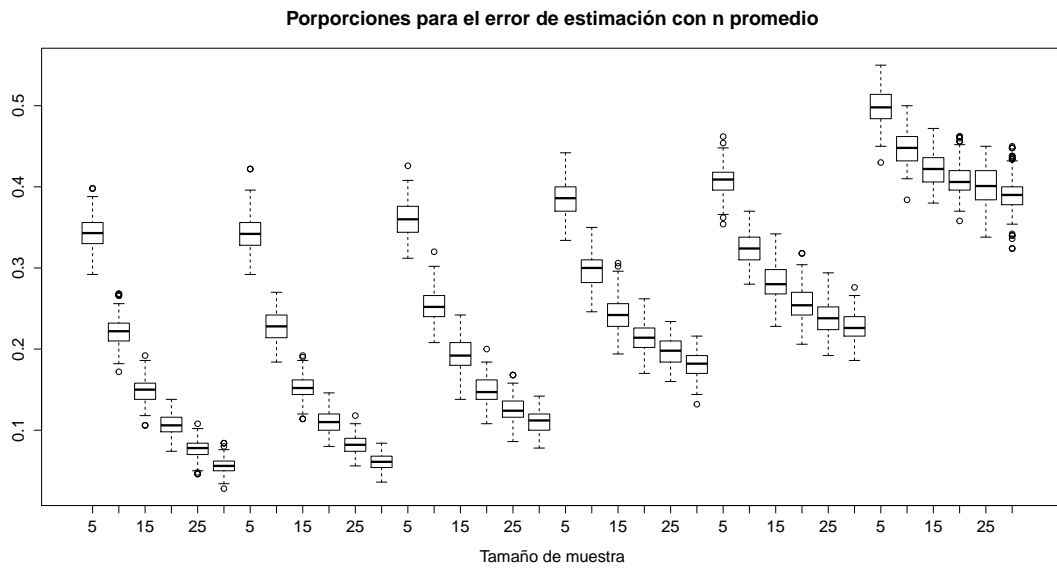


Figura B.8: Gráficos de caja para la eficiencia del error de estimación del método promedio, $R^2 = 0.85$

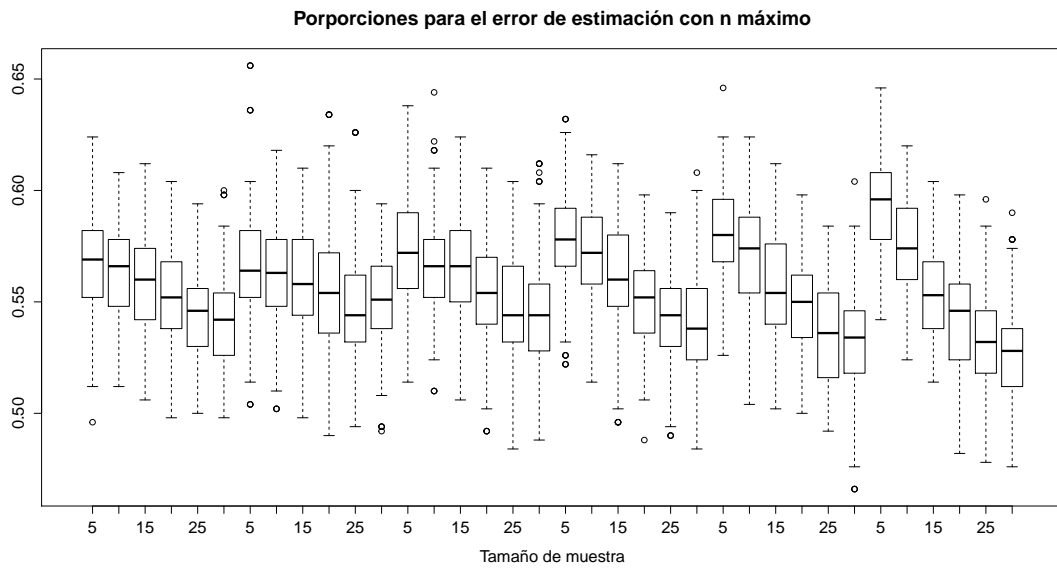


Figura B.9: Gráficos de caja para la eficiencia del error de estimación del método máximo, $R^2 = 0.85$

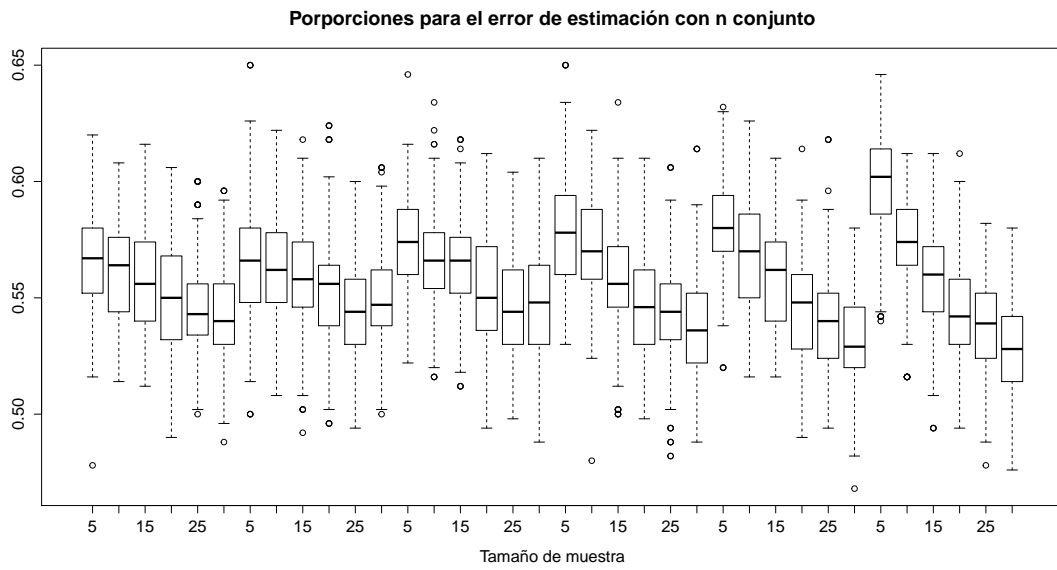


Figura B.10: Gráficos de caja para la eficiencia del error de estimación del método conjunto, $R^2 = 0.85$

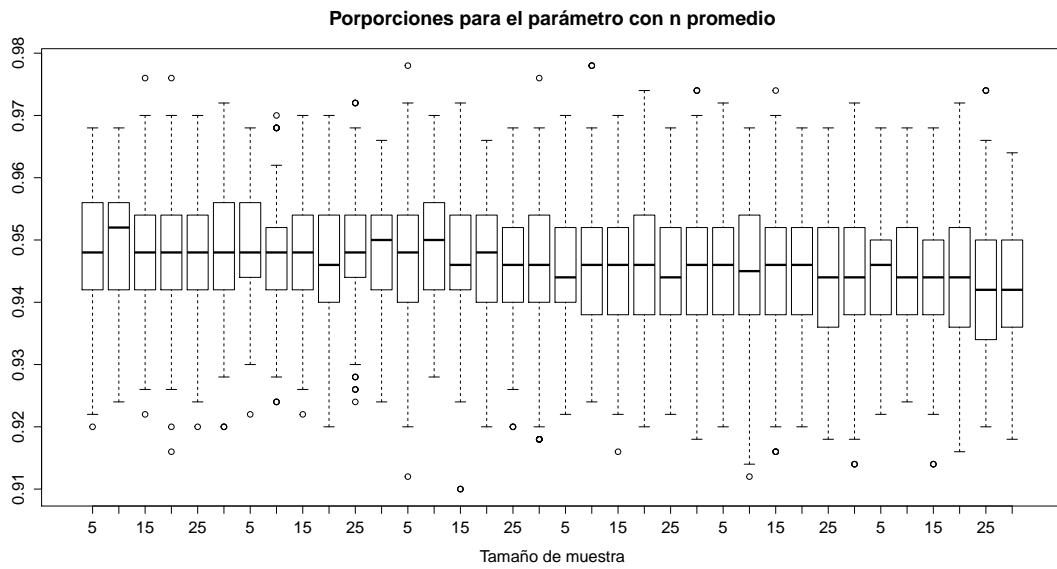


Figura B.11: Gráficos de caja para la eficiencia del parámetro del método promedio, $R^2 = 0.85$

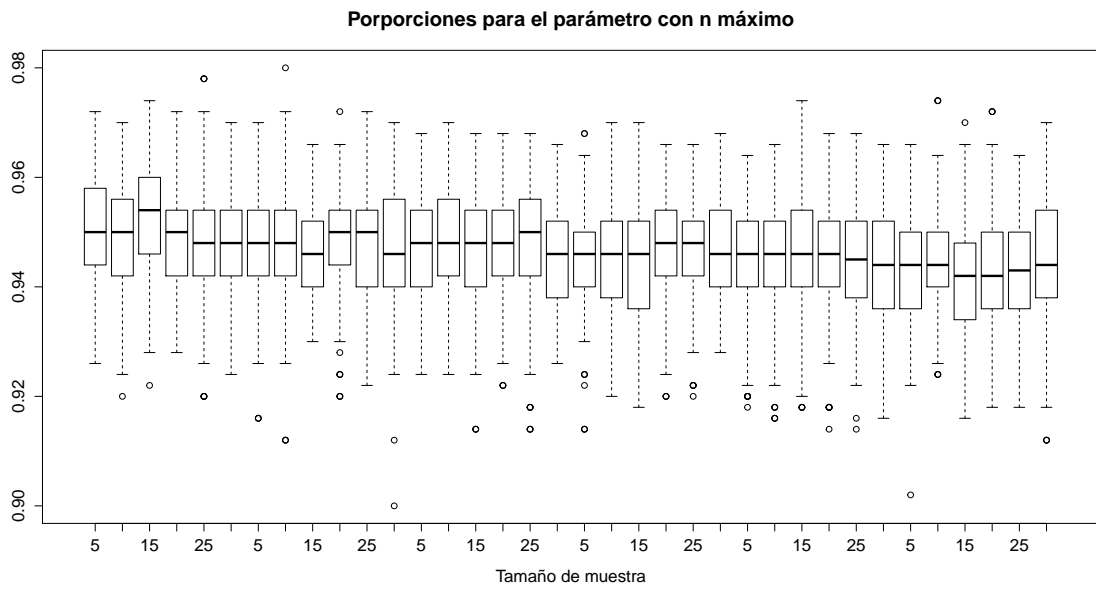


Figura B.12: Gráficos de caja para la eficiencia del parámetro del método máximo, $R^2 = 0.85$

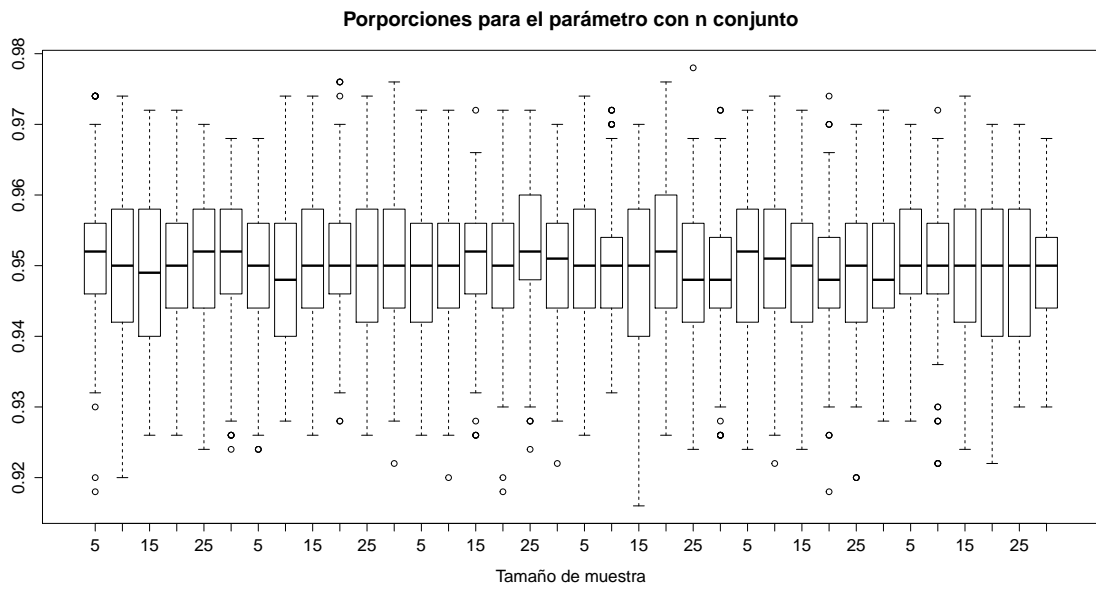


Figura B.13: Gráficos de caja para la eficiencia del parámetro del método conjunto, $R^2 = 0.85$

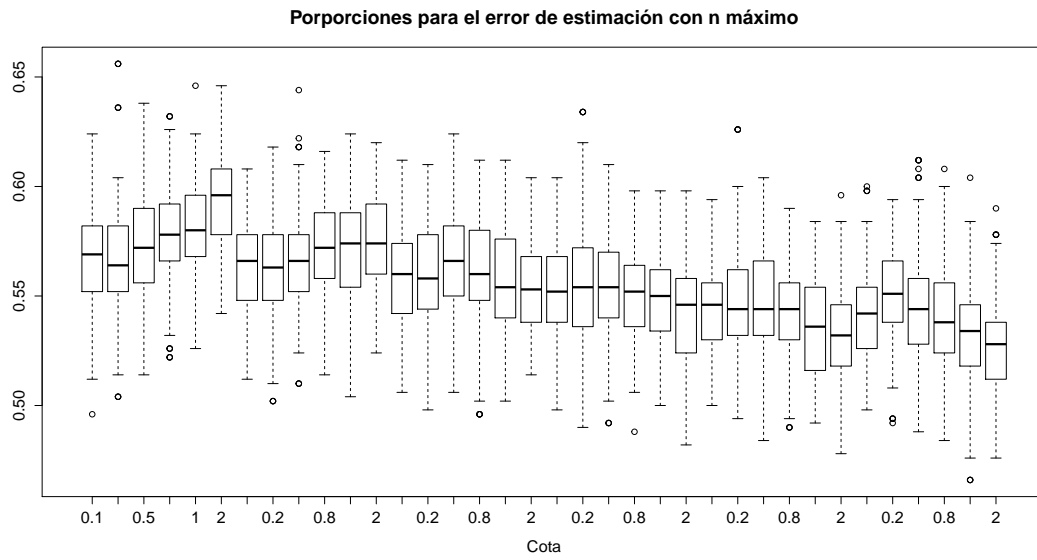


Figura B.14: Gráficos de caja para la eficiencia del error de estimación del método máximo aumentando la cota, $R^2 = 0.85$

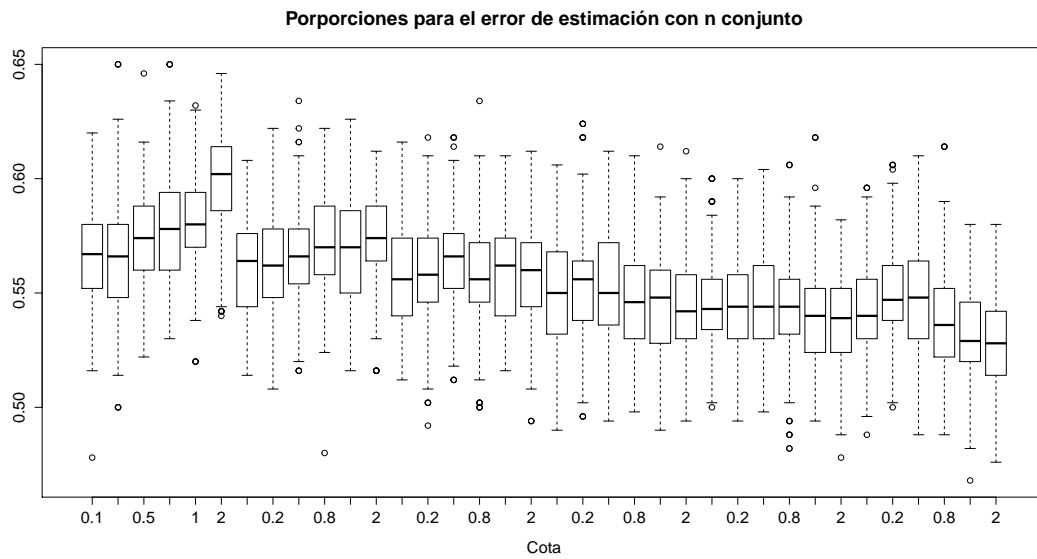


Figura B.15: Gráficos de caja para la eficiencia del error de estimación del método conjunto aumentando la cota, $R^2 = 0.85$

		5		10		15		20		25		30	
		p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}
0.1	MEDIA	0.343	0.949	0.223	0.950	0.149	0.948	0.107	0.948	0.077	0.948	0.056	0.948
	MEDIANA	0.343	0.948	0.222	0.952	0.15	0.948	0.106	0.948	0.078	0.948	0.056	0.948
0.2	MEDIA	0.342	0.949	0.228	0.948	0.153	0.948	0.112	0.947	0.082	0.948	0.061	0.949
	MEDIANA	0.342	0.948	0.228	0.948	0.152	0.948	0.11	0.946	0.082	0.948	0.061	0.95
0.5	MEDIA	0.362	0.946	0.254	0.949	0.192	0.947	0.149	0.947	0.126	0.946	0.111	0.946
	MEDIANA	0.36	0.948	0.252	0.95	0.192	0.946	0.147	0.948	0.124	0.946	0.112	0.946
0.8	MEDIA	0.386	0.946	0.297	0.946	0.242	0.946	0.214	0.946	0.197	0.944	0.180	0.946
	MEDIANA	0.386	0.944	0.3	0.946	0.242	0.946	0.214	0.946	0.198	0.944	0.182	0.946
1	MEDIA	0.408	0.946	0.324	0.945	0.283	0.945	0.256	0.945	0.239	0.943	0.228	0.944
	MEDIANA	0.409	0.946	0.324	0.945	0.28	0.946	0.254	0.946	0.238	0.944	0.226	0.944
2	MEDIA	0.499	0.945	0.447	0.945	0.422	0.944	0.408	0.944	0.401	0.942	0.391	0.943
	MEDIANA	0.498	0.946	0.448	0.944	0.422	0.944	0.406	0.944	0.401	0.942	0.39	0.942

Cuadro B.16: Eficiencia media y mediana del método promedio, $R^2 = 0.85$

		5		10		15		20		25		30	
		p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}
0.1	MEDIA	0.567	0.951	0.564	0.948	0.558	0.952	0.552	0.949	0.545	0.949	0.541	0.948
	MEDIANA	0.569	0.95	0.566	0.95	0.56	0.954	0.552	0.95	0.546	0.948	0.542	0.948
0.2	MEDIA	0.566	0.948	0.562	0.948	0.558	0.947	0.554	0.949	0.546	0.948	0.550	0.948
	MEDIANA	0.564	0.948	0.563	0.948	0.558	0.946	0.554	0.95	0.544	0.95	0.551	0.946
0.5	MEDIA	0.572	0.947	0.566	0.948	0.566	0.947	0.553	0.947	0.546	0.948	0.545	0.946
	MEDIANA	0.572	0.948	0.566	0.948	0.566	0.948	0.554	0.948	0.544	0.95	0.544	0.946
0.8	MEDIA	0.578	0.945	0.573	0.945	0.562	0.945	0.550	0.947	0.543	0.947	0.539	0.946
	MEDIANA	0.578	0.946	0.572	0.946	0.56	0.946	0.552	0.948	0.544	0.948	0.538	0.946
1	MEDIA	0.581	0.946	0.572	0.945	0.558	0.946	0.548	0.945	0.535	0.945	0.532	0.944
	MEDIANA	0.58	0.946	0.574	0.946	0.554	0.946	0.55	0.946	0.536	0.945	0.534	0.944
2	MEDIA	0.595	0.943	0.576	0.944	0.553	0.942	0.542	0.943	0.533	0.943	0.528	0.944
	MEDIANA	0.596	0.944	0.574	0.944	0.553	0.942	0.546	0.942	0.532	0.943	0.528	0.944

Cuadro B.17: Eficiencia media y mediana del método máximo, $R^2 = 0.85$

		5		10		15		20		25		30	
		p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}
0.1	MEDIA	0.567	0.952	0.562	0.950	0.557	0.949	0.550	0.951	0.545	0.952	0.541	0.950
	MEDIANA	0.567	0.952	0.564	0.95	0.556	0.949	0.55	0.95	0.543	0.952	0.54	0.952
0.2	MEDIA	0.565	0.949	0.563	0.949	0.559	0.951	0.553	0.950	0.545	0.949	0.549	0.951
	MEDIANA	0.566	0.95	0.562	0.948	0.558	0.95	0.556	0.95	0.544	0.95	0.547	0.95
0.5	MEDIA	0.574	0.950	0.567	0.950	0.564	0.951	0.553	0.949	0.545	0.952	0.547	0.950
	MEDIANA	0.574	0.95	0.566	0.95	0.566	0.952	0.55	0.95	0.544	0.952	0.548	0.951
0.8	MEDIA	0.577	0.950	0.572	0.950	0.558	0.948	0.549	0.951	0.543	0.949	0.538	0.949
	MEDIANA	0.578	0.95	0.57	0.95	0.556	0.95	0.546	0.952	0.544	0.948	0.536	0.948
1	MEDIA	0.581	0.951	0.569	0.950	0.560	0.949	0.545	0.948	0.539	0.950	0.530	0.949
	MEDIANA	0.58	0.952	0.57	0.951	0.562	0.95	0.548	0.948	0.54	0.95	0.529	0.948
2	MEDIA	0.598	0.950	0.574	0.951	0.560	0.949	0.544	0.949	0.537	0.950	0.530	0.949
	MEDIANA	0.602	0.95	0.574	0.95	0.56	0.95	0.542	0.95	0.539	0.95	0.528	0.95

Cuadro B.18: Eficiencia media y mediana del método conjunto, $R^2 = 0.85$

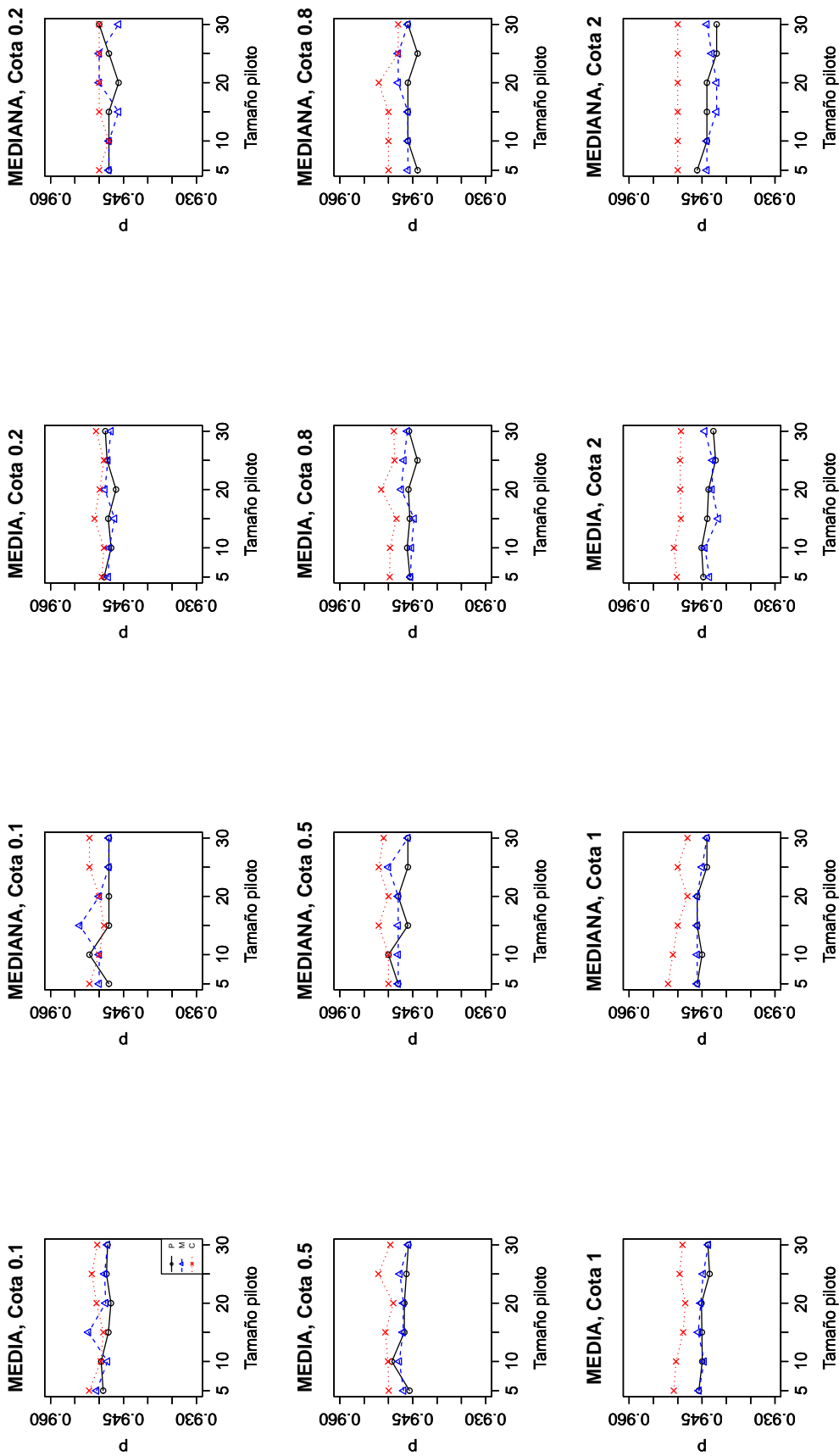


Figura B.16: Media y mediana de la eficiencia del parámetro, $R^2 = 0.85$

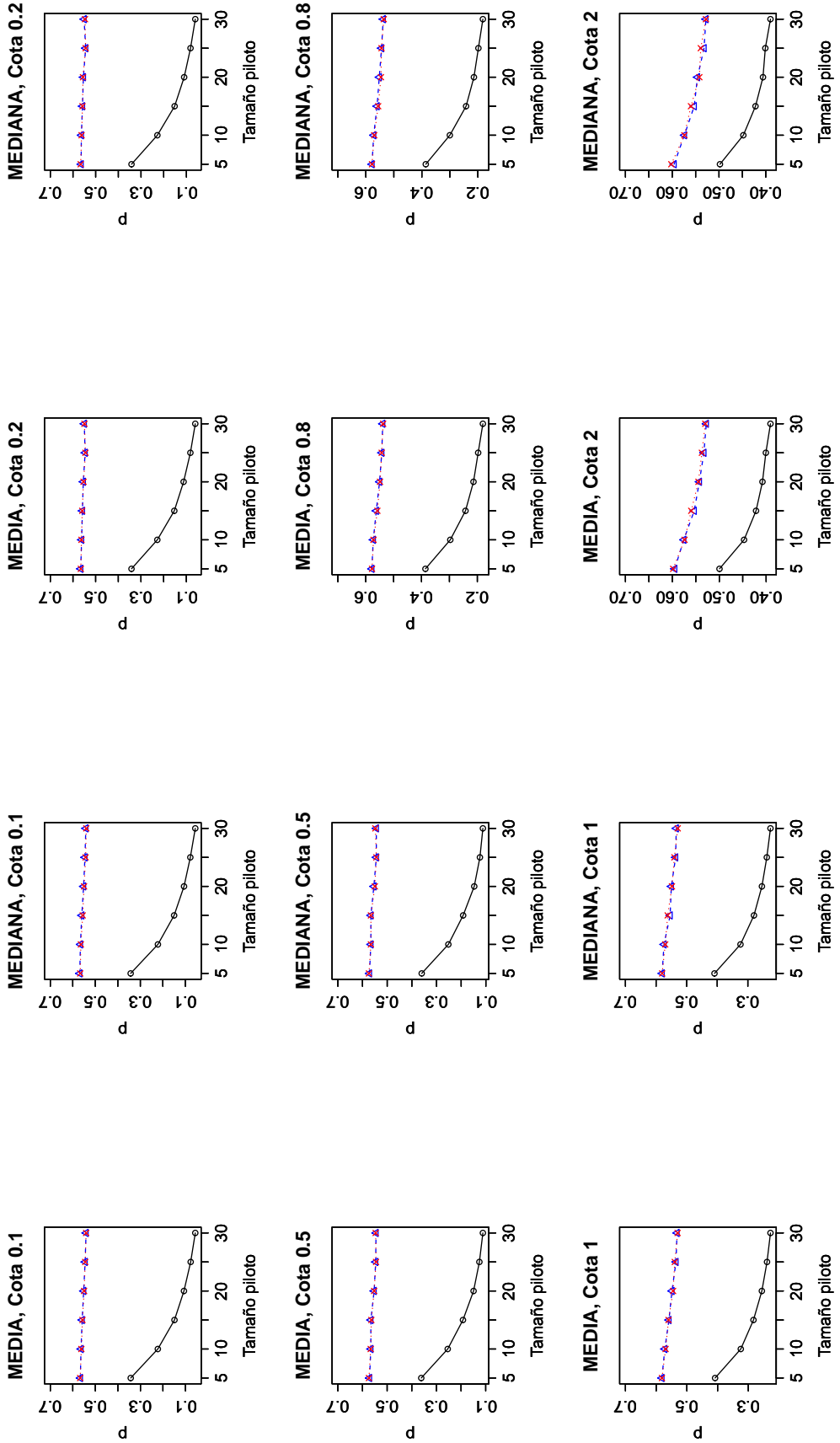


Figura B.17: Media y mediana de la eficiencia de estimación, $R^2 = 0.85$

B.2. $R^2 = 0.90$

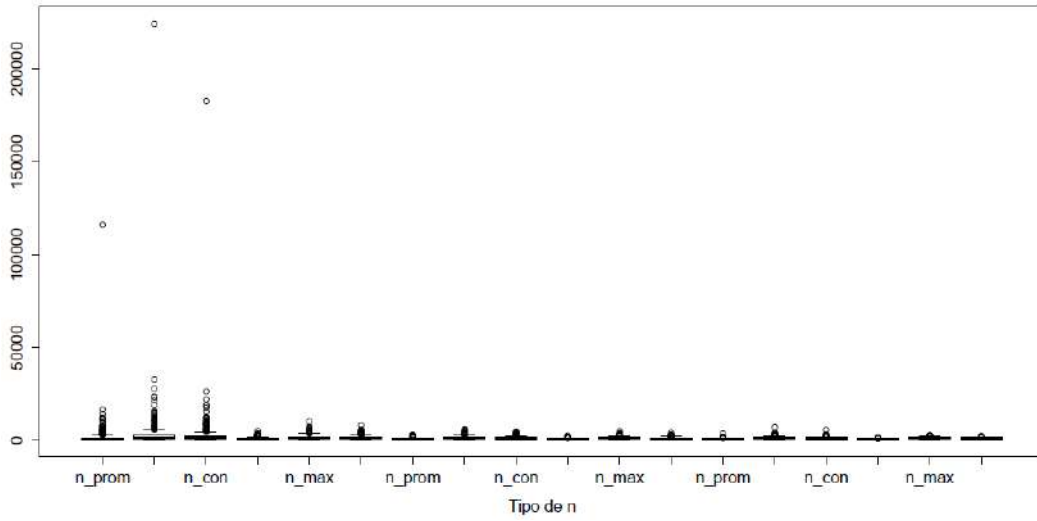


Figura B.18: Gráficos de caja para los tamaños de muestra promedio, máximo y conjunto correspondientes a la cota 0.1

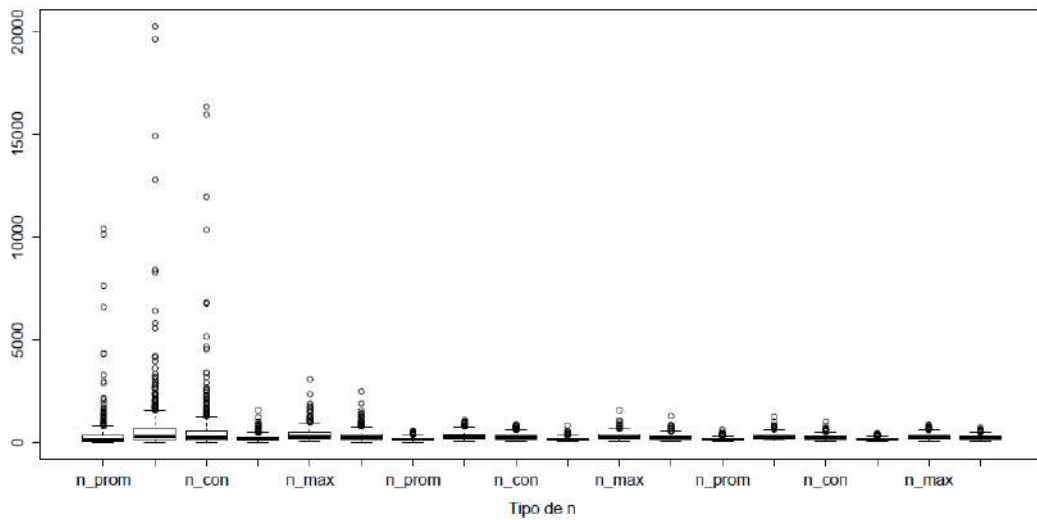


Figura B.19: Gráficos de caja para los tamaños de muestra promedio, máximo y conjunto correspondientes a la cota 0.2

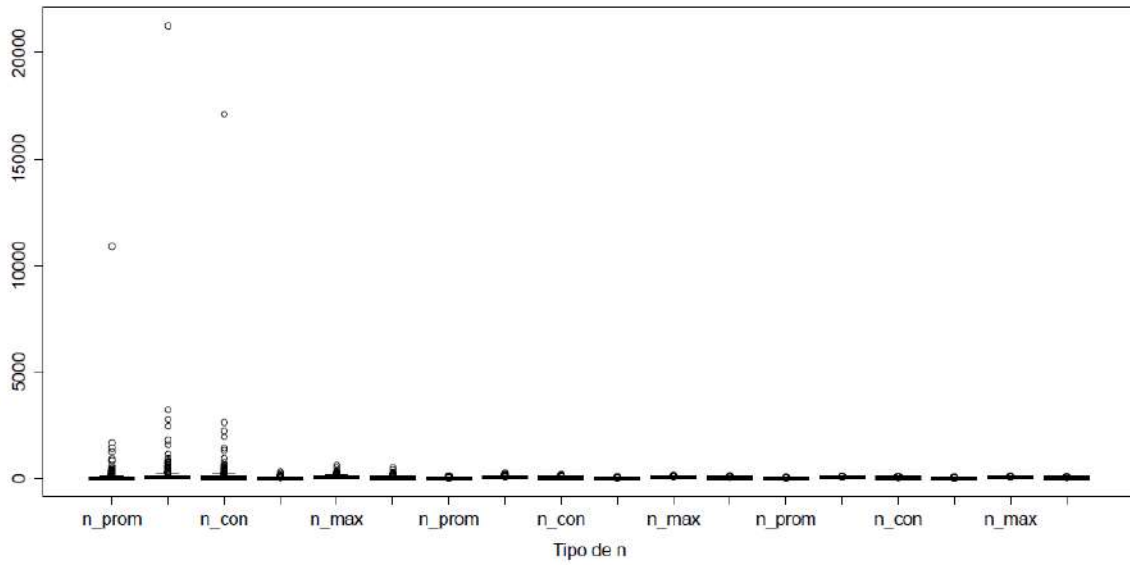


Figura B.20: Gráficos de caja para los tamaños de muestra promedio, máximo y conjunto correspondientes a la cota 0.5

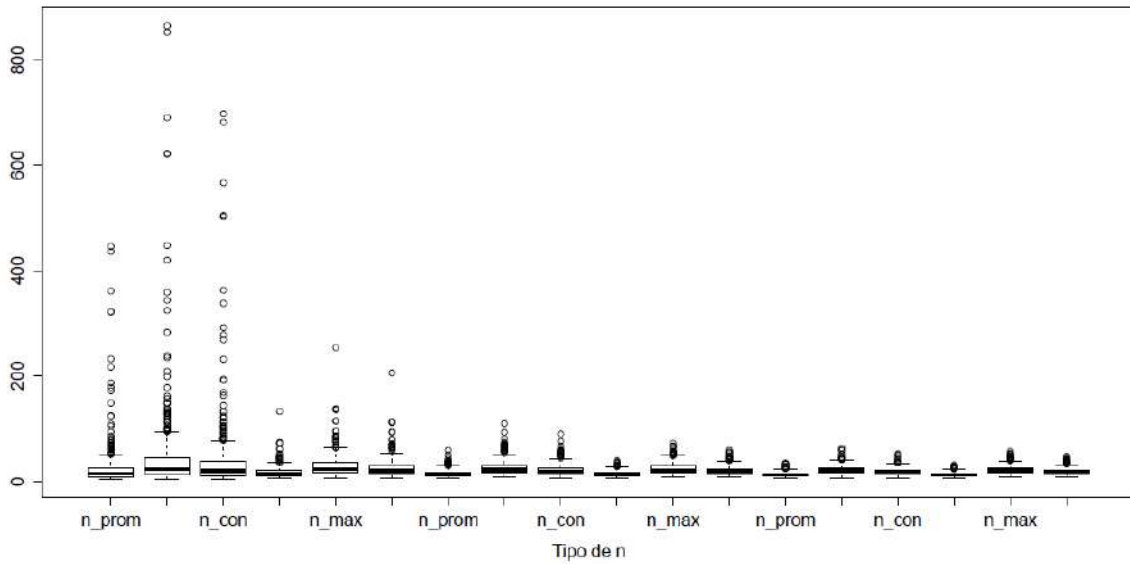


Figura B.21: Gráficos de caja para los tamaños de muestra promedio, máximo y conjunto correspondientes a la cota 0.8

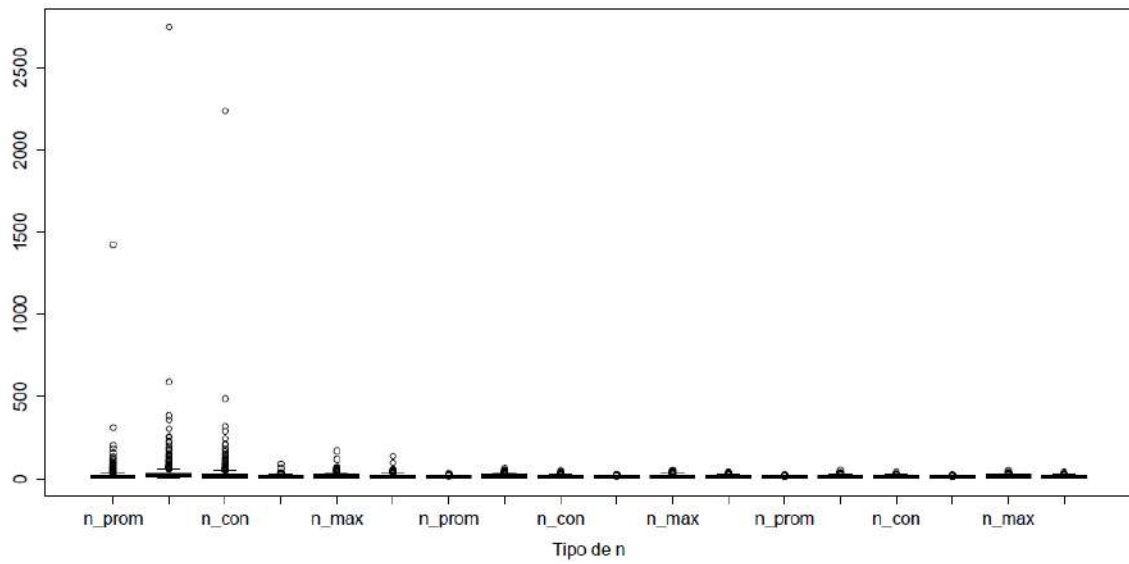


Figura B.22: Gráficos de caja para los tamaños de muestra promedio, máximo y conjunto correspondientes a la cota 1

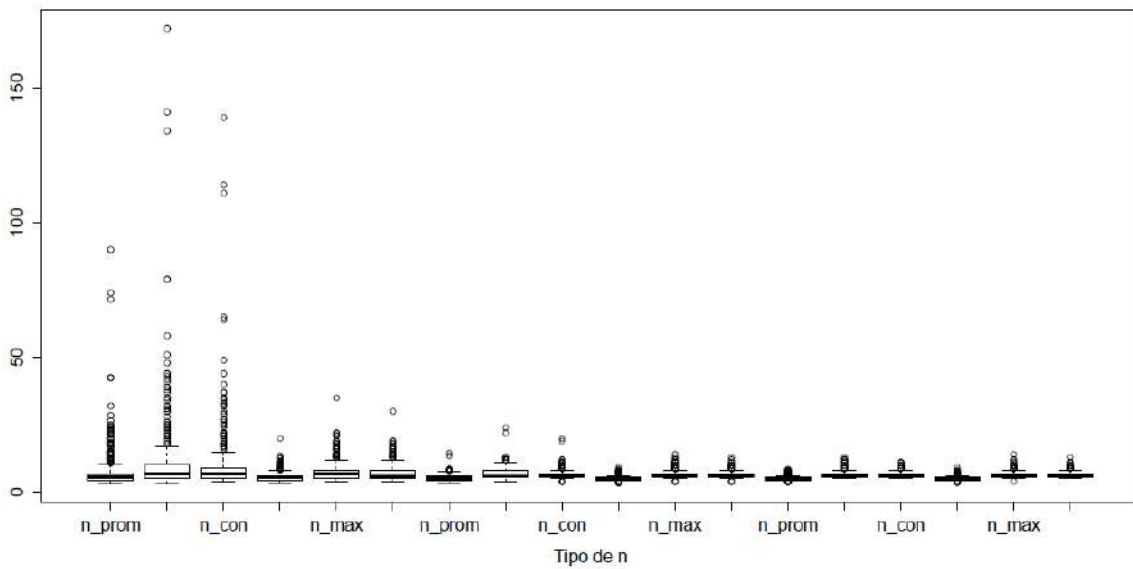


Figura B.23: Gráficos de caja para los tamaños de muestra promedio, máximo y conjunto correspondientes a la cota 2

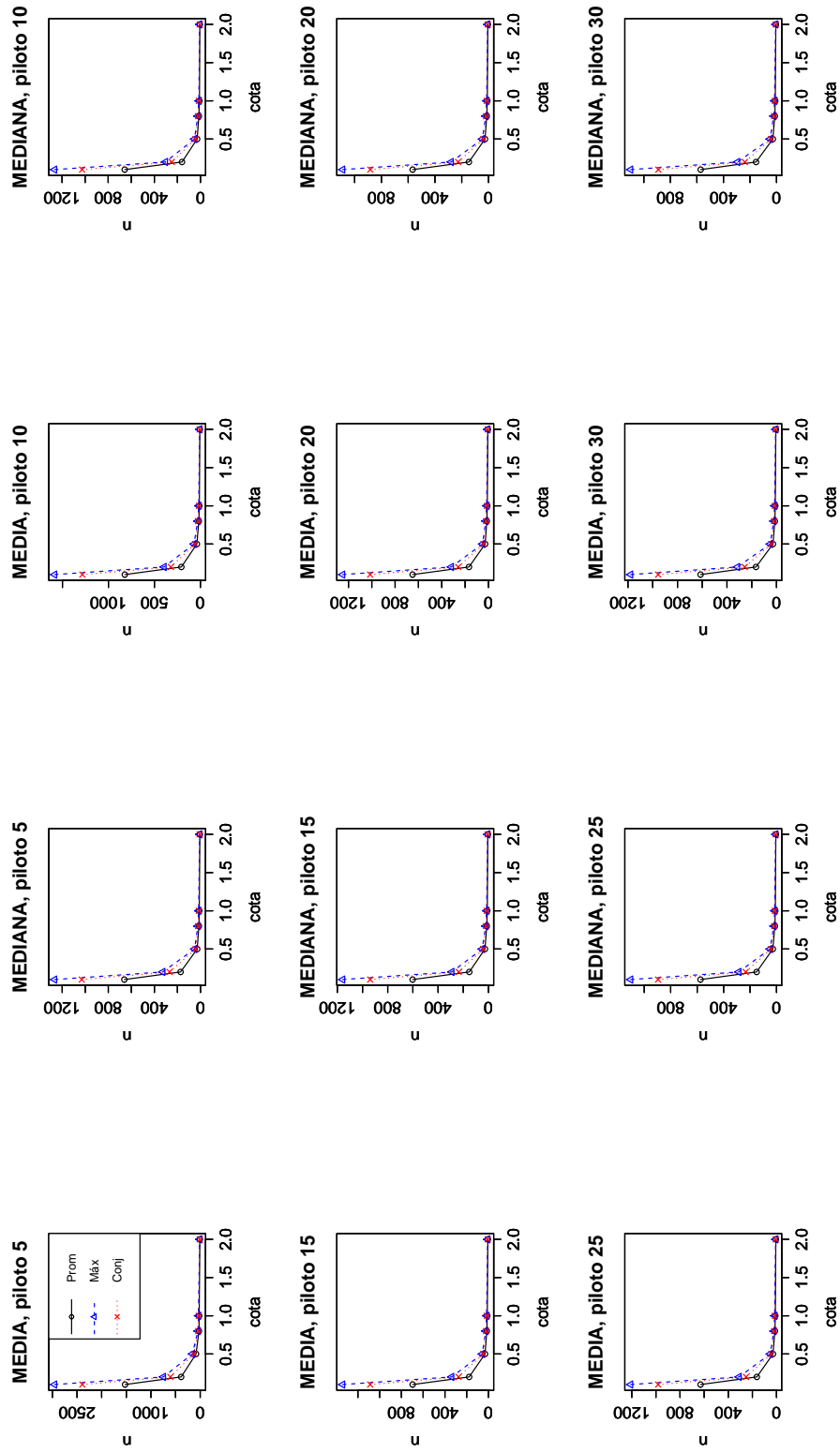


Figura B.24: Medias y medianas aumentando la cota, $R^2 = 0.90$

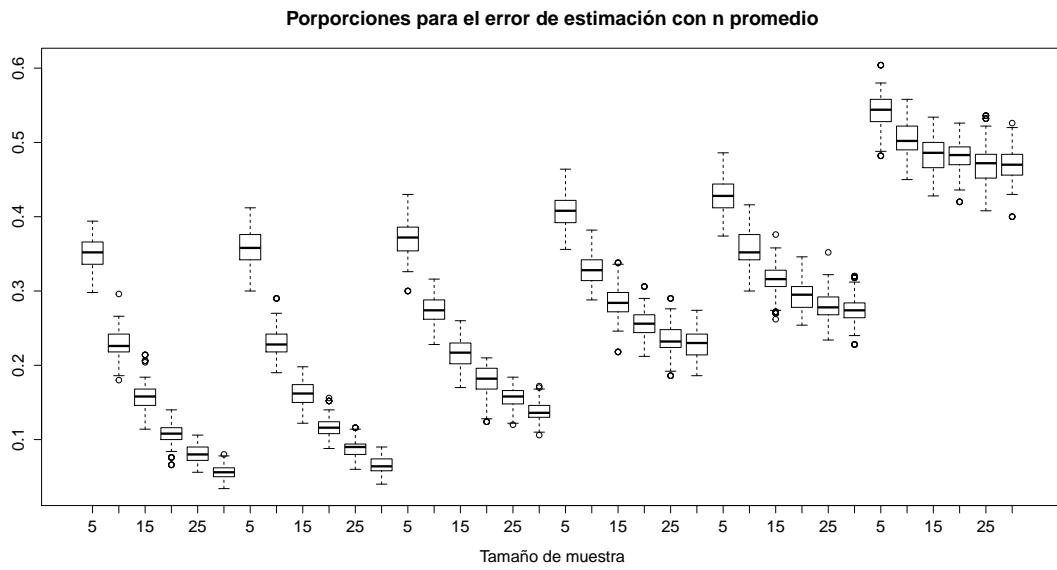


Figura B.25: Gráficos de caja para la eficiencia del error de estimación del método promedio, $R^2 = 0.90$

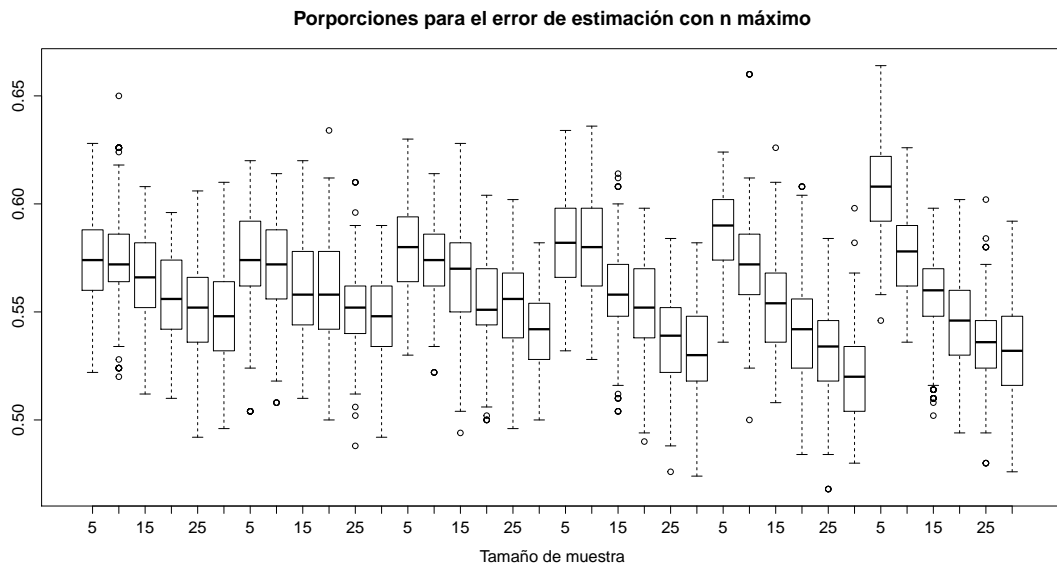


Figura B.26: Gráficos de caja para la eficiencia del error de estimación del método máximo, $R^2 = 0.90$

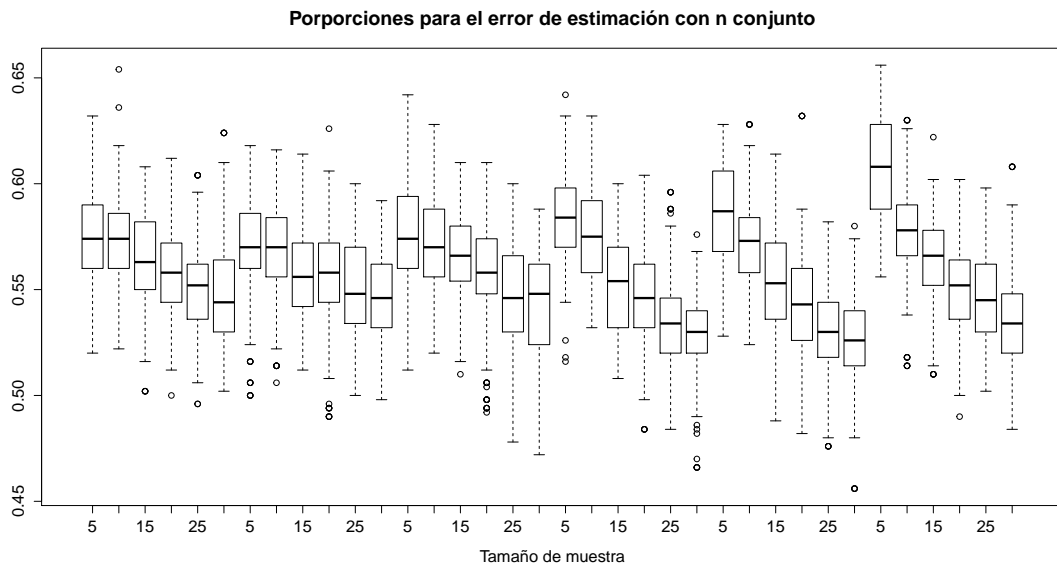


Figura B.27: Gráficos de caja para la eficiencia del error de estimación del método conjunto, $R^2 = 0.90$

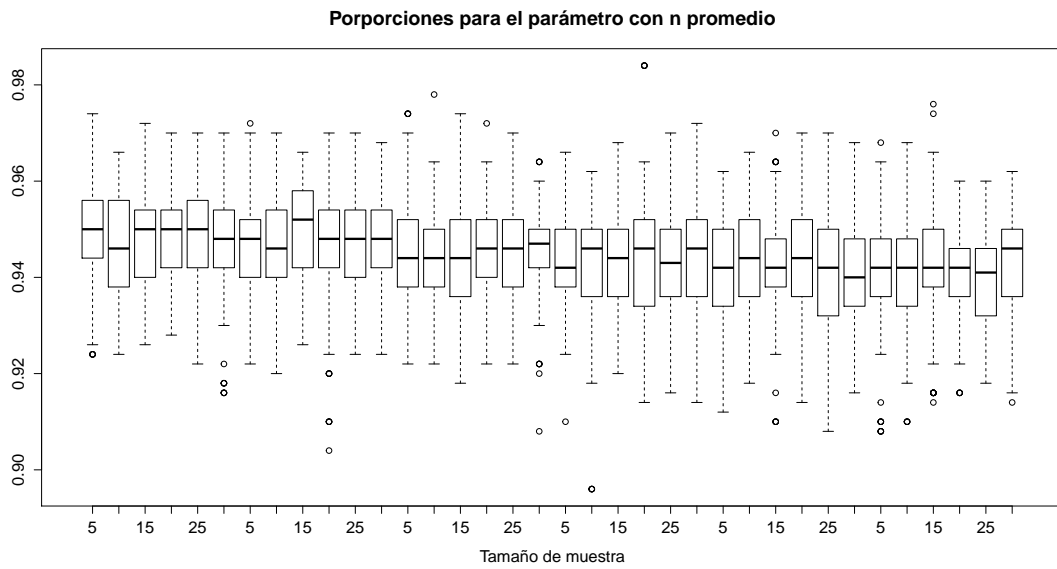


Figura B.28: Gráficos de caja para la eficiencia del parámetro del método promedio, $R^2 = 0.90$

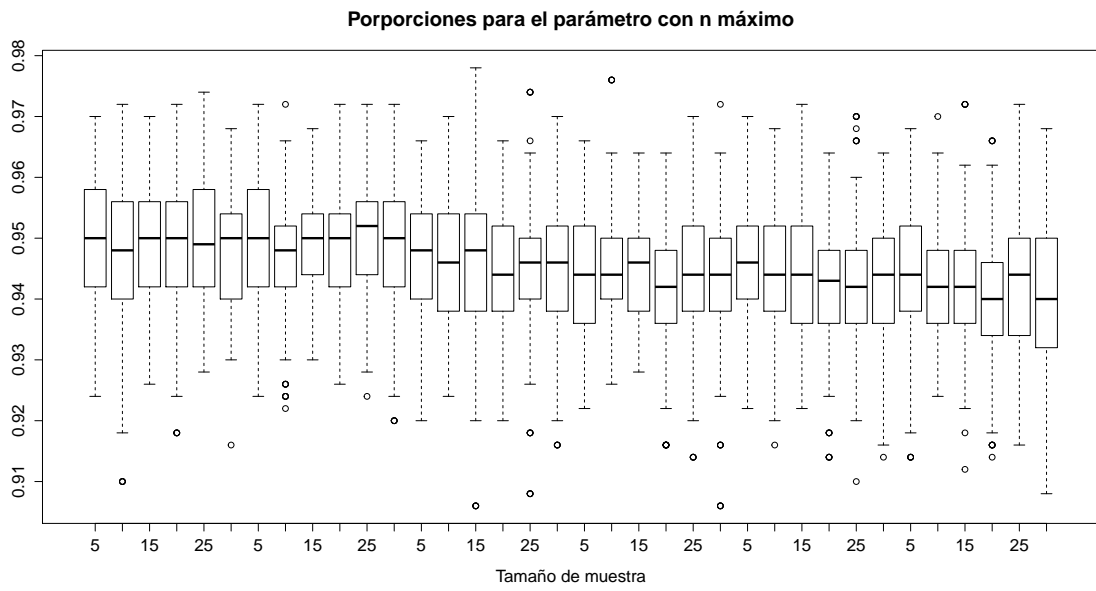


Figura B.29: Gráficos de caja para la eficiencia del parámetro del método máximo, $R^2 = 0.90$

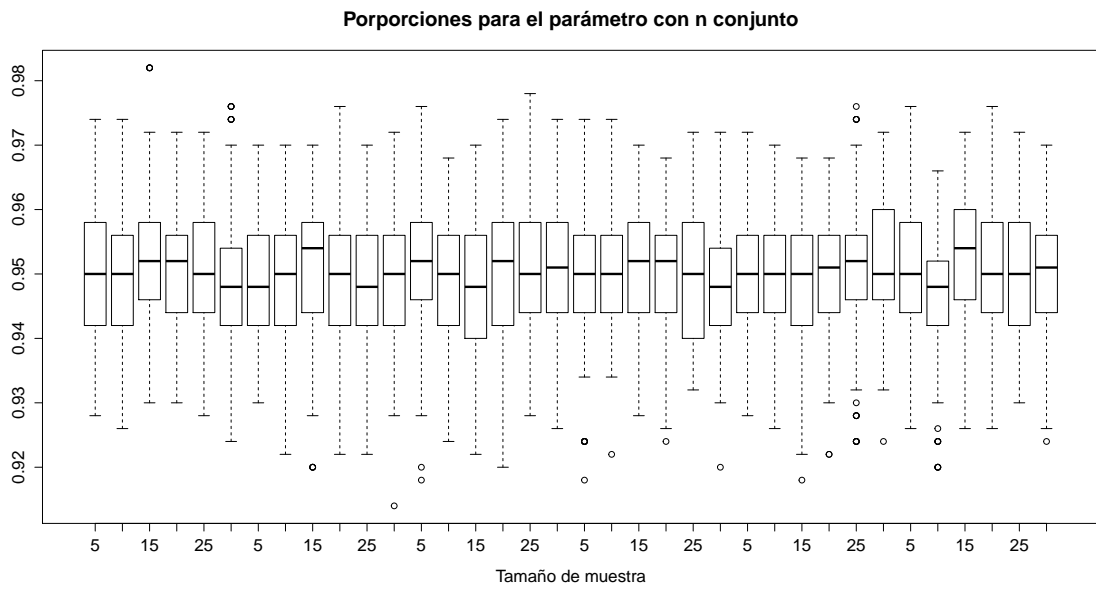


Figura B.30: Gráficos de caja para la eficiencia del parámetro del método conjunto, $R^2 = 0.90$

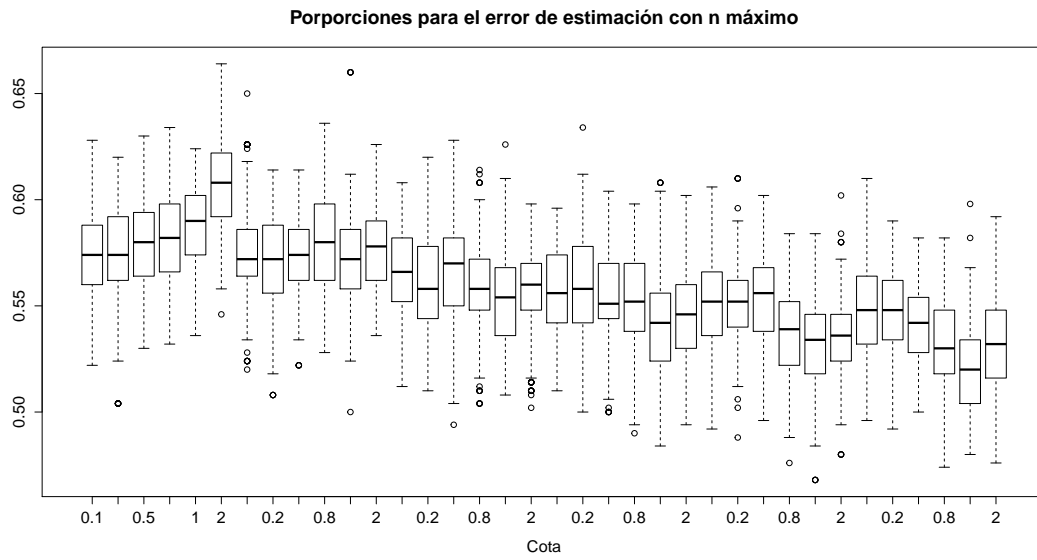


Figura B.31: Gráficos de caja para la eficiencia del error de estimación del método máximo aumentando la cota, $R^2 = 0.90$

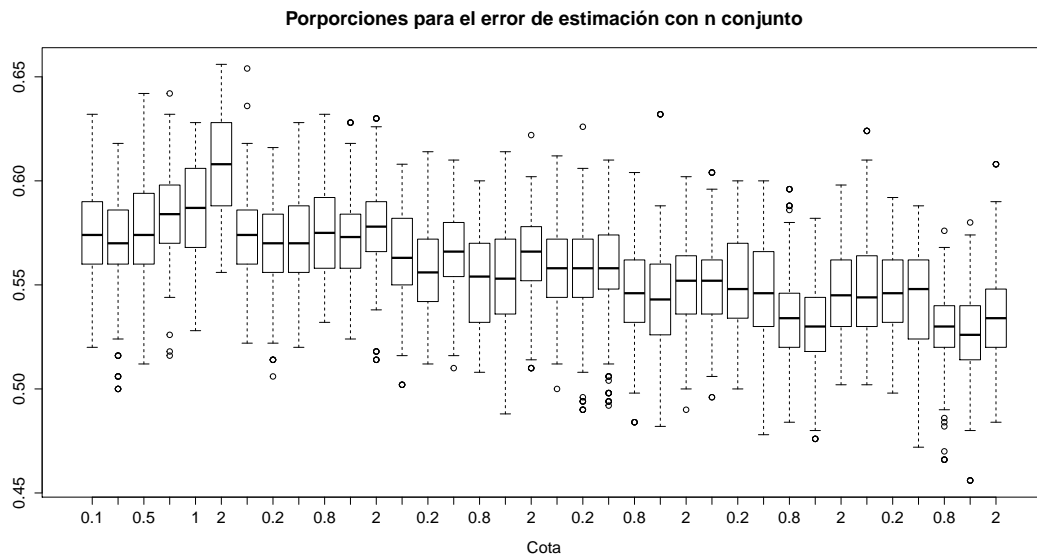


Figura B.32: Gráficos de caja para la eficiencia del error de estimación del método conjunto aumentando la cota, $R^2 = 0.90$

		5		10		15		20		25		30	
		p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}
0.1	MEDIA	0.351	0.950	0.228	0.946	0.159	0.948	0.108	0.949	0.081	0.948	0.056	0.947
	MEDIANA	0.352	0.95	0.226	0.946	0.158	0.95	0.108	0.95	0.08	0.95	0.056	0.948
0.2	MEDIA	0.355	0.947	0.229	0.946	0.162	0.950	0.117	0.947	0.088	0.947	0.066	0.948
	MEDIANA	0.358	0.948	0.228	0.946	0.162	0.952	0.116	0.948	0.09	0.948	0.064	0.948
0.5	MEDIA	0.370	0.945	0.274	0.943	0.216	0.945	0.180	0.945	0.157	0.945	0.139	0.946
	MEDIANA	0.372	0.944	0.274	0.944	0.217	0.944	0.182	0.946	0.158	0.946	0.136	0.947
0.8	MEDIA	0.408	0.944	0.329	0.943	0.283	0.943	0.254	0.944	0.235	0.943	0.228	0.944
	MEDIANA	0.408	0.942	0.328	0.946	0.284	0.944	0.256	0.946	0.232	0.943	0.23	0.946
1	MEDIA	0.428	0.942	0.356	0.944	0.316	0.943	0.294	0.943	0.279	0.941	0.274	0.941
	MEDIANA	0.428	0.942	0.352	0.944	0.316	0.942	0.295	0.944	0.278	0.942	0.274	0.94
2	MEDIA	0.543	0.941	0.505	0.941	0.484	0.942	0.481	0.941	0.472	0.940	0.470	0.943
	MEDIANA	0.544	0.942	0.502	0.942	0.486	0.942	0.483	0.942	0.472	0.941	0.47	0.946

Cuadro B.19: Eficiencia media y mediana del método promedio, $R^2 = 0.90$

		5		10		15		20		25		30	
		p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}
0.1	MEDIA	0.575	0.950	0.574	0.948	0.566	0.950	0.557	0.948	0.551	0.950	0.550	0.948
	MEDIANA	0.574	0.95	0.572	0.948	0.566	0.95	0.556	0.95	0.552	0.949	0.548	0.95
0.2	MEDIA	0.574	0.949	0.571	0.947	0.560	0.950	0.560	0.949	0.551	0.950	0.546	0.949
	MEDIANA	0.574	0.95	0.572	0.948	0.558	0.95	0.558	0.95	0.552	0.952	0.548	0.95
0.5	MEDIA	0.578	0.947	0.573	0.946	0.567	0.946	0.554	0.945	0.553	0.945	0.541	0.945
	MEDIANA	0.58	0.948	0.574	0.946	0.57	0.948	0.551	0.944	0.556	0.946	0.542	0.946
0.8	MEDIA	0.583	0.944	0.579	0.945	0.558	0.944	0.551	0.942	0.537	0.944	0.533	0.943
	MEDIANA	0.582	0.944	0.58	0.944	0.558	0.946	0.552	0.942	0.539	0.944	0.53	0.944
1	MEDIA	0.587	0.946	0.572	0.945	0.554	0.944	0.543	0.942	0.531	0.942	0.521	0.943
	MEDIANA	0.59	0.946	0.572	0.944	0.554	0.944	0.542	0.943	0.534	0.942	0.52	0.944
2	MEDIA	0.608	0.944	0.579	0.942	0.558	0.943	0.546	0.940	0.536	0.942	0.531	0.940
	MEDIANA	0.608	0.944	0.578	0.942	0.56	0.942	0.546	0.94	0.536	0.944	0.532	0.94

Cuadro B.20: Eficiencia media y mediana del método máximo, $R^2 = 0.90$

		5		10		15		20		25		30	
		p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}
0.1	MEDIA	0.574	0.950	0.573	0.949	0.564	0.952	0.558	0.951	0.550	0.950	0.549	0.949
	MEDIANA	0.574	0.95	0.574	0.95	0.563	0.952	0.558	0.952	0.552	0.95	0.544	0.948
0.2	MEDIA	0.571	0.949	0.570	0.949	0.558	0.952	0.557	0.950	0.550	0.949	0.547	0.950
	MEDIANA	0.57	0.948	0.57	0.95	0.556	0.954	0.558	0.95	0.548	0.948	0.546	0.95
0.5	MEDIA	0.576	0.951	0.573	0.949	0.564	0.948	0.558	0.950	0.547	0.951	0.543	0.951
	MEDIANA	0.574	0.952	0.57	0.95	0.566	0.948	0.558	0.952	0.546	0.95	0.548	0.951
0.8	MEDIA	0.584	0.950	0.576	0.950	0.552	0.952	0.545	0.950	0.533	0.950	0.530	0.947
	MEDIANA	0.584	0.95	0.575	0.95	0.554	0.952	0.546	0.952	0.534	0.95	0.53	0.948
1	MEDIA	0.586	0.950	0.573	0.950	0.554	0.949	0.543	0.950	0.530	0.951	0.526	0.951
	MEDIANA	0.587	0.95	0.573	0.95	0.553	0.95	0.543	0.951	0.53	0.952	0.526	0.95
2	MEDIA	0.608	0.951	0.578	0.947	0.564	0.952	0.549	0.951	0.546	0.950	0.536	0.950
	MEDIANA	0.608	0.95	0.578	0.948	0.566	0.954	0.552	0.95	0.545	0.95	0.534	0.951

Cuadro B.21: Eficiencia media y mediana del método conjunto, $R^2 = 0.90$

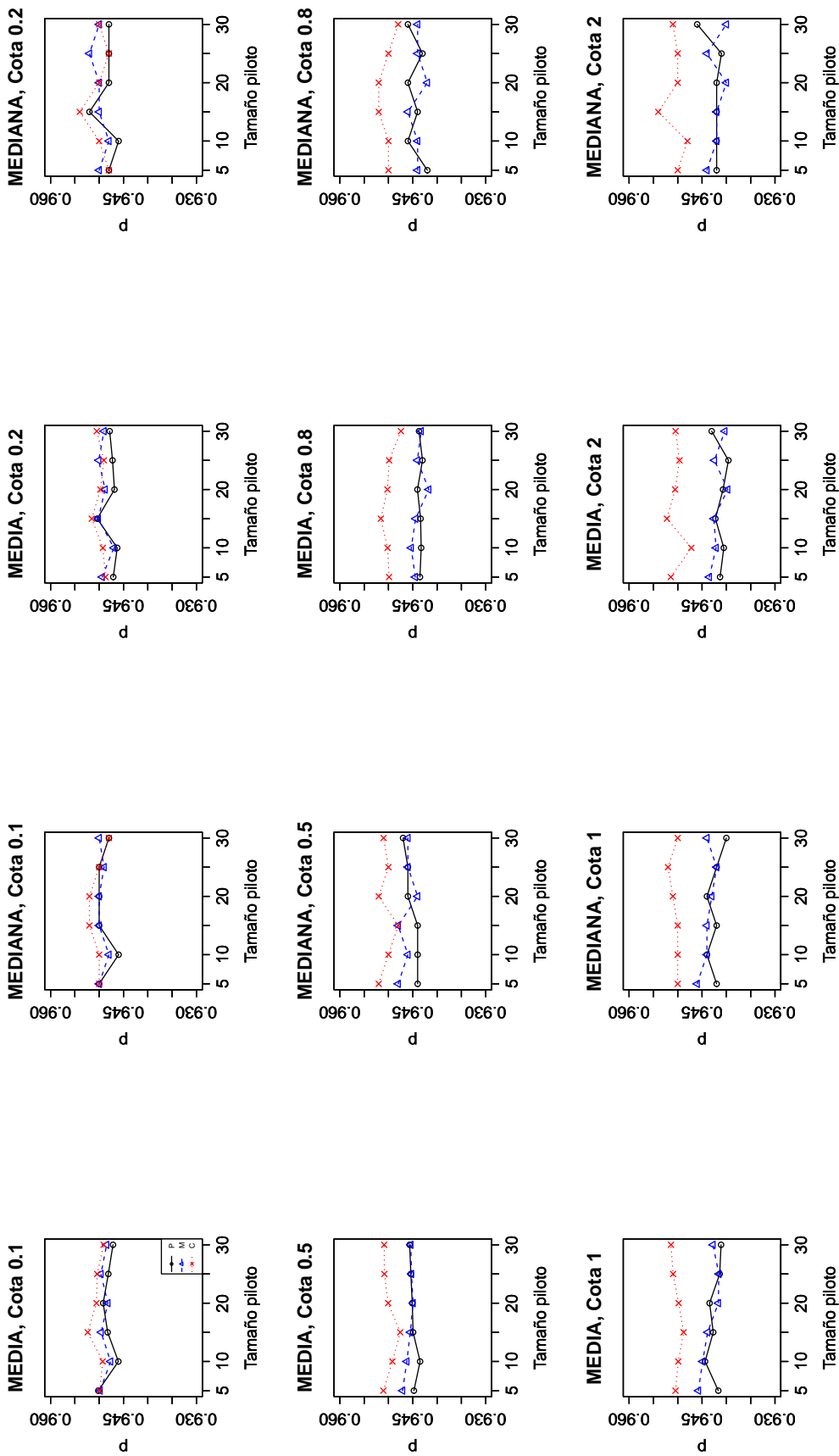


Figura B.33: Media y mediana de la eficiencia del parámetro, $R^2 = 0.90$

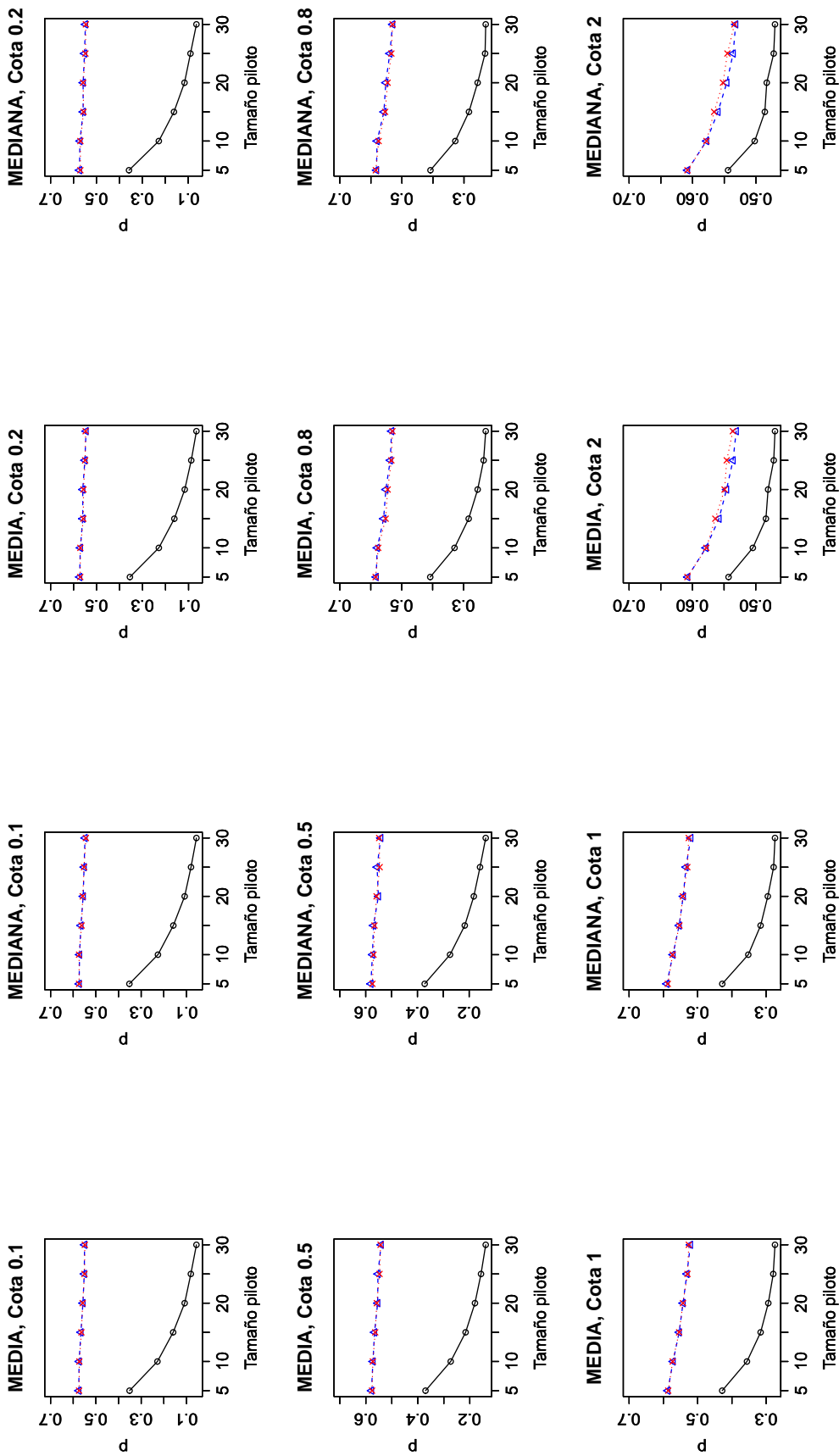


Figura B.34: Media y mediana de la eficiencia de estimación, $R^2 = 0.90$

B.3. $R^2 = 0.95$

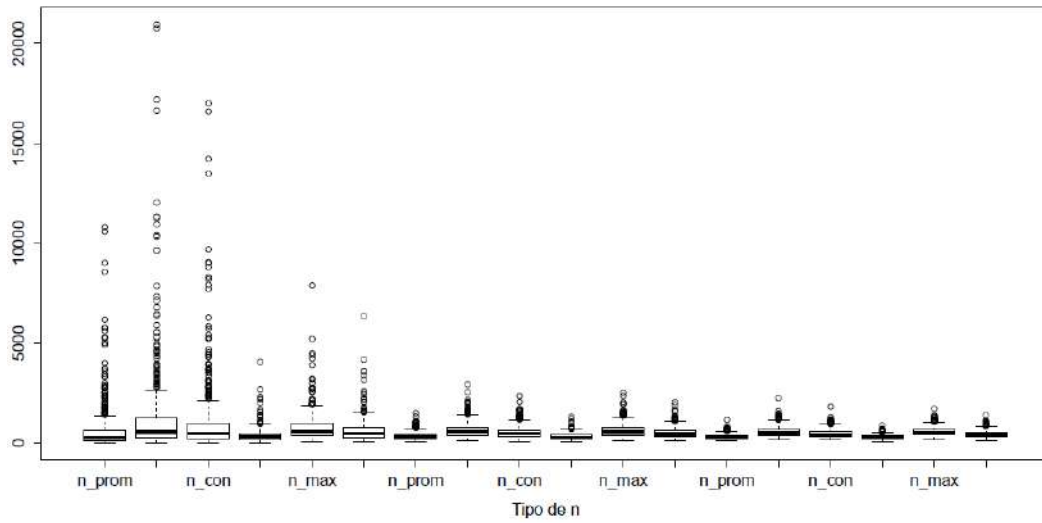


Figura B.35: Gráficos de caja para los tamaños de muestra promedio, máximo y conjunto correspondientes a la cota 0.1

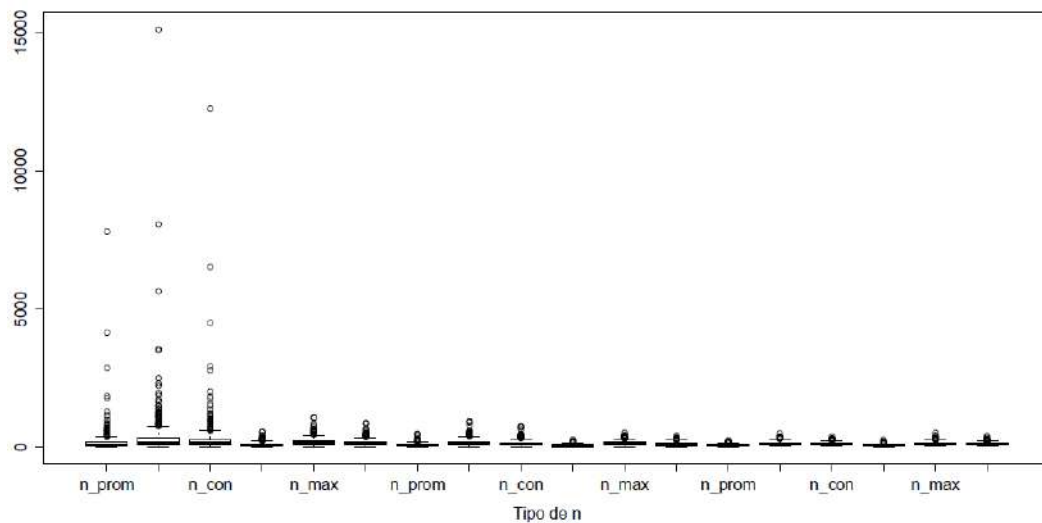


Figura B.36: Gráficos de caja para los tamaños de muestra promedio, máximo y conjunto correspondientes a la cota 0.2

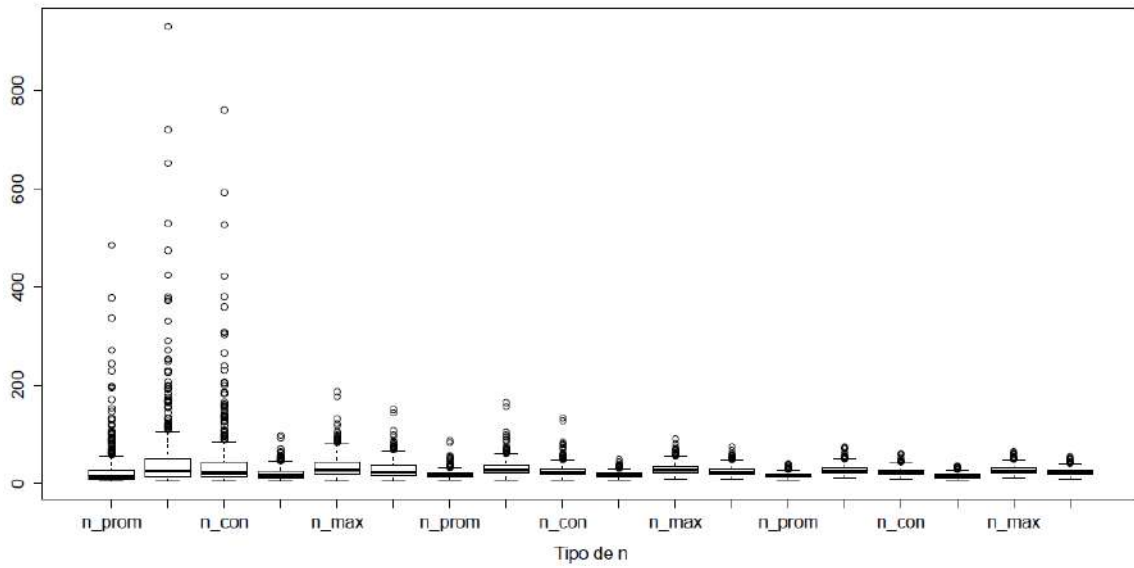


Figura B.37: Gráficos de caja para los tamaños de muestra promedio, máximo y conjunto correspondientes a la cota 0.5

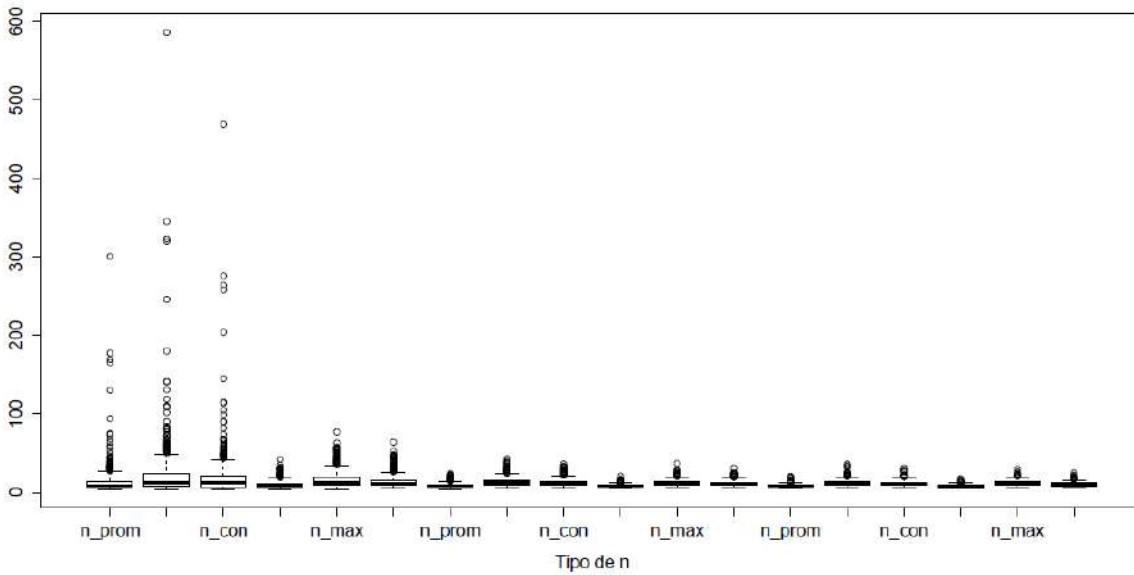


Figura B.38: Gráficos de caja para los tamaños de muestra promedio, máximo y conjunto correspondientes a la cota 0.8

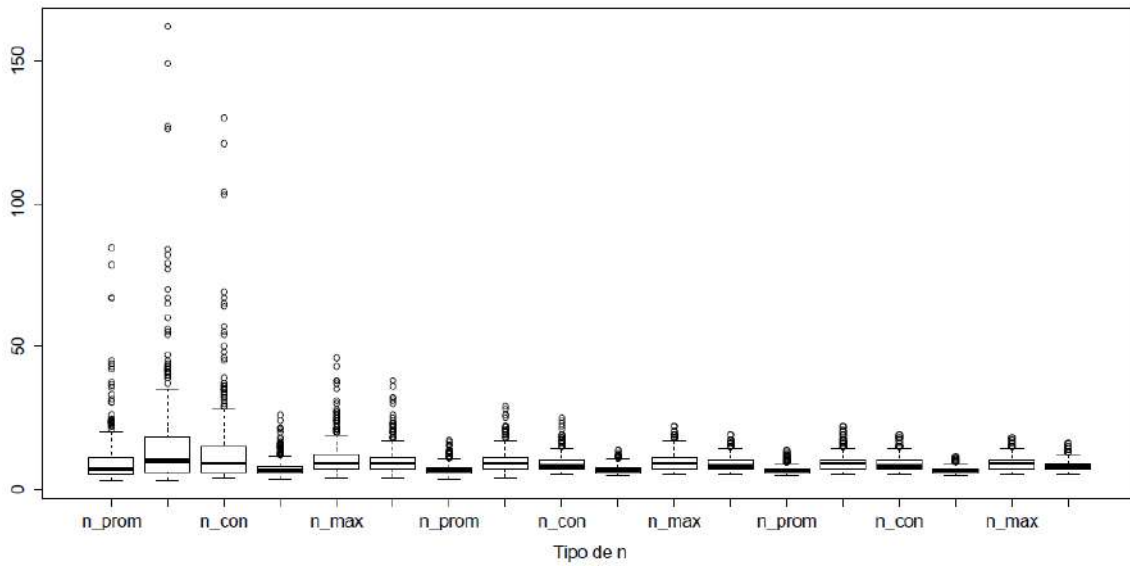


Figura B.39: Gráficos de caja para los tamaños de muestra promedio, máximo y conjunto correspondientes a la cota 1

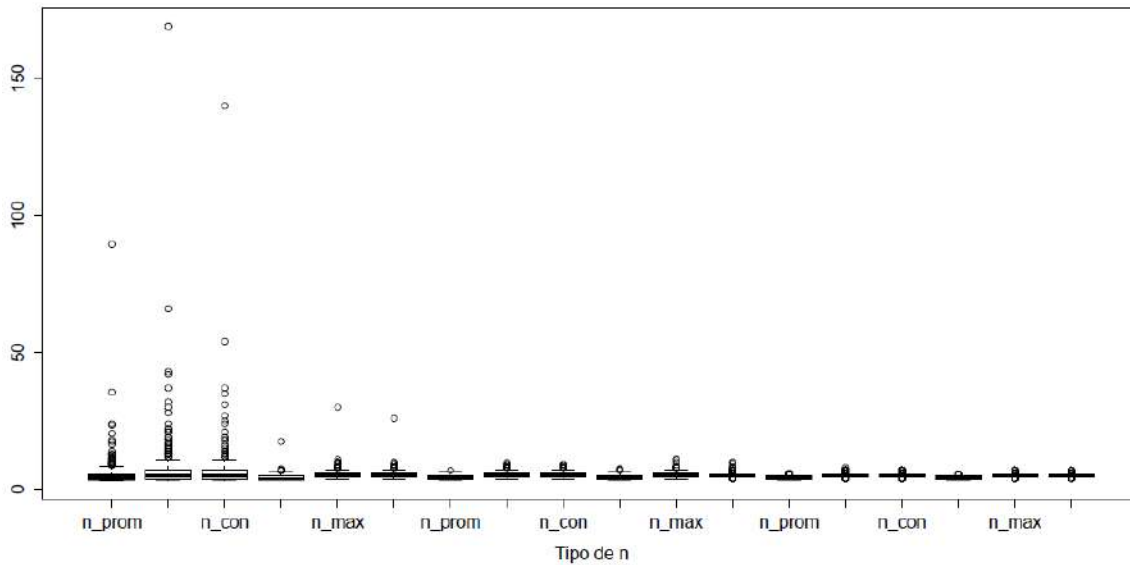


Figura B.40: Gráficos de caja para los tamaños de muestra promedio, máximo y conjunto correspondientes a la cota 2

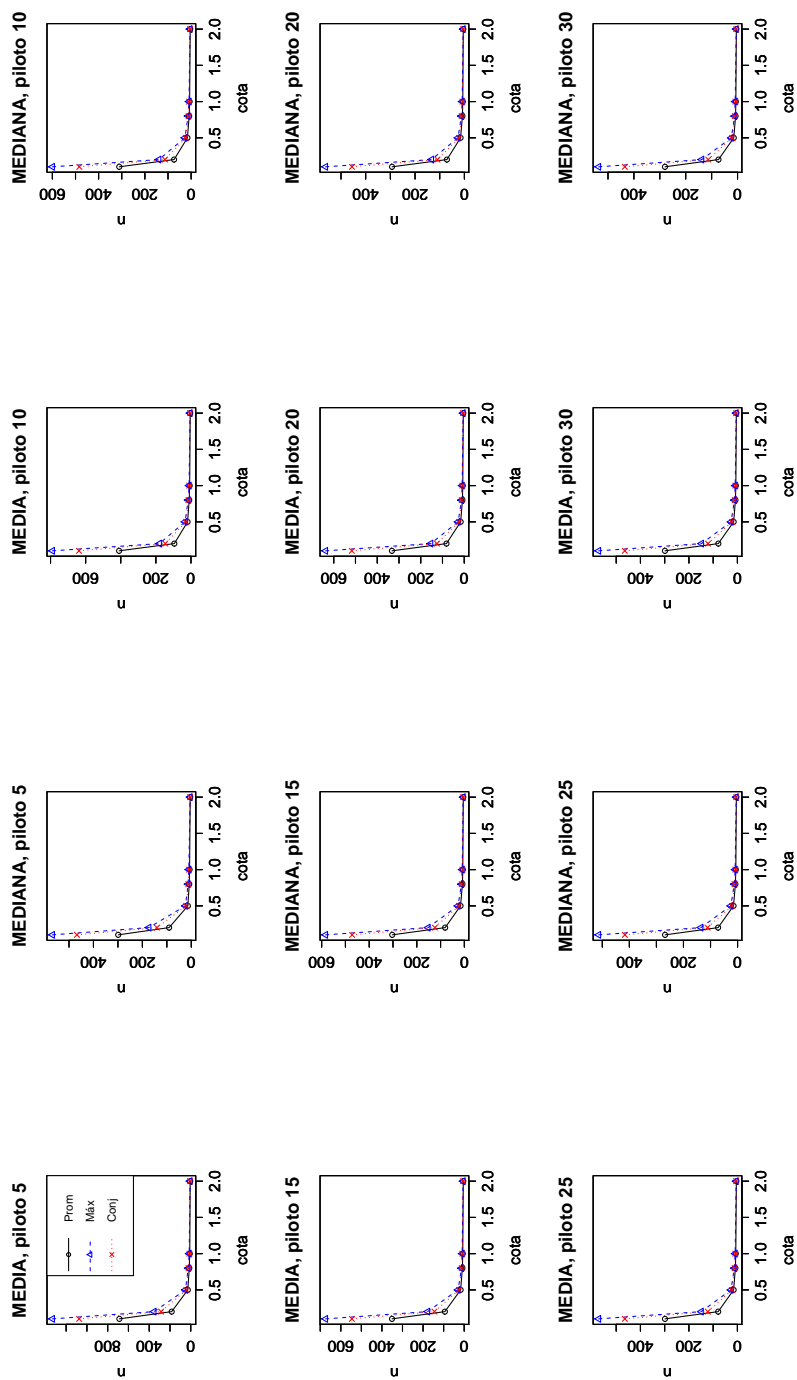


Figura B.41: Medias y medianas aumentando la cota, $R^2 = 0.95$

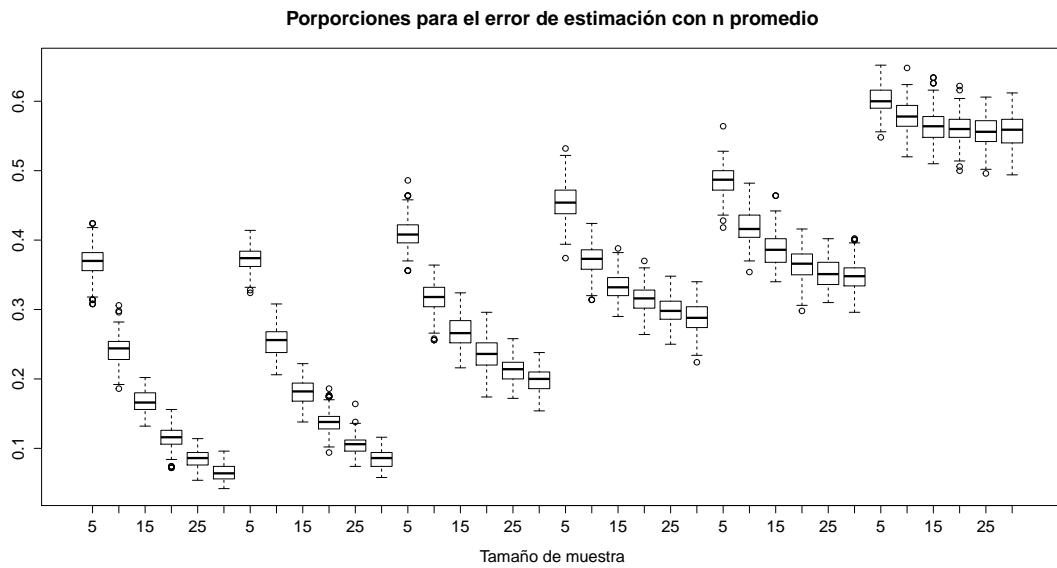


Figura B.42: Gráficos de caja para la eficiencia del error de estimación del método promedio, $R^2 = 0.95$

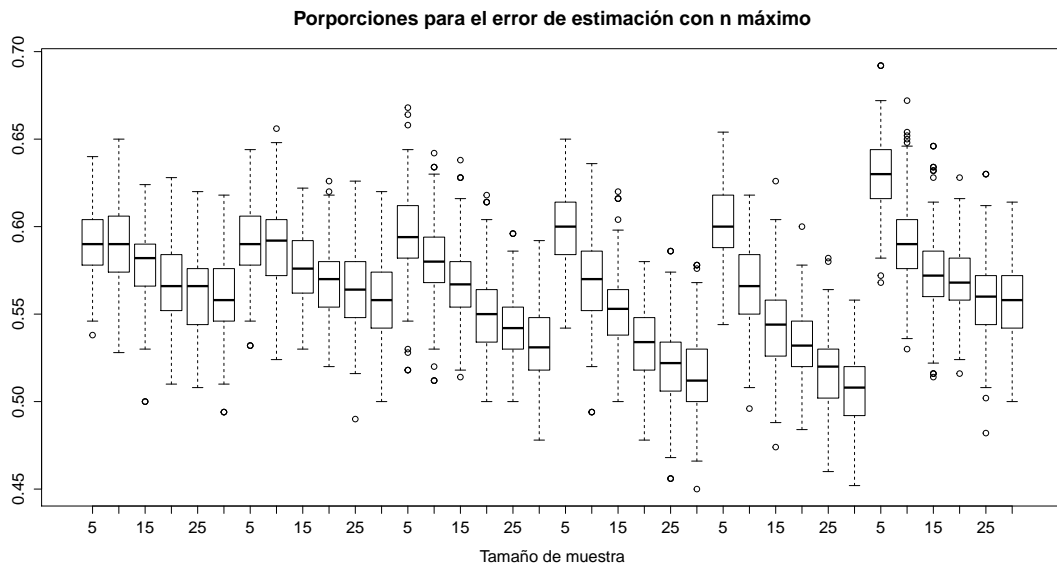


Figura B.43: Gráficos de caja para la eficiencia del error de estimación del método máximo, $R^2 = 0.95$

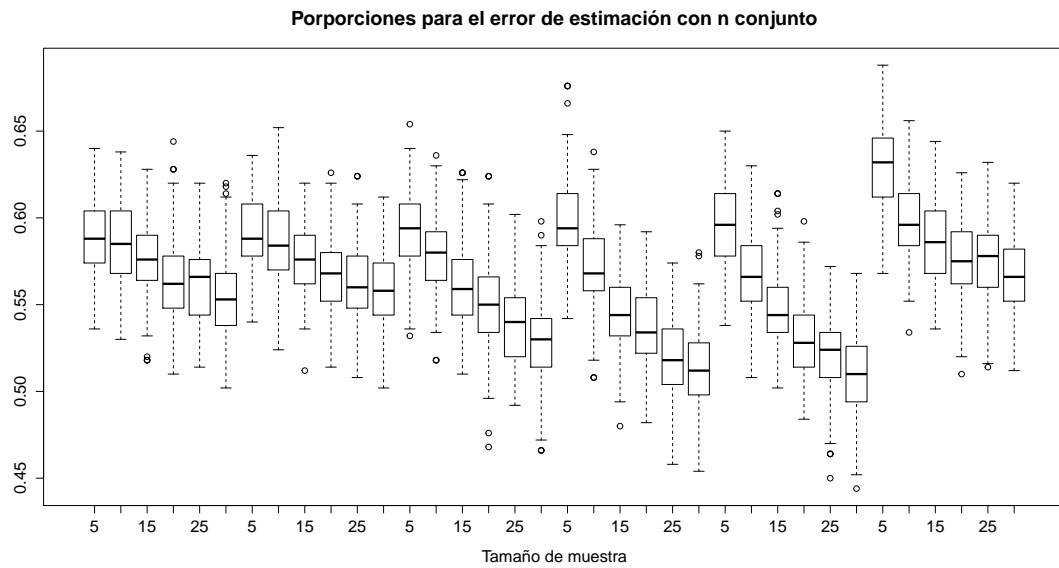


Figura B.44: Gráficos de caja para la eficiencia del error de estimación del método conjunto, $R^2 = 0.95$

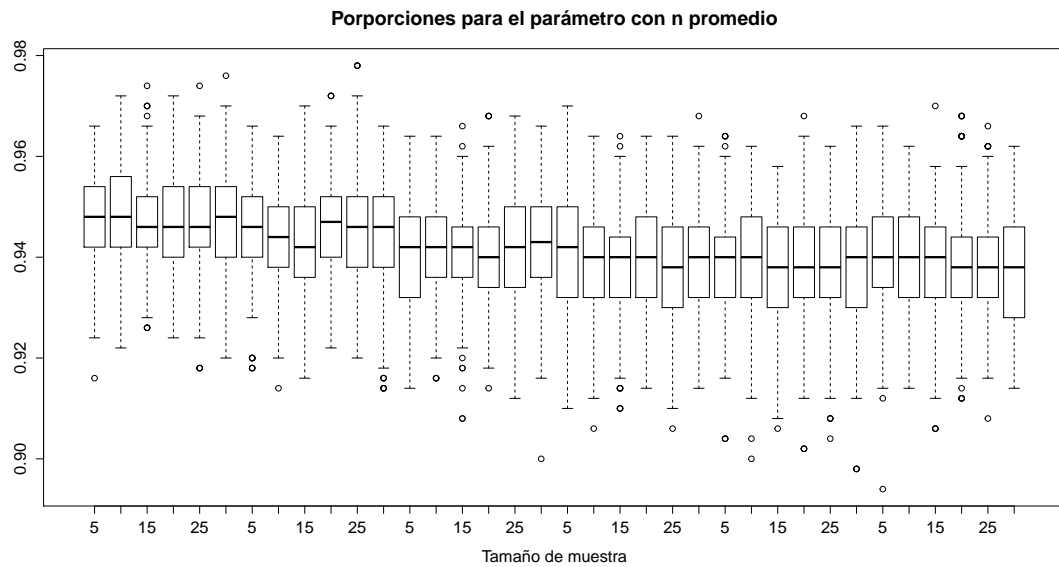


Figura B.45: Gráficos de caja para la eficiencia del parámetro del método promedio, $R^2 = 0.95$

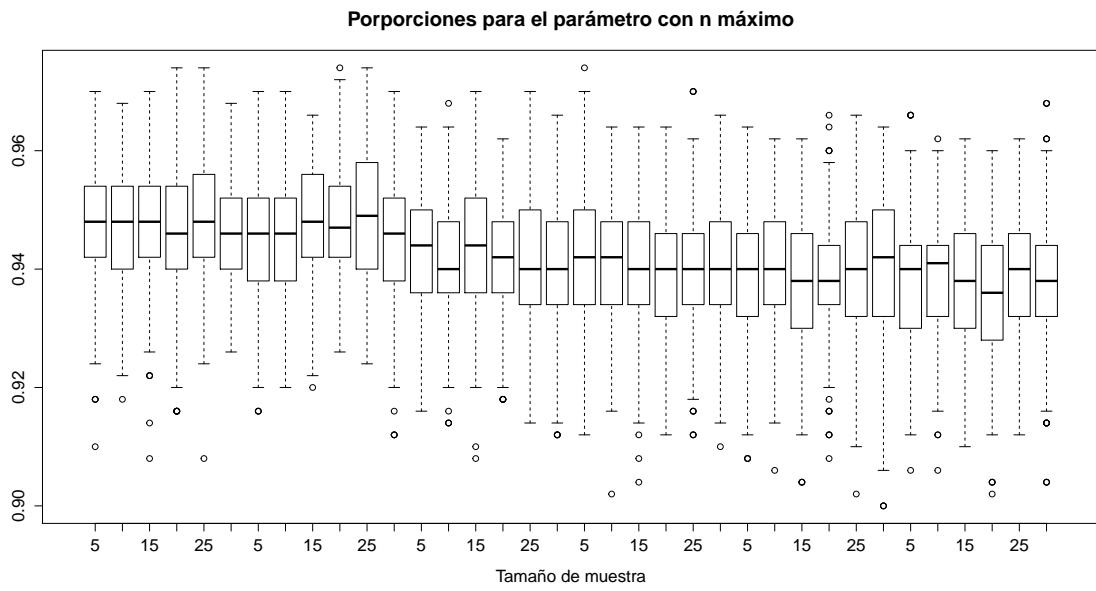


Figura B.46: Gráficos de caja para la eficiencia del parámetro del método máximo, $R^2 = 0.95$

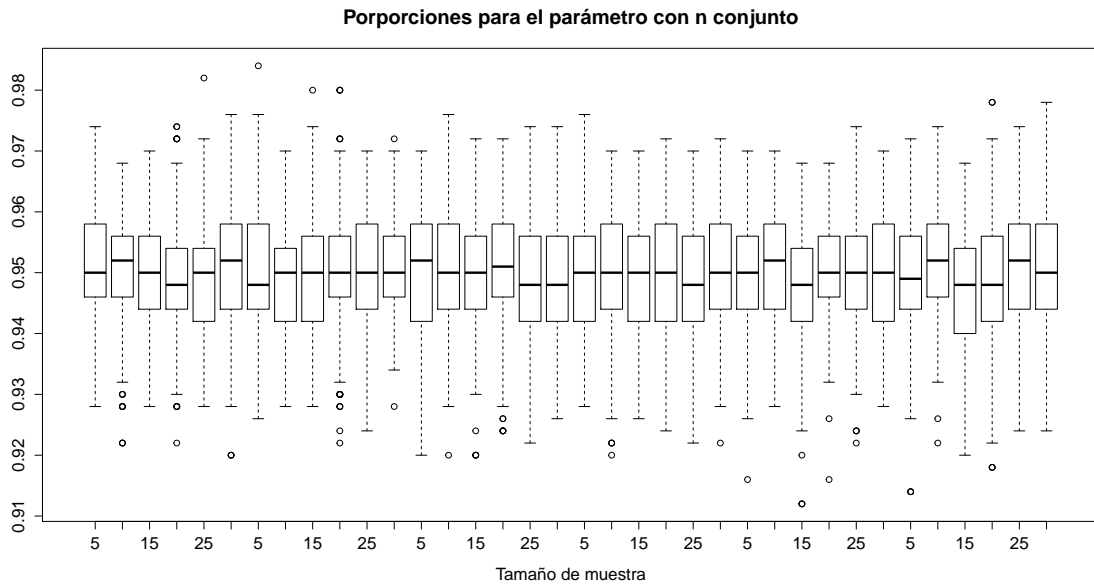


Figura B.47: Gráficos de caja para la eficiencia del parámetro del método conjunto, $R^2 = 0.95$

		5		10		15		20		25		30	
		p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}
0.1	MEDIA	0.368	0.947	0.242	0.948	0.167	0.947	0.115	0.947	0.086	0.946	0.065	0.948
	MEDIANA	0.37	0.948	0.244	0.948	0.166	0.946	0.116	0.946	0.086	0.946	0.064	0.948
0.2	MEDIA	0.373	0.945	0.254	0.944	0.182	0.944	0.138	0.946	0.105	0.945	0.085	0.945
	MEDIANA	0.374	0.946	0.256	0.944	0.182	0.942	0.138	0.947	0.106	0.946	0.086	0.946
0.5	MEDIA	0.410	0.941	0.317	0.942	0.267	0.941	0.235	0.940	0.213	0.942	0.198	0.943
	MEDIANA	0.408	0.942	0.318	0.942	0.266	0.942	0.236	0.94	0.214	0.942	0.2	0.943
0.8	MEDIA	0.455	0.941	0.372	0.939	0.333	0.938	0.316	0.940	0.299	0.937	0.288	0.939
	MEDIANA	0.454	0.942	0.373	0.94	0.332	0.94	0.316	0.94	0.298	0.938	0.288	0.94
1	MEDIA	0.485	0.938	0.418	0.940	0.387	0.938	0.366	0.938	0.352	0.938	0.348	0.939
	MEDIANA	0.487	0.94	0.416	0.94	0.386	0.938	0.366	0.938	0.351	0.938	0.348	0.94
2	MEDIA	0.603	0.940	0.580	0.940	0.564	0.938	0.561	0.938	0.557	0.938	0.557	0.937
	MEDIANA	0.6	0.94	0.578	0.94	0.564	0.94	0.56	0.938	0.556	0.938	0.559	0.938

Cuadro B.22: Eficiencia media y mediana del método promedio, $R^2 = 0.95$

		5		10		15		20		25		30	
		p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}
0.1	MEDIA	0.592	0.947	0.590	0.947	0.578	0.947	0.568	0.947	0.564	0.949	0.559	0.947
	MEDIANA	0.59	0.948	0.59	0.948	0.582	0.948	0.566	0.946	0.566	0.948	0.558	0.946
0.2	MEDIA	0.592	0.945	0.588	0.946	0.577	0.947	0.568	0.947	0.563	0.949	0.558	0.945
	MEDIANA	0.59	0.946	0.592	0.946	0.576	0.948	0.57	0.947	0.564	0.949	0.558	0.946
0.5	MEDIA	0.595	0.942	0.581	0.942	0.568	0.944	0.549	0.941	0.542	0.941	0.533	0.941
	MEDIANA	0.594	0.944	0.58	0.94	0.567	0.944	0.55	0.942	0.542	0.94	0.531	0.94
0.8	MEDIA	0.600	0.941	0.572	0.941	0.553	0.940	0.535	0.939	0.521	0.940	0.514	0.940
	MEDIANA	0.6	0.942	0.57	0.942	0.553	0.94	0.534	0.94	0.522	0.94	0.512	0.94
1	MEDIA	0.603	0.939	0.566	0.941	0.543	0.938	0.533	0.939	0.516	0.940	0.507	0.940
	MEDIANA	0.6	0.94	0.566	0.94	0.544	0.938	0.532	0.938	0.52	0.94	0.508	0.942
2	MEDIA	0.629	0.938	0.592	0.939	0.574	0.938	0.569	0.936	0.558	0.939	0.558	0.937
	MEDIANA	0.63	0.94	0.59	0.941	0.572	0.938	0.568	0.936	0.56	0.94	0.558	0.938

Cuadro B.23: Eficiencia media y mediana del método máximo, $R^2 = 0.95$

		5		10		15		20		25		30	
		p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}	p_{cota}	p_{param}
0.1	MEDIA	0.589	0.951	0.586	0.950	0.577	0.950	0.565	0.948	0.562	0.949	0.556	0.951
	MEDIANA	0.588	0.95	0.585	0.952	0.576	0.95	0.562	0.948	0.566	0.95	0.553	0.952
0.2	MEDIA	0.590	0.950	0.585	0.948	0.575	0.949	0.566	0.951	0.563	0.950	0.559	0.951
	MEDIANA	0.588	0.948	0.584	0.95	0.576	0.95	0.568	0.95	0.56	0.95	0.558	0.95
0.5	MEDIA	0.593	0.950	0.579	0.950	0.562	0.950	0.551	0.950	0.539	0.949	0.528	0.948
	MEDIANA	0.594	0.952	0.58	0.95	0.559	0.95	0.55	0.951	0.54	0.948	0.53	0.948
0.8	MEDIA	0.598	0.949	0.571	0.950	0.545	0.949	0.537	0.950	0.519	0.948	0.513	0.950
	MEDIANA	0.594	0.95	0.568	0.95	0.544	0.95	0.534	0.95	0.518	0.948	0.512	0.95
1	MEDIA	0.595	0.949	0.568	0.952	0.547	0.947	0.529	0.950	0.521	0.950	0.509	0.950
	MEDIANA	0.596	0.95	0.566	0.952	0.544	0.948	0.528	0.95	0.524	0.95	0.51	0.95
2	MEDIA	0.629	0.949	0.599	0.952	0.586	0.948	0.577	0.948	0.574	0.952	0.566	0.950
	MEDIANA	0.632	0.949	0.596	0.952	0.586	0.948	0.575	0.948	0.578	0.952	0.566	0.95

Cuadro B.24: Eficiencia media y mediana del método conjunto, $R^2 = 0.95$

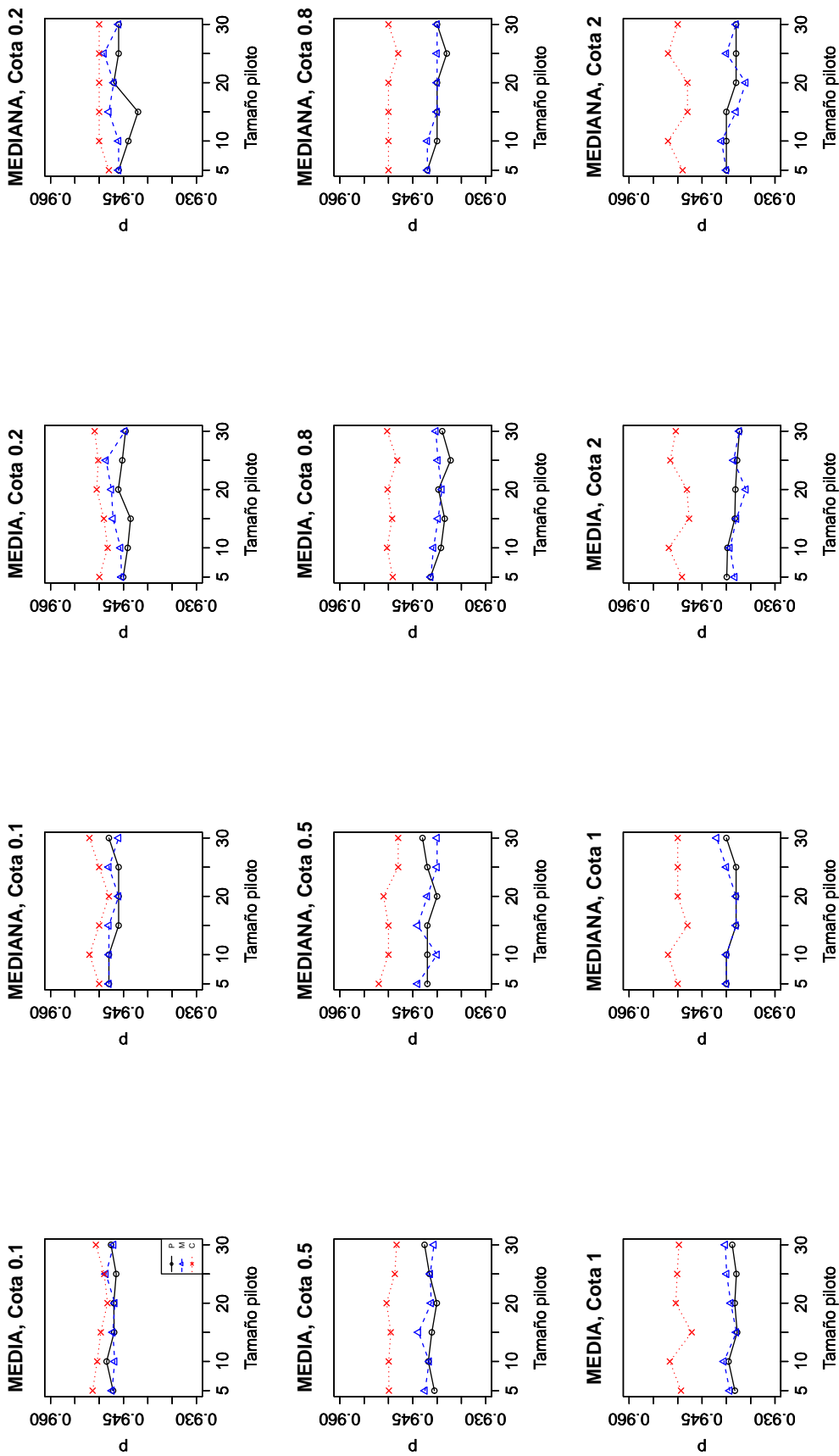


Figura B.48: Media y mediana de la eficiencia del parámetro, $R^2 = 0.95$

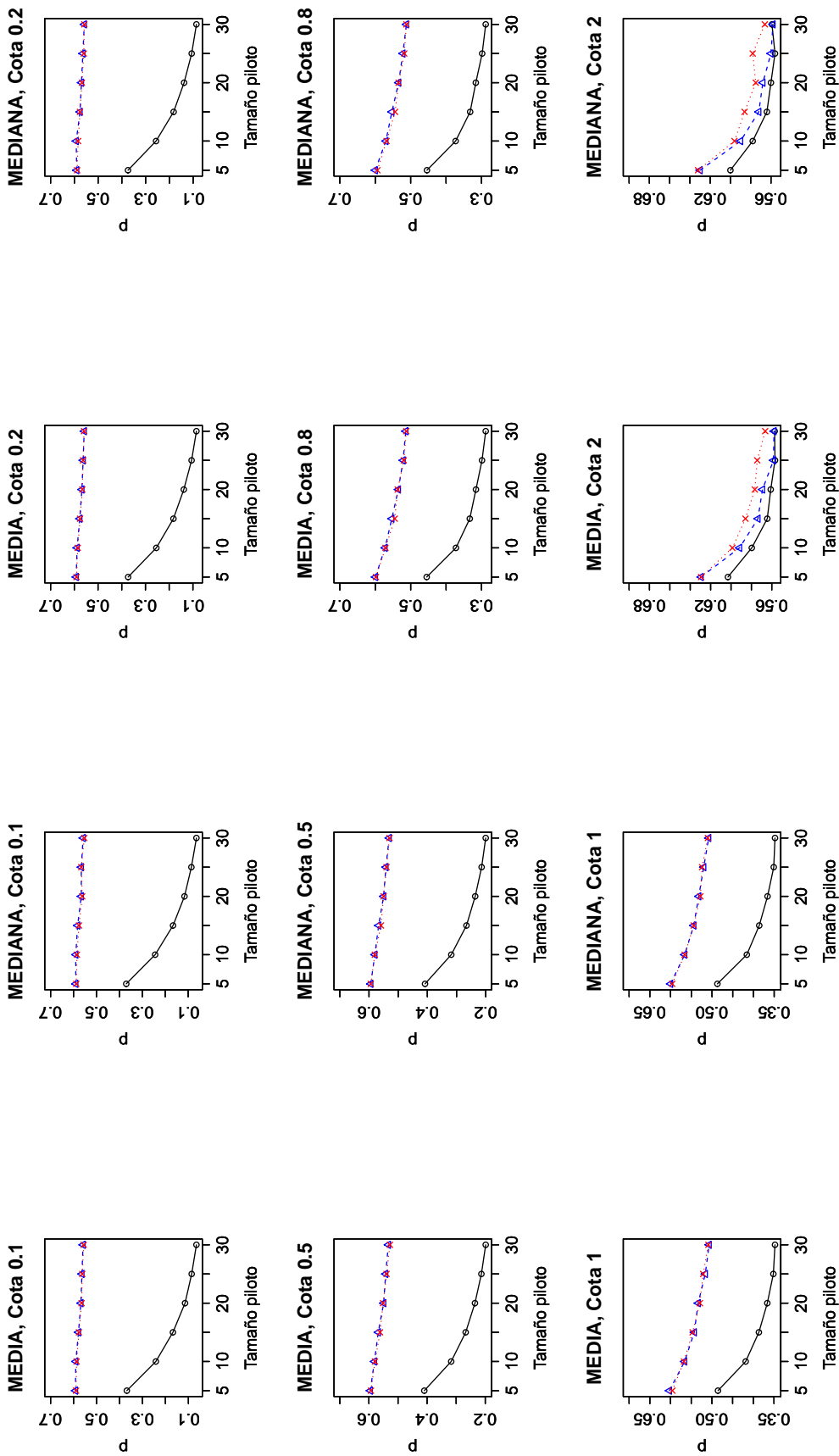


Figura B.49: Media y mediana de la eficiencia de la estimación, $R^2 = 0.95$

B.4. Comparaciones de R^2

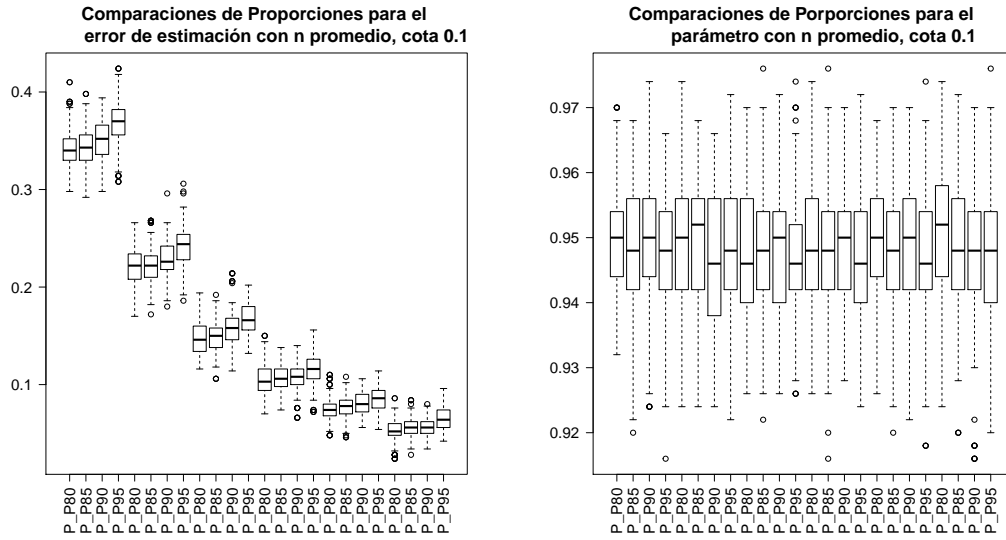


Figura B.50: Gráficos de caja para la eficiencia comparando R^2 , cota 0.1

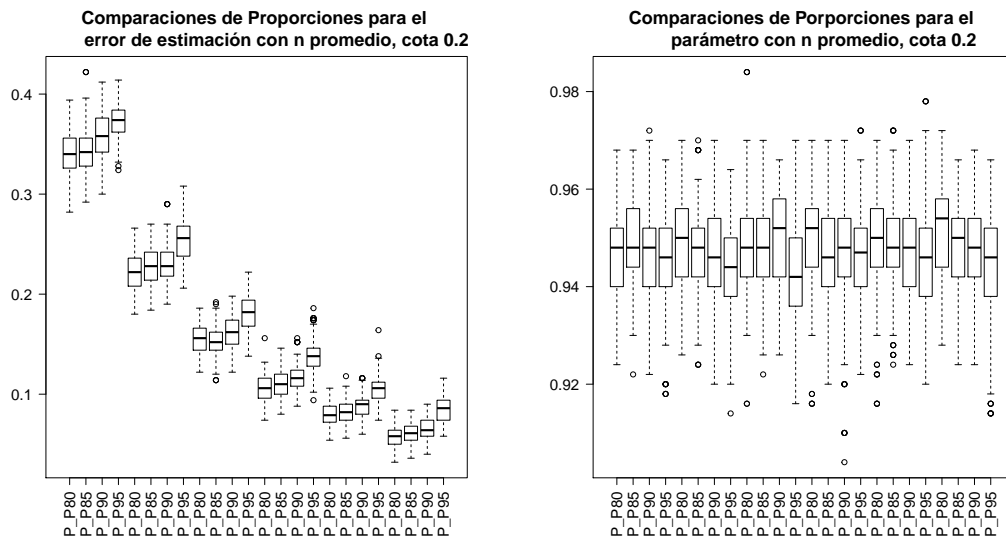


Figura B.51: Gráficos de caja para la eficiencia comparando R^2 , cota 0.2

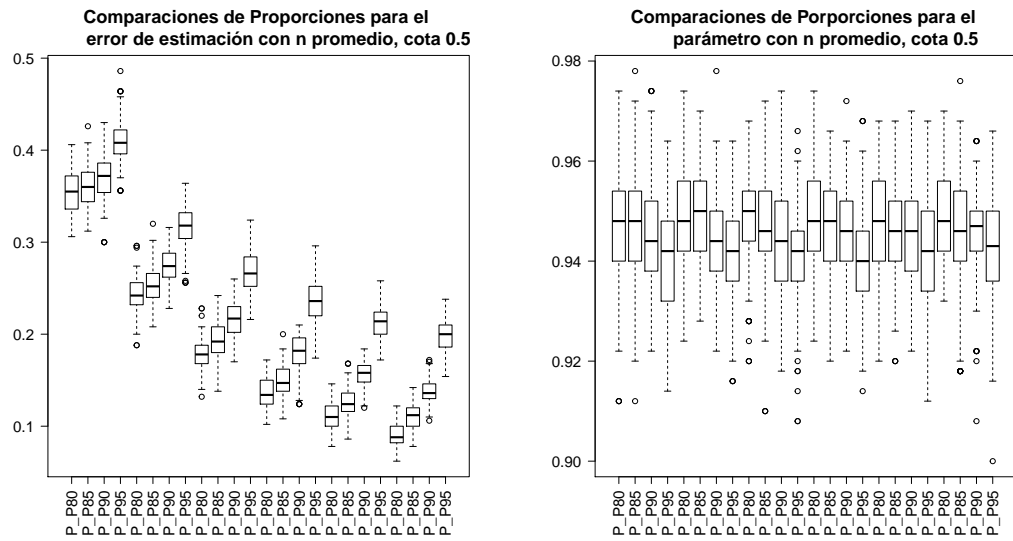


Figura B.52: Gráficos de caja para la eficiencia comparando R^2 , cota 0.5

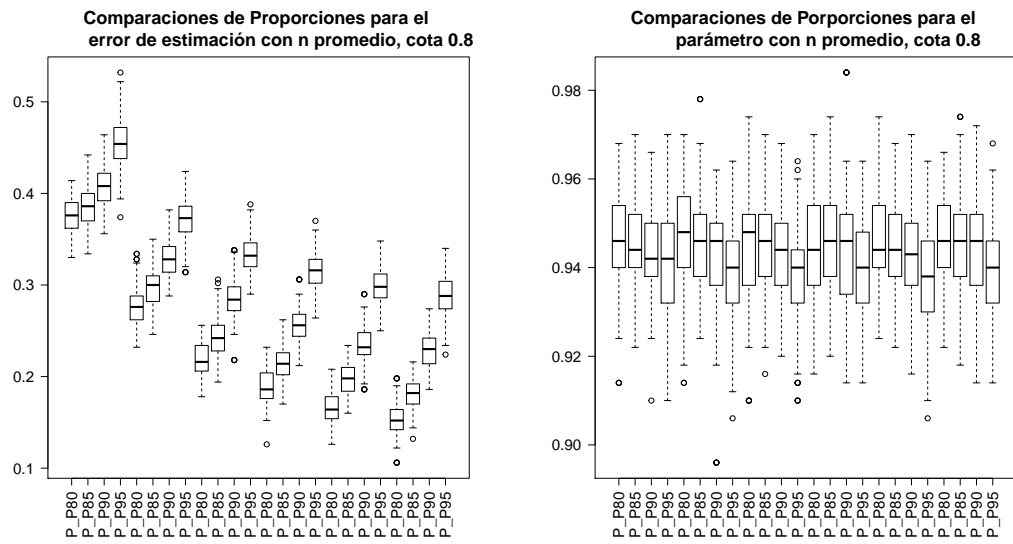


Figura B.53: Gráficos de caja para la eficiencia comparando R^2 , cota 0.8

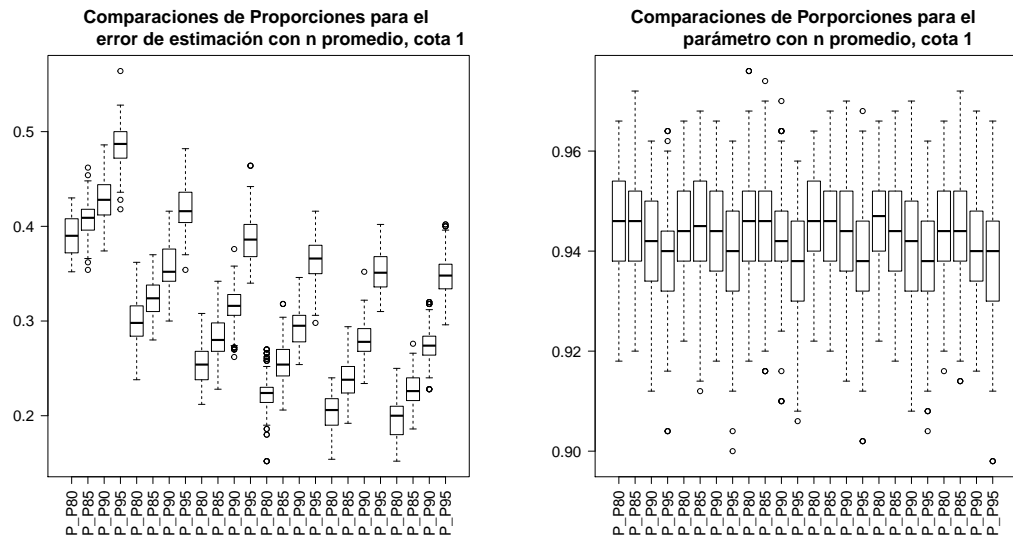


Figura B.54: Gráficos de caja para la eficiencia comparando R^2 , cota 1

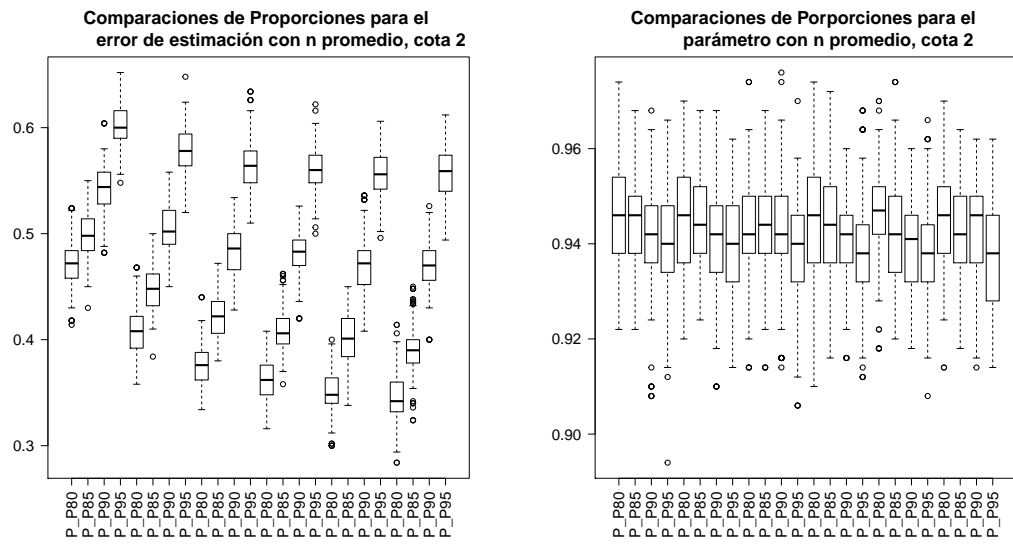


Figura B.55: Gráficos de caja para la eficiencia comparando R^2 , cota 2

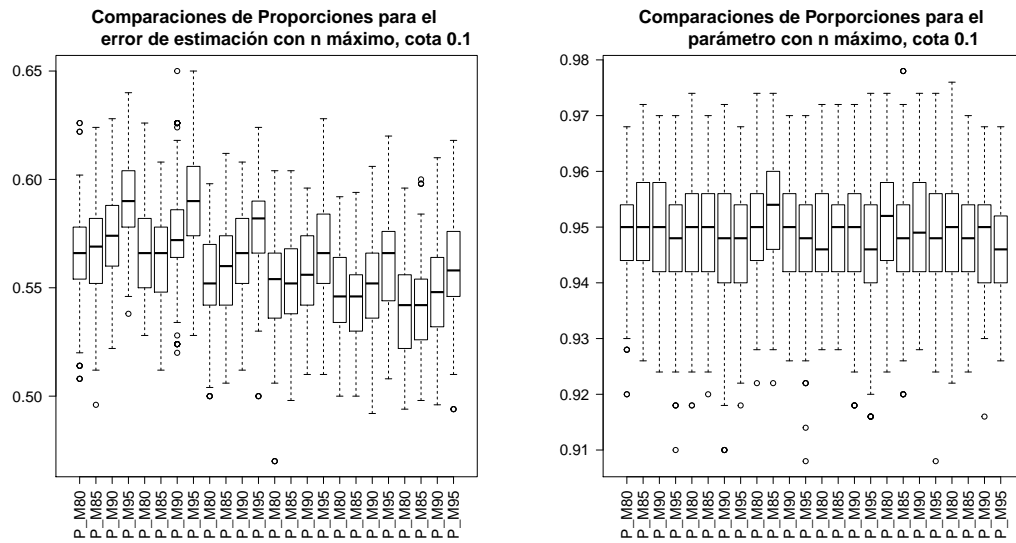


Figura B.56: Gráficos de caja para la eficiencia del error de estimación del método máximo aumentando la cota, $R^2 = 0.95$

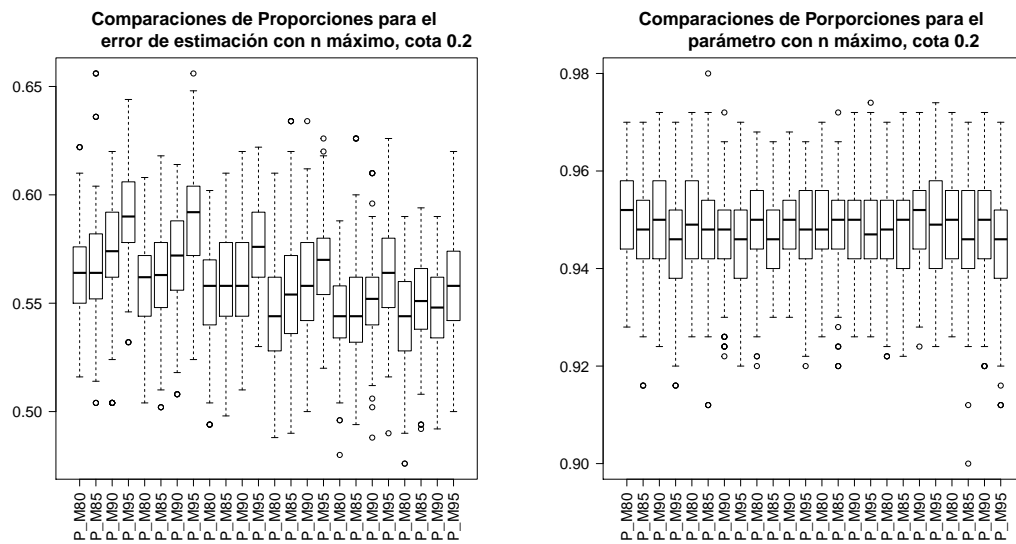


Figura B.57: Gráficos de caja para la eficiencia del error de estimación del método máximo aumentando la cota, $R^2 = 0.95$

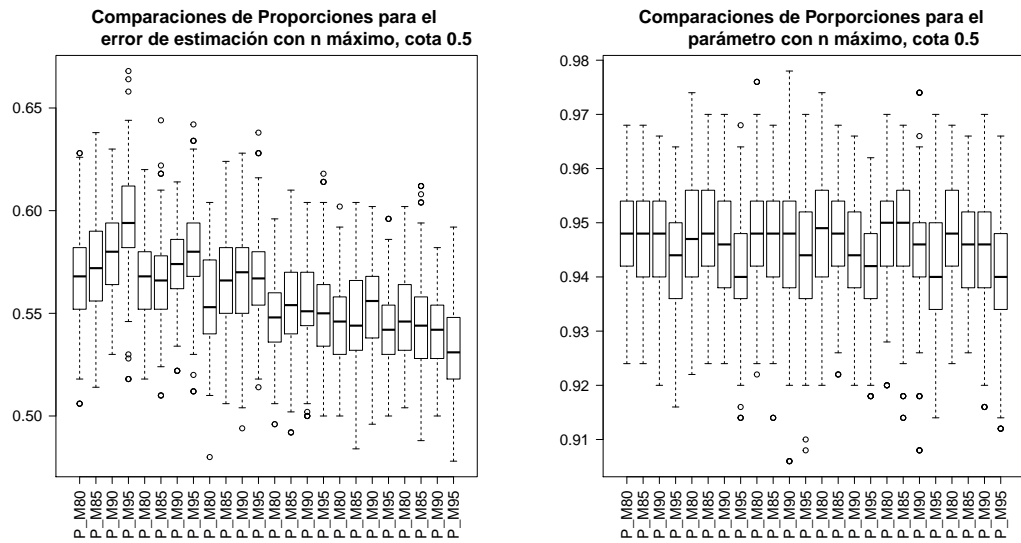


Figura B.58: Gráficos de caja para la eficiencia del error de estimación del método máximo aumentando la cota, $R^2 = 0.95$

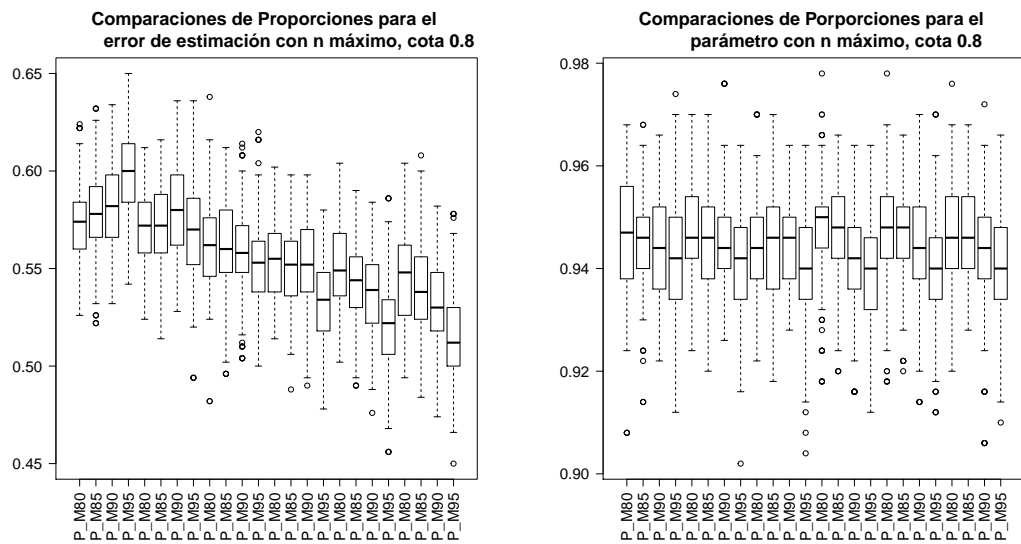


Figura B.59: Gráficos de caja para la eficiencia del error de estimación del método máximo aumentando la cota, $R^2 = 0.95$

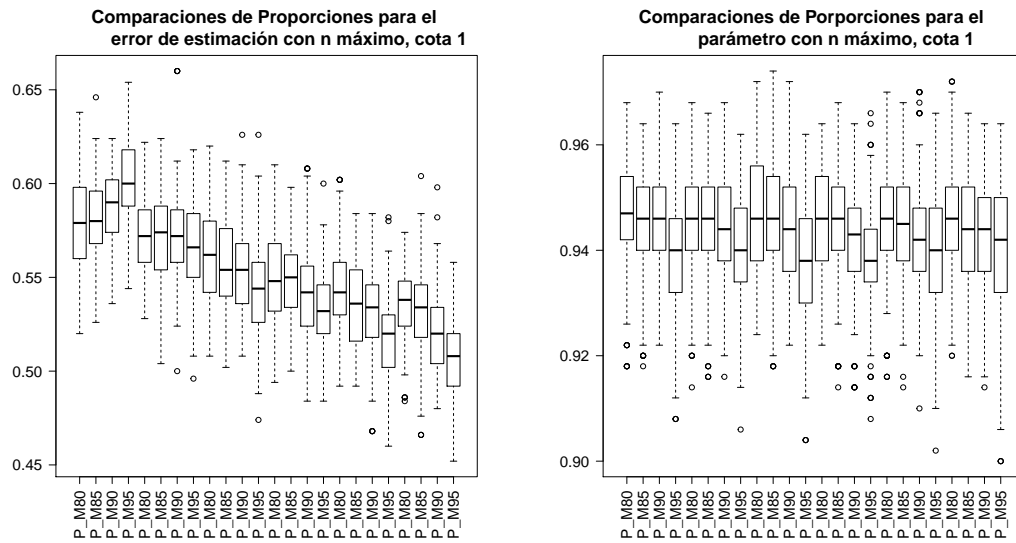


Figura B.60: Gráficos de caja para la eficiencia del error de estimación del método máximo aumentando la cota, $R^2 = 0.95$

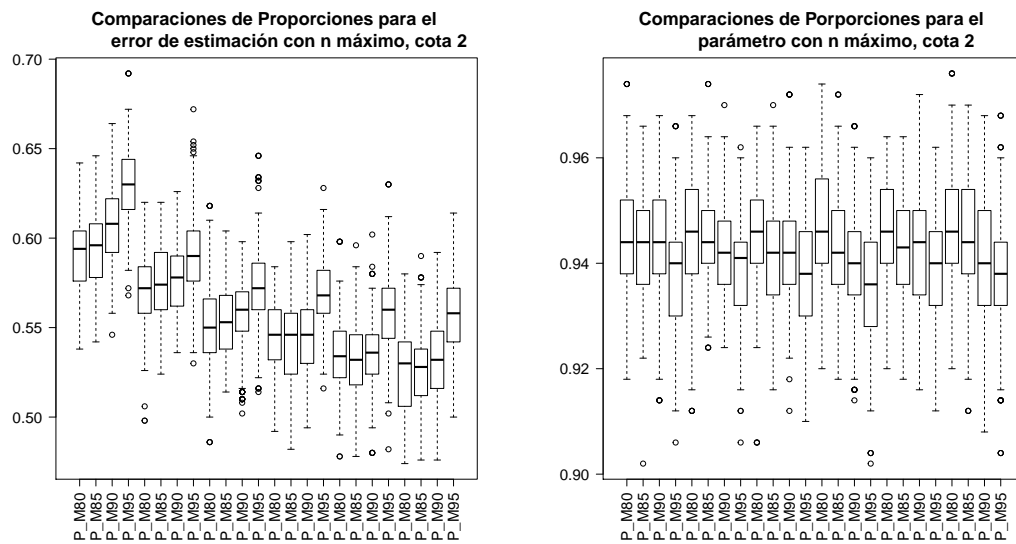


Figura B.61: Gráficos de caja para la eficiencia del error de estimación del método máximo aumentando la cota, $R^2 = 0.95$

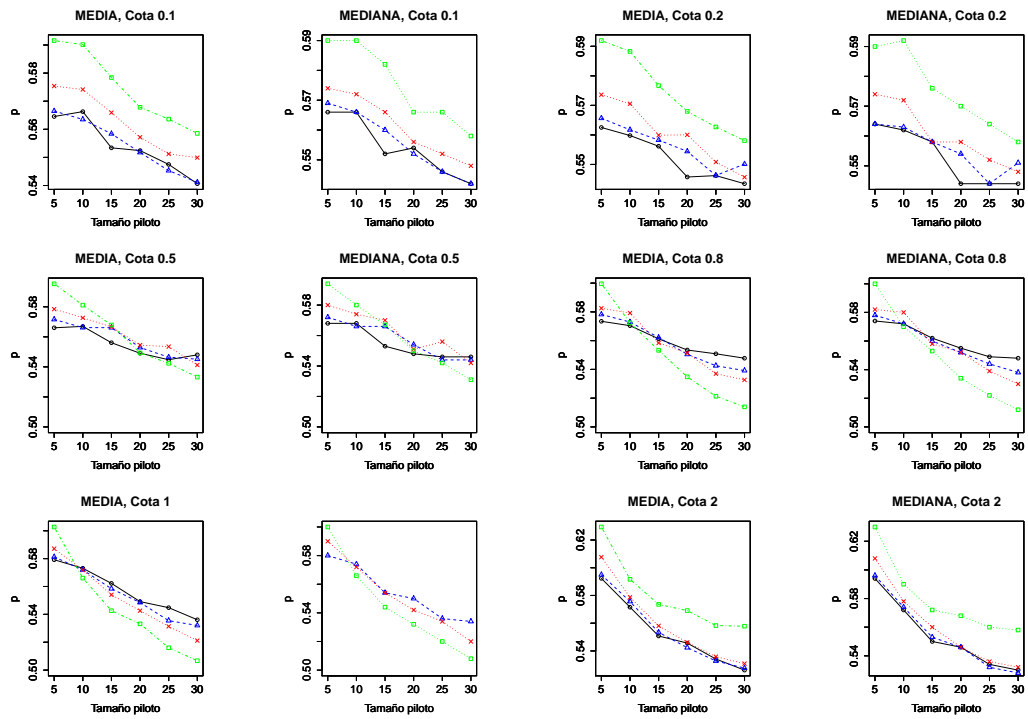


Figura B.62: Comparaciones media y mediana de la eficiencia del error de estimación para $R^2 = 0.8, 0.85, 0.9, 0.95$, método máximo

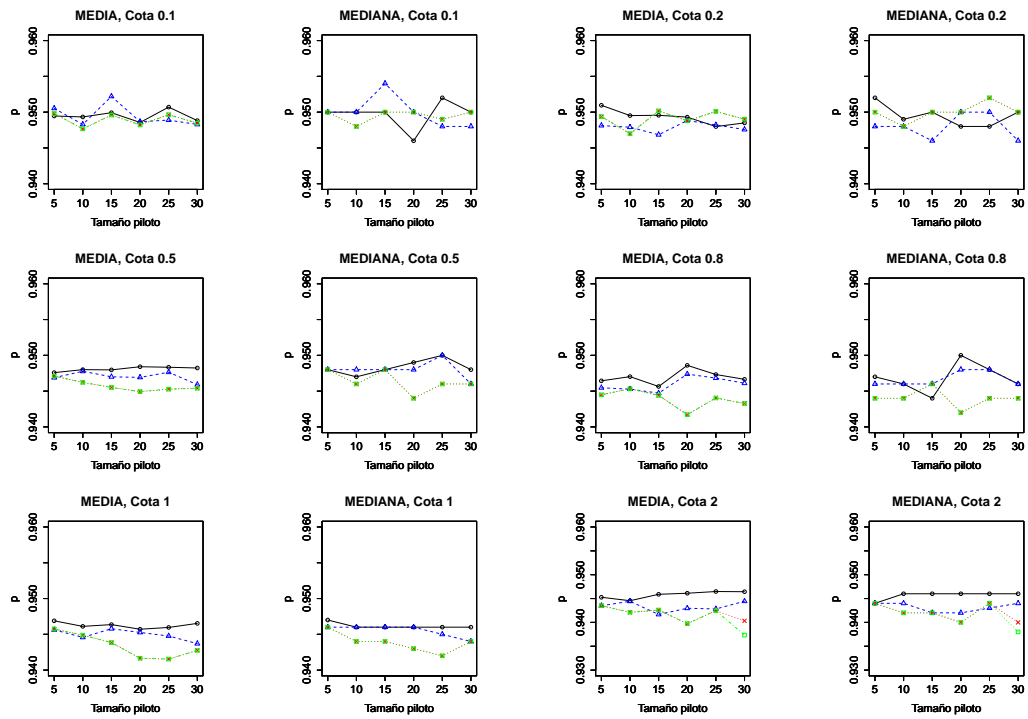


Figura B.63: Comparaciones media y mediana de la eficiencia del parámetro para $R^2 = 0.8, 0.85, 0.9, 0.95$, método máximo

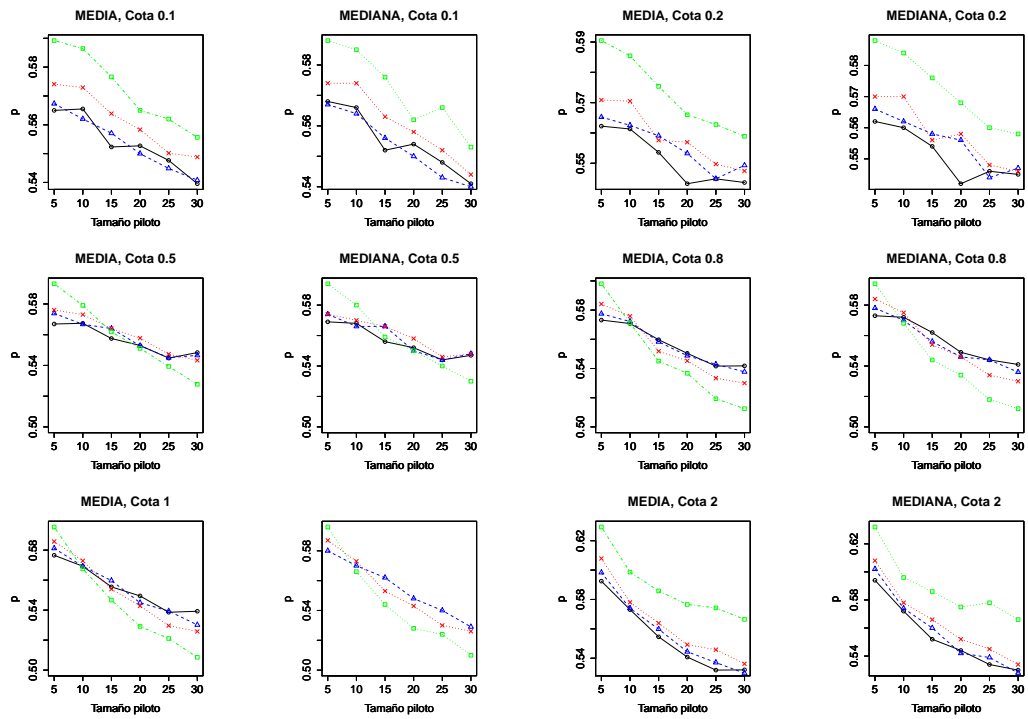


Figura B.64: Comparaciones media y mediana de la eficiencia del error de estimación para $R^2 = 0.8, 0.85, 0.9, 0.95$, método conjunto

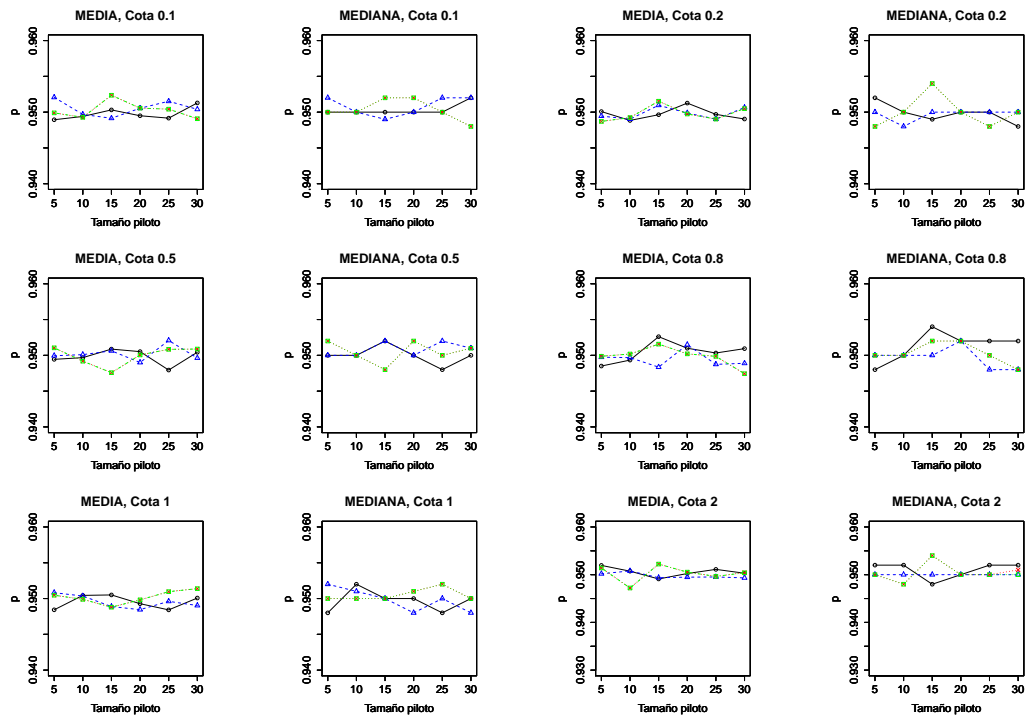


Figura B.65: Comparaciones media y mediana de la eficiencia del parámetro para $R^2 = 0.8, 0.85, 0.9, 0.95$, método conjunto

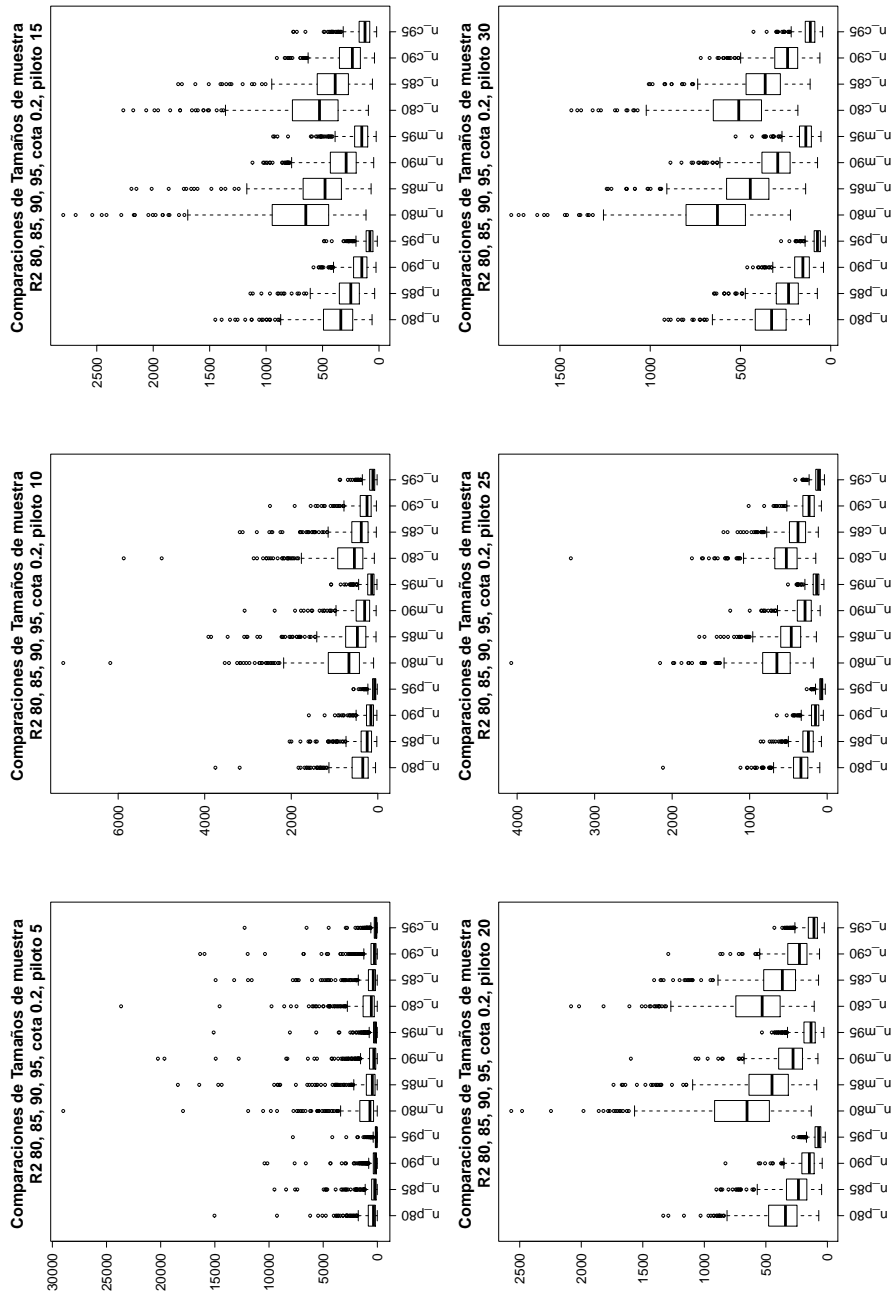


Figura B.66: Comparaciones de los tamaños de muestra, cota 0.2

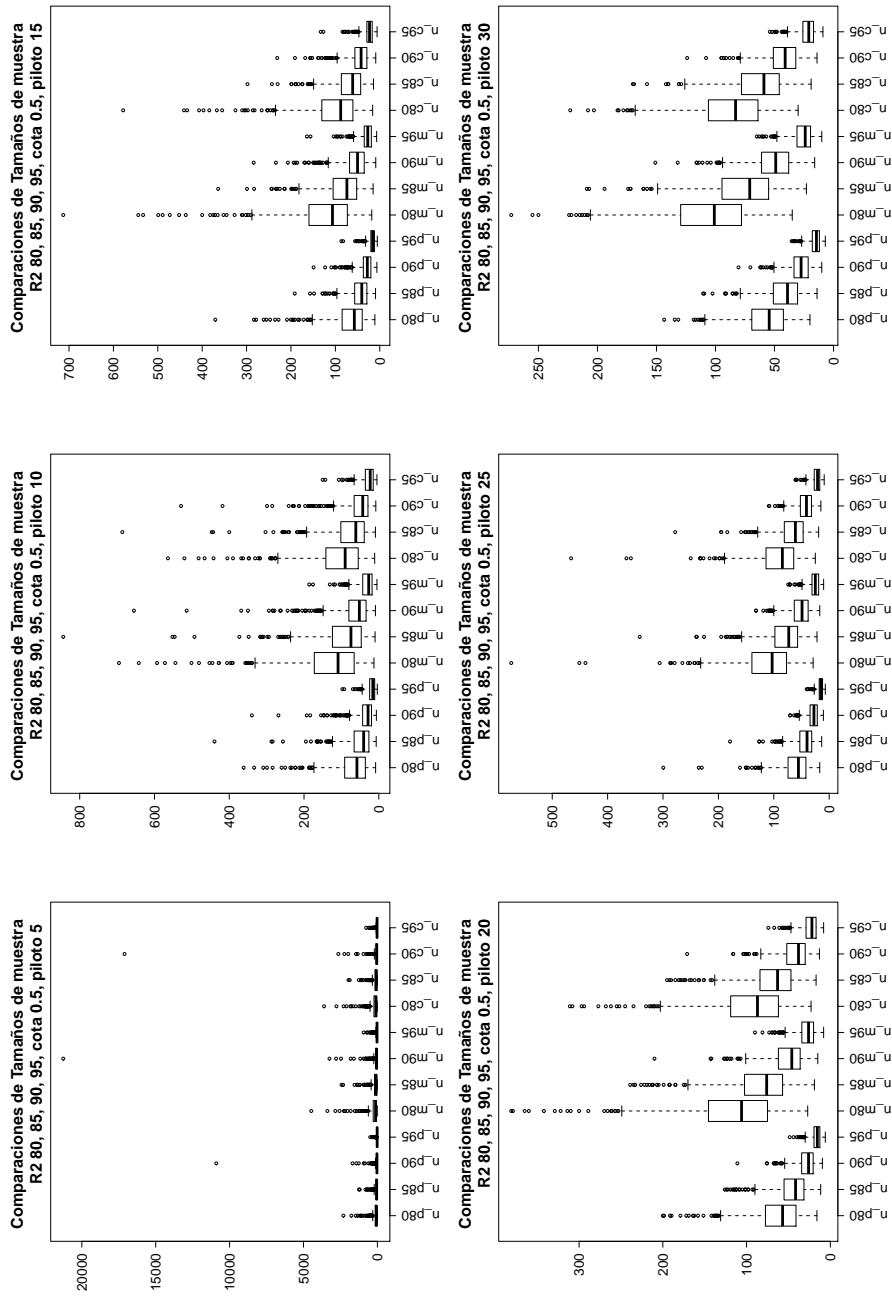


Figura B.67: Comparaciones de los tamaños de muestra, cota 0.5

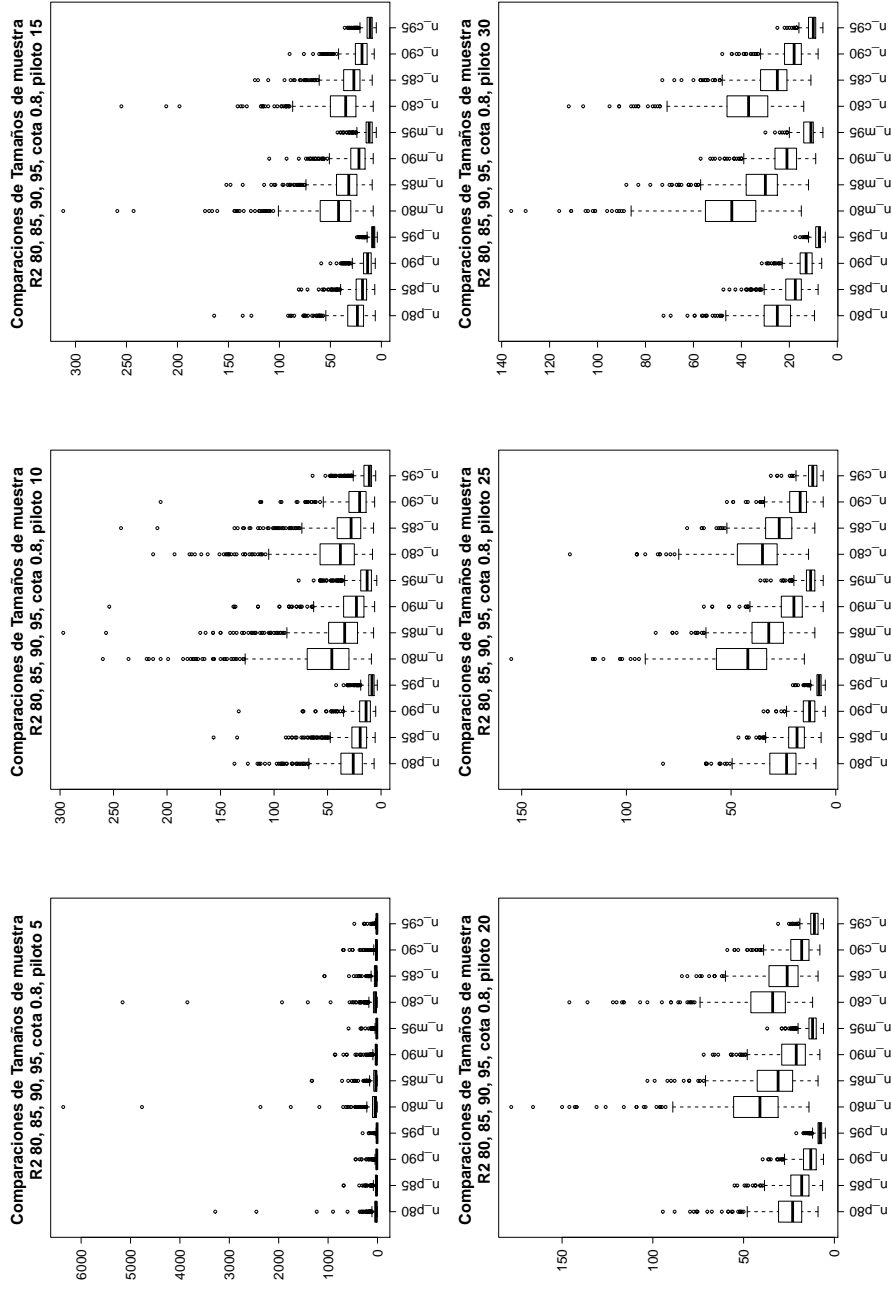


Figura B.68: Comparaciones de los tamaños de muestra, cota 0.8

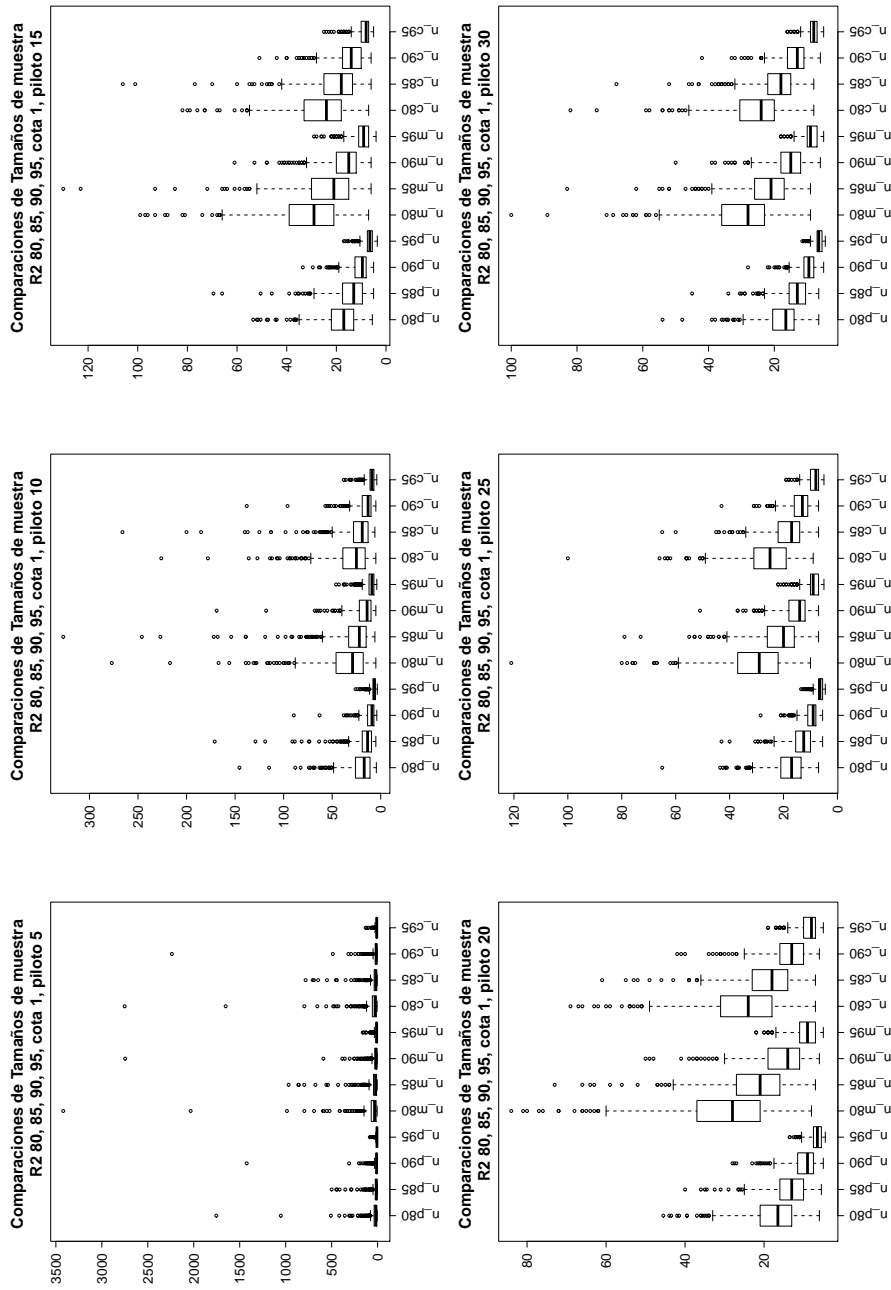


Figura B.69: Comparaciones de los tamaños de muestra, cota 1

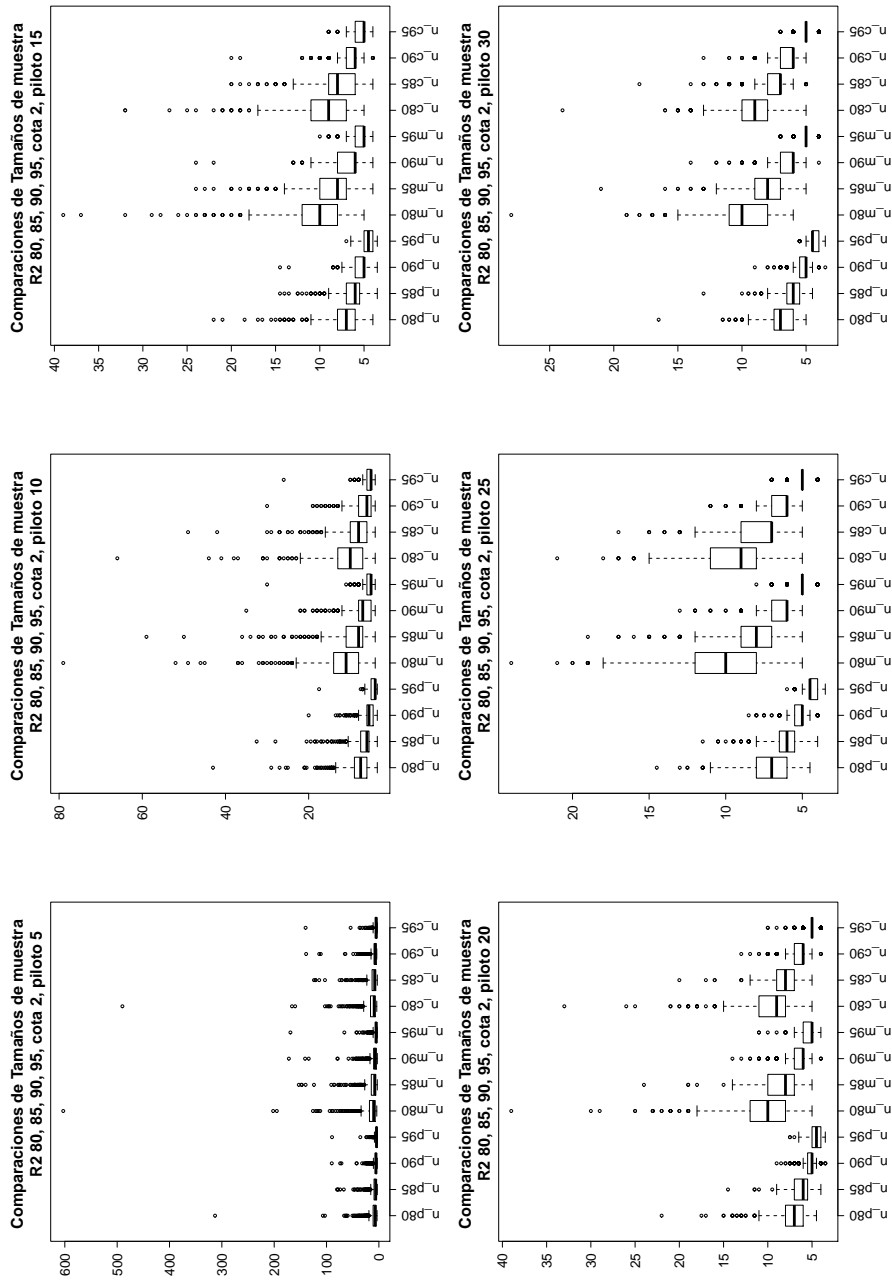


Figura B.70: Comparaciones de los tamaños de muestra, cota 2

Bibliografía

- [1] Analla, M., 1998. Model validation through the linear regression fit to actual versus predicted values. *Agricultural Systems*, 57, 115-119.
- [2] Colosimo, E. A., Cruz, F. R. B., Miranda J. L. O., Vanwoensel, T., 2007. Sample size calculation for method validation using linear regression. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 77, 505-516.
- [3] Domínguez, E., 2000. Protocolo para la modelación matemática de procesos hidrológicos. *Meteorología Colombiana*, 2, 33-38.
- [4] Febles, A. A., 2014. Evaluación de la eficacia del método de regresión en la validación de modelos: Un estudio de simulación. Tesis de Licenciatura. Universidad Autónoma de Yucatán, Facultad de Matemáticas. Tizimín, Yucatán.
- [5] Johnson, R., Wichern, D., 2007. Applied Multivariate Statistical Analysis. 6th Edition. Pearson Prentice Hall.
- [6] Mayer, D.G., Butler, D. G., 1993. Statistical validation. *Ecological Modelling*, 68, 21-32.
- [7] Medina, S., Vargas, L., Navarro, J., Canul, C., Peraza, S., 2010. Comparación de medidas de desviación para validar modelos sin sesgo, sesgo constante o proporcional. *Universidad y ciencia*. 26(3), 255-263.

- [8] Medina, S., Vargas, L., Navarro, J., Avedaño, L., Colorado, L., Arjona, E., Mendoza, G., 2014. Validación de modelos con sesgo constante: un enfoque aplicado. *Revista MVZ Córdoba*. 19(2), 4099-4108.
- [9] Mitchell, P. L., 1997. Misuse of regression for empirical validation of models. *Agricultural Systems*. 54(3), 313-326.
- [10] Montgomery, D. C., Peck, E. A., Vining, G. G., 2002. Introducción al análisis de regresión lineal. 3ª edición. CECSA. México, DF.
- [11] Montgomery, D. C., Runger, G. C., 2014. Applied Statistics and Probability for Engineers. 6th edition. John Wiley & Sons, Inc.
- [12] Tedeschi, L. O., 2006. Assessment of the adequacy of mathematical models. *Agricultural Systems*, 89, 225-247.
- [13] Zill, D. G., 1997. Ecuaciones Diferenciales Con Aplicaciones De Modelado. 6ª edición. International Thomson Editores.
- [14] Yang, Y., Monserud, R. A., Huang, S., 2004. An evaluation of diagnostic test and their roles in validating forest biometric models. *NRC Canada*, 34, 619-629.
- [15] R Core Team, 2014. R: A language and environment for Statistical Computing. The R Foundation for 83 Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.R-project.org/>.