Abstraction & Application **16** (2017) $26-53$ UADY

Resolución de problemas matemáticos y niveles de pensamiento cognitivo: Un estudio exploratorio en niños de sexto grado de primaria

[1]Genny Rocío Uicab-Ballote[a], [1]Carlos Jacob Rubio-Barrios[b], [2]Silvia Marilyn Pérez-Ceballos[c]

[1] Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán, Periférico Norte, Mérida, México

[2] Unidad Académica Bachillerato con Interacción Comunitaria, Calle 185 col. San Luis Sur, Mérida,México

[a]uballote@correo.uady.mx, [b]carlos.rubio@correo.uady.mx, [c]silvia.perez@correo.uady.mx.

Abstract

The present manuscript reports the results of an exploratory study in which mathematical problem solving was considered as a means for the cognitive development of students in the basic level, specifically sixth grade.

Resumen

El presente trabajo reporta los resultados de un estudio exploratorio en el que se consideró la resolución de problemas matemáticos como medio para el desarrollo cognitivo de estudiantes de sexto grado de primaria.

Keywords and phrases : Educación básica, cognición, resolución de problemas matemáticos.

2010 *Mathematics Subject Classification* 97D50.

1. Introducción

Las capacidades que posee el ser humano no solo son factores genéticos y hereditarios, sino también son producto del aprendizaje y de la interacción continua del individuo con el medio que lo rodea y la sociedad. Esas capacidades pueden ser mejoradas a través de la estimulación cognitiva la cual consiste en un conjunto de técnicas y estrategias cuyo fin es desarrollar las distintas capacidades y funciones cognitivas del ser humano, mediante una serie de situaciones y actividades concretas [7].

La palabra *cognición*, es una palabra de origen latino (cognitio: conocimiento, acción de conocer) que denota el proceso por el que las personas adquieren conocimientos. La cognición entraña procesos de adquisición, transformación, organización, retención, recuperación y uso de la información. Activamente, el sujeto extrae información del entorno, que procesa y usa en la adquisición de nuevos conocimientos. En el proceso cognitivo, el razonamiento permite a los sujetos obtener conclusiones a partir de premisas establecidas previamente [2]. El razonamiento está estructurado en distintos niveles de organización lógica y estos pueden detectarse experimentalmente a través de la operatoria utilizada en la resolución de problemas [9]. Algunos de los primeros aportes hacia la resolución de problemas matemáticos surgen con George Polya quien en su libro *Cómo plantear y resolver problemas*, expresa que los aspectos matemáticos son primero imaginados y luego probados [16].

Fecha de recepción: Diciembre 21, 2016 / Fecha de aceptación: Junio 19, 2017

La matemática es una ciencia cuyo estudio requiere el uso de la lógica y el razonamiento. Sin embargo, durante su enseñanza, algunas veces se deja a un lado el razonamiento, recurriendo solamente al empleo de reglas, operaciones básicas, pasos y algoritmos bien definidos. Por lo que opuesto a ello, se recomienda que a los estudiantes se les brinde alguna oportunidad de resolver problemas adecuados a su nivel [16].

El presente trabajo pretende responder a ciertas cuestiones de interés, respecto:

- Al tipo de problemas –clasificados en ciertos niveles de complejidad– que los estudiantes de sexto grado de primaria resuelven con mayor o menor facilidad.
- Al razonamiento matemático que subyace en los estudiantes al resolver problemas de aritmética y geometría, y la identificación de niveles de pensamiento cognitivo con base en los procesos heurísticos de los estudiantes.
- A identificar con base en el análisis de los procesos heurísticos de los estudiantes, aspectos que den cuenta de cómo contribuir en el proceso enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, mediante la resolución de problemas, en edades tempranas.

2. Marco de referencia

En México, la Secretaría de Educación Pública [18] menciona que la educación básica de calidad debe proporcionar elementos para desarrollar en los alumnos, las capacidades comunicativas, cognitivas y de reflexión, que contribuyan al mejoramiento, desempeño e integración en la sociedad. Para ello, los alumnos necesitan adquirir habilidades y estrategias que les permitan aprender por sí mismos nuevos conocimientos [6].

El uso de algoritmos en las aulas de clase, para la enseñanza de las matemáticas, permite a los estudiantes la construcción de ciertos objetos matemáticos, pero el manejo de algoritmos no es suficiente para el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. En las escuelas se debe estimular a los estudiantes a aprender a resolver problemas. La Secretaría de Educación Pública [19] afirma que los niños necesitan numerosas situaciones que les presenten un reto; de tal forma que les permita generar sus propias estrategias y resolver dichas situaciones a partir de lo que ya conocen. Es por ello que el sistema educativo debe proponer problemas no comunes ni sencillos, en donde el enunciado y la esencia del contenido matemático provoquen el razonamiento y análisis por parte del alumno. Por su parte, los docentes deben contribuir en el aprendizaje de los estudiantes a través del diseño o selección de actividades que los guíen al descubrimiento de los conceptos a enseñar, evitando una dependencia de los estudiantes hacia los docentes, es decir, estos últimos, deben ser guías del aprendizaje, fomentando en los niños la capacidad de reflexión crítica, promoviendo habilidades de pensamiento y propiciando que los estudiantes emitan juicios a través del análisis.

La enseñanza de las matemáticas debe estar determinada no solo por la estructura interna del conocimiento matemático, sino por objetivos de desarrollo cognitivo, ya que las matemáticas contribuyen al desarrollo de capacidades cognitivas abstractas y formales, de razonamiento, deducción, reflexión y análisis [20]. La enseñanza bajo la resolución de problemas pretende poner énfasis en actividades que plantean situaciones problemáticas cuya resolución requiere analizar, descubrir, elaborar hipótesis, confrontar, reflexionar, argumentar y comunicar ideas [4]. Inclusive a nivel mundial, programas como PISA (Programme for International Student Assesment) evalúan la capacidad que tienen los estudiantes para analizar, razonar y comunicarse eficazmente cuando formulan y resuelven problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones.

2.1. El desarrollo cognitivo durante la infancia

Piaget [15] identifica diferentes etapas de crecimiento por las que pasa el niño, siendo relevante para el presente trabajo la etapa de las operaciones concretas, ya que da cuenta de las habilidades que el individuo desarrolla en promedio, entre los 7 a 11 años. Esas habilidades consideramos deben ser potencializadas mediante la resolución de problemas.

En la *etapa sensomotor* (del nacimiento a los 2 años), el niño experimenta el mundo que lo rodea a través de los sentidos y la actividad motora, buscando así su adaptación al medio. Repite y modifica sus conductas, sin pensar ni realizar un aprendizaje; esto sufre una variación cuando empieza a surgir el lenguaje. En la *etapa preoperacional* (de los 2 a los 7 años), hay presencia de simbolización. En esta etapa, los dibujos resultan ser un intermediario entre el juego y la imagen mental. El niño intenta representar y expresar la realidad y lo que pasa por su mente, a través de dibujos, desarrollando su habilidad lingüística. Asimismo, enumera en pequeñas cantidades y clasifica.

En la *etapa de las operaciones concretas* (de los 7 a los 11 años), las capacidades y habilidades de los niños han sufrido un gran desarrollo en comparación a las dos etapas anteriores. Durante esta etapa los infantes son capaces de planear, trabajar con números, emplear estrategias que los ayuden a recordar, entender conceptos de espacio y tiempo, distinguir la realidad de la fantasía, etc. Alrededor de los siete años, adquieren la capacidad intelectual de conservar cantidades numéricas: longitudes y volúmenes de líquidos [11]. Asimismo, adquieren la capacidad de pensar en forma lógica sobre el aquí y el ahora.

La mayoría de los niños realizan observaciones, análisis o reflexiones sobre los procesos que llevan a cabo. Ya no basan sus juicios en las apariencias de las cosas sino que basan su razonamiento en el aspecto físico de los objetos. Obtienen la capacidad de realizar operaciones mentales y utilizan el pensamiento operacional debido a que emplean el uso de los símbolos para realizar diferentes representaciones, por ejemplo, representan cantidades a través de números. Al igual, se vuelven aptos para clasificar de acuerdo a las semejanzas entre los objetos y a establecer relaciones de pertenencia entre los objetos y los conjuntos en que estos están incluidos [8].

En lo que se refiere a la lógica de los niños, esta les permite hacer juicios morales más maduros, cuando captan los conceptos de verdadero y falso [13] y reflexionan sobre los hechos y objetos de su ambiente [8]. En cuanto al procesamiento de la información, los niños reciben información, la organizan, almacenan, recuperan, piensan en ella y la combinan para responder preguntas, resolver problemas y tomar decisiones.

En esta etapa de las operaciones concretas, el niño se va haciendo más consciente de sus capacidades y limitaciones cognitivas, adquiriendo la habilidad de identificar tareas fáciles de las difíciles. Va incrementando y desarrollando las capacidades que va adquiriendo, debido a ello se dice que el desarrollo intelectual es gradual [22]. Entre mayor sea el niño, mayor es su desarrollo de una estrategia selectiva, es decir, mejora su capacidad para separar información relevante de la irrelevante y para aprender de manera más eficiente [14].

Los niños en la etapa de las operaciones concretas sí pueden razonar en forma abstracta si se les entrena adecuadamente [8]. Esta es una de las contribuciones que debe aportar la escuela en el desarrollo de los niños para garantizarles un mejor futuro, ya que, los niños no son simplemente receptores que acumulan la información que les dan los adultos, sino que aprenden modificando ideas anteriores al interactuar con situaciones problemáticas nuevas [19].

2.2. La resolución de problemas matemáticos

Los primeros aportes hacia la resolución de problemas se dan con George Polya y Alan Schoenfeld. Polya [16], define un problema matemático como aquella situación que requiere la búsqueda consciente de una acción apropiada, para el logro de un objetivo claramente concebido pero no alcanzable de forma inmediata, es decir, el individuo está consciente que la solución al problema no será fácil de encontrar, ya que necesita el uso de una estrategia que lo conduzca hacia tal solución. Asimismo, para Polya (1976), la tarea de la heurística consiste en comprender el método que conduce a la solución de los problemas, es decir, las operaciones mentales, procesos y estrategias útiles para ese proceso.

La resolución de problemas se trata de un proceso que debe proporcionar a los estudiantes, en el aula de clases, los conceptos y destrezas, desarrollar y aplicar las estrategias para su resolución, interpretar el resultado obtenido con relación a lo demandado y aumentar la confianza en el uso de las matemáticas. La resolución de problemas es una actividad extraordinariamente compleja [1]. Si ante una situación de dificultad, el estudiante tiene conocimientos suficientes para abordar la situación pero no hay un camino directo o conocido, y es necesario realizar otros procesos como razonar u organizar la información, estamos ante un problema [12]. Un problema matemático es una situación nueva o diferente de lo ya aprendido en lo que requiere utilizar de modo estratégico técnicas ya conocidas y toma de decisiones; supone para el alumno una demanda cognitiva pero también debe ser motivacional.

Villalobos [21] concibe la resolución de problemas, como una estrategia didáctica con la cual se demuestran conceptos y reglas matemáticas estudiadas para poder ser aplicadas; situación que debe presentar una dificultad intelectual y no solo operacional o algorítmica, sino que debe significar un real desafío, ser un objeto de interés, contextualizado y motivante para el alumno, debe provocar una dificultad del desarrollo de habilidades cognitivas.

2.2.1. Diferencia entre problema y ejercicio

Schoenfeld [17] hace referencia a que un problema no es una propiedad inherente de una tarea matemática. Más bien, es una relación entre el individuo y la tarea lo que hace la tarea un problema para el individuo. En un sentido relativo, un problema es, como una tarea que es difícil para quien está intentando resolverlo. Más aún, esa dificultad ha de ser un atolladero intelectual más que de cálculo, ya que, si uno tiene acceso a un esquema de solución para una tarea matemática, esa tarea es un ejercicio y no un problema. Un problema se distingue de un ejercicio en que, quien resuelve, no tiene un procedimiento o algoritmo que conduzca con certeza a una solución [3].

3. Metodología

Se llevó a cabo un taller de resolución de problemas y se realizó un estudio exploratorio, en los cuales se observaron y analizaron los procesos realizados por los estudiantes durante la resolución de los problemas matemáticos presentados en el taller.

La forma y las condiciones para la recolección de los datos estuvieron apoyadas en dos tipos de observación: una observación directa y una observación indirecta. La observación directa permitió observar a los estudiantes en el momento que se encontraban hallando la solución de los problemas y todo lo acontecido en el taller. La observación indirecta se realizó al finalizar el taller, analizando los registros de cada sesión. Toda la información verbal y escrita de los alumnos, los procedimientos y estrategias que utilizaron para dar solución a los problemas, fueron el medio para determinar los niveles de pensamiento cognitivo.

3.1. Características de los problemas matemáticos propuestos

Los problemas que se proporcionaron en el taller, fueron seleccionados de diversos exámenes de olimpiadas de matemáticas y corresponden a las áreas de Geometría y Aritmética. Los problemas representan un desafío para los estudiantes, estimulando así, sus capacidades cognitivas.

En el enunciado de cada problema se distinguen dos tipos de conceptos matemáticos:

- *Conceptos explícitos.* Presentados explícitamente en el enunciado del problema.
- *Conceptos implícitos.* No proporcionados en el enunciado del problema, los cuales deberá identificar el estudiante por medio de la razón y el análisis. Es necesario que el alumno pueda identificarlos para poder hallar la solución del problema.

Los problemas presentados se clasificaron por su grado de dificultad en las categorías α, β y γ. La descripción y distinción entre las categorías se realizó de acuerdo a las acciones que se esperan realicen los estudiantes, en función del contenido matemático propio de cada problema para encontrar la solución.

- Problemas de dificultad α. En el problema se encuentra toda la información necesaria para hallar su solución (conceptos explícitos), pero para llegar a ella, se requiere de la identificación y organización de los datos, así como de la interpretación apropiada de lo que plantea el problema.

- Problemas de dificultad β. Además de los conceptos explícitos, se encuentran conceptos implícitos, clave para dar solución a este tipo de problemas. Los datos explícitos ponen en juego estímulos cognitivos que conducen a relacionar toda la información proporcionada y poder dar solución al problema.
- Problemas de dificultad γ. Involucran conceptos implícitos y explícitos, pero a diferencia de los problemas de dificultad β, estos problemas exigen por parte de quien resuelve, cierto ingenio y creatividad para poder solucionarlos.

3.2. Clasificación de los procesos cognitivos

Las interpretaciones, estrategias, apuntes, cálculos, representaciones, etc. que realizaron los estudiantes para encontrar la solución a los problemas fueron clasificados tomando como referencia el nivel cognitivo de la Taxonomía de Bloom aplicada a las Matemáticas [10], con base en las acciones (verbos) mediante las cuales se pueda observar el desarrollo de las capacidades cognitivas del estudiante.

Cabe mencionar que la Taxonomía de Bloom se divide en tres categorías: afectivo, psicomotor y cognitivo; pero por la naturaleza de la investigación, se destacará únicamente el nivel cognitivo. Dicho nivel hace referencia a los aspectos relacionados con los procesos mentales superiores. Se basa en la idea de que los procesos cognitivos pueden clasificarse en seis niveles de complejidad creciente [5]: nivel conocimiento, nivel comprensión, nivel aplicación, nivel análisis, nivel síntesis y nivel evaluación. En cada nivel se establecen verbos clave que se consideraron como acciones realizadas por el alumno. La Taxonomía de Bloom es jerárquica, es decir, para que el alumno adquiera aprendizajes en un nivel superior, depende de la adquisición de conocimientos y habilidades en los niveles inferiores.

La Taxonomía de Bloom aplicada a las Matemáticas es una adaptación de la Taxonomía de Bloom a dicha área, consiste en la delimitación de los verbos que describen acciones de los procesos cognitivos de los estudiantes, relacionados con las matemáticas. Con dicha información, se pretende clasificar y describir el nivel cognitivo en el que se encuentren los estudiantes. A continuación se describen los niveles de la taxonomía.

Nivel conocimiento. Se considera el acto de recordar lo previamente aprendido, obteniendo la información adecuada a la situación presentada. Este nivel se caracteriza por la capacidad del sujeto de recuperar la información relevante de la memoria a largo plazo.

Nivel comprensión. Hace referencia a la capacidad que tiene el individuo de comprender el significado literal de una información que se presenta de manera explícita. El estudiante comprende lo que se le está comunicando y usa las ideas que se le presenten estableciendo relaciones de contenido. Dicha comprensión puede demostrarse o expresarse mediante la traducción e interpretación, utilizando palabras, números, pictogramas, etc.

Nivel aplicación. Hace referencia a la capacidad de usar lo aprendido en situaciones, similares o nuevas. Incluye el uso y aplicación de reglas, métodos, conceptos, principios, leyes y teorías, es decir, el uso adecuado de principios y fórmulas en situaciones concretas.

Nivel análisis. Se trata de comprender y manipular una información con datos implícitos mediante la fragmentación de sus elementos más importantes, de manera que las relaciones existentes entre dichos elementos se hagan explícitas. Es decir:

- Comprender ciertos conceptos y el por qué de ciertos procedimientos.
- Buscar y descubrir relaciones entre elementos de un problema: hacer explícitas las relaciones que están implícitas en un problema, por ejemplo: analizar una representación gráfica para encontrar la relación entre los elementos que intervienen en ella.

Nivel síntesis. Se refiere a la habilidad que debe adquirir el alumno para escribir un plan, proponer un diseño experimental con el objeto de probar una hipótesis. Dicho de otro modo, manipular elementos de distintos tipos para crear una estructura nueva que antes no existía de forma explícita.

Nivel evaluación. Compete a realizar juicios cualitativos y cuantitativos sobre el grado con que un método cumple con los fines propuestos. En este nivel, se considera la capacidad del alumno para juzgar el valor de una cosa para un propósito determinado empleando criterios definidos.

En el siguiente cuadro se muestran los verbos que describen las acciones que se espera realicen los estudiantes.

	Verbo	Nivel
		Conocimiento
1	Calcular	Realizar operaciones matemáticas para llegar a un resultado. Se incluyen los cálculos mentales simples, por ejemplo, de sumas y multiplicaciones.
2	Clasificar	Es el conocimiento de las distintas clasificaciones que existen en matemáticas de acuerdo con el nivel educativo del estudiante. Por ejemplo, clases de triángulos según sus lados y ángulos.
3	Identificar	Reconocer algún concepto matemático, figura geométrica o método, a partir de un conjunto de características que le son propias.
		Comprensión
4	Comparar	Analizar dos o más objetos matemáticos, datos de un problema o conceptos matemáticos para descubrir sus diferencias o semejanzas.
5	Traducir	Traducción de los elementos explícitos e implícitos de un problema que conduzcan a una solución. Por ejemplo, saber que se requiere sumar, usar el teorema de Pitágoras, decir si un número es par, etc.
6	Interpretar	Realización de procedimientos coherentes usando los datos proporcionados en problemas de naturaleza conocida.
		Aplicación
7	Aplicar	Uso adecuado de teoremas, principios, fórmulas, etc. en situaciones concretas. Por ejemplo, hallar el área de un círculo usando la fórmula correspondiente.
8	Relacionar	Establecer relación entre objetos, conceptos matemáticos, datos en un problema, figuras geométricas, etc.
9	Resolver	Hallar la solución de un problema aplicando ciertas estrategias ya conocidas. Resolver un problema de enunciado afín a otro resuelto previamente.
		Análisis
10	Analizar	Comprender y manipular una información con datos explícitos y no explícitos mediante la fragmentación en sus elementos más importantes de manera que las relaciones existentes entre dichos elementos permitan la interpretación adecuada de la información.
11	Resolver	Resolver problemas no rutinarios que no han sido estudiados con anterioridad, pero se cuenta con los conocimientos para promover la resolución.
		Síntesis
12	Integrar	Manipular elementos de distintos tipos (conceptos, fórmulas, principios, etc.), para crear una estructura nueva que antes no existía de forma explícita.
13	Deducir	Emitir conjeturas sobre suposiciones válidas.
		Evaluación
14	Valorar	Emitir juicios de valor cuantitativo y cualitativo basados en criterios válidos.

Cuadro 1: *Información (resumida) que proporciona un referente para clasificar los niveles cognitivos (considerados por los autores del presente trabajo) de acuerdo a la taxonomía de Bloom aplicada a las matemáticas.*

Bajo la Taxonomía de Bloom aplicada a las Matemáticas, los procesos cognitivos se clasificaron de la siguiente manera:

- De tipo 1. Son aquellas acciones que realiza el estudiante y corresponden a los niveles cognitivos de *conocimiento* y *comprensión* de la taxonomía, es decir, serán medidos de acuerdo a los verbos seleccionados en ambos niveles.
- De tipo 2. Son aquellas acciones que realiza el estudiante y corresponden a los niveles cognitivos de *aplicación* y *análisis* de la taxonomía.
- De tipo 3. Son aquellas acciones que realiza el estudiante y corresponden a los niveles cognitivos de *síntesis* y *evaluación* de la taxonomía.

4. Análisis a priori de seis problemas matemáticos

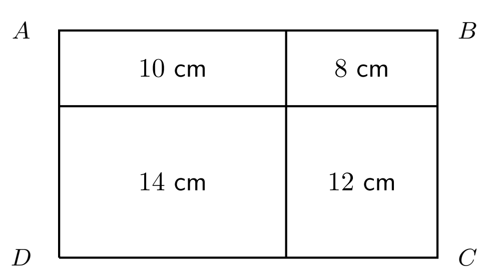
Para llevar a cabo el taller se consideró un total de 16 problemas ordenados, desde nuestro análisis, de acuerdo con el tipo de dificultad. El estudiante inició con problemas de dificultad α hasta llegar a problemas de dificultad γ. A continuación se describen 6 de los 16 problemas matemáticos que conformaron el instrumento. La numeración de los problemas es con respecto a la tabla del Apéndice 1.

Problema 3. Sofía tiene una pecera de 30 cm de largo por 20 cm de ancho. Llenó la pecera con agua hasta una altura de 9 cm. Si cada pez necesita un litro de agua para vivir, ¿cuál es la mayor cantidad de peces que puede poner Sofía en la pecera?

Área: Aritmética y Geometría.
Dificultad α. Se requiere realizar cálculos para determinar el volumen y luego relacionar centímetros cúbicos con litros.
Procesos cognitivos:

- De tipo 1: Interpretación del enunciado del problema, identificación de los datos importantes. Deducir que se requiere calcular el volumen de la pecera. Representación gráfica de la pecera por medio de un prisma rectangular. Recordar el concepto de volumen de un prisma (área de la base por altura) y calcular el volumen ($V = 5400$ cm^3.)
- De tipo 2: Realizar la conversión de cm^3 a litros. Recordar que un litro corresponde a 1000 cm^3.
- De tipo 3: La pecera tiene 5.4 litros, concluir que la cantidad máxima de peces debe ser un número entero e igual a 5.

Problema 9. Si los números que están en cada rectángulo representan el perímetro de cada uno, ¿cuál es el perímetro del rectángulo $ABCD$?



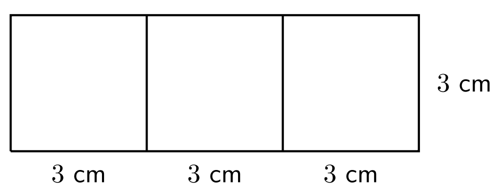
Área: Geometría.
Dificultad α. Se requiere hacer uso de la noción de perímetro de un rectángulo, dato explícito en el problema.
Procesos cognitivos:

- De tipo 1: Interpretación del problema. Recordar la noción de perímetro aplicado a un rectángulo.
- De tipo 2: Relacionar los lados del rectángulo mayor con dos lados de cada uno de los cuatro rectángulos menores.
- De tipo 3: Concluir que el perímetro del rectángulo $ABCD$ es igual a 22 cm.

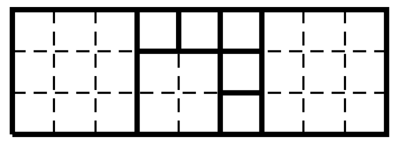
Problema 11. Supón que tienes un rectángulo de 9 cm por 3 cm. Divídelo exactamente en 8 cuadrados.

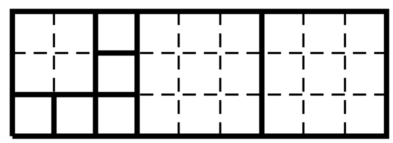
Área: Geometría.
Dificultad β. Se requiere del uso de otros conceptos matemáticos no mencionados explícitamente en el problema (como propiedades de un cuadrado, elemento clave para dar solución al problema).
Procesos cognitivos:

- De tipo 1: Identificar los datos proporcionados en el problema. Recordar el área de un rectángulo.
- De tipo 2: Para resolver este problema, al alumno se le entregará una hoja cuadriculada. Es posible que el alumno considere cada cuadrito de la hoja como una unidad cuadrada. Realizar la representación gráfica del rectángulo con medidas 9 cm por 3 cm. Calcular el área del rectángulo (27 cm^2), deducir que los ocho cuadrados deben ocupar toda el área del rectángulo. Darse cuenta de que 27 es divisible entre 3 y que del resultado de la división $\frac{27}{3} = 9$ cm^2, se pueden obtener 3 cuadrados cada uno de área 9 cm^2, obteniendo así 3 cuadrados de 3 cm de lado cada uno.

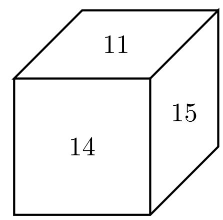


- De tipo 3: El alumno deducirá las medidas de los lados de los cuadrados resultando, que de los tres cuadrados de 3×3, uno debe dividirse en 5 cuadrados de 1 cm de lado cada uno y un cuadrado de 2 cm de lado. Así se tendrán: 2 cuadrados de área 9 cm^2, 5 cuadrados de área 1 cm^2 y un cuadrado de área 4 cm^2. La distribución de los cuadrados dentro del rectángulo puede variar, pero las medidas de estos no cambian, es decir, se obtendrán 2 cuadrados de 3 cm de lado cada uno, un cuadrado de 2 cm de lado, y 5 cuadrados de 1 cm de lado. Validar que la suma de las áreas de cada cuadrado sea igual al área del rectángulo de 3 cm $\times$ 9 cm. A continuación se muestran dos posibles soluciones.





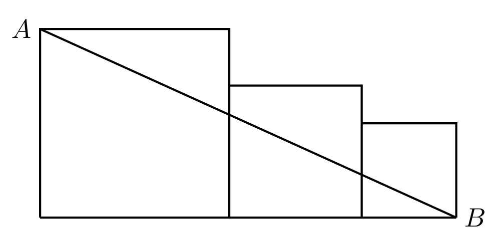
Problema 13. Los números sobre las caras del siguiente cubo son seis números consecutivos. Si los números de dos caras opuestas suman lo mismo, ¿cuánto suman todos los números de las caras del cubo?



Área: Aritmética.
Dificultad β. La solución puede obtenerse mediante la identificación y organización de los datos. El dato explícito de números consecutivos, es fundamental para concluir a priori que hay dos posibles soluciones, de las cuales solo una es válida.
Procesos cognitivos:

- De tipo 1: Distinguir las caras del cubo e identificar el número que hay en cada una de ellas. Asimismo, se requiere recordar el concepto de números consecutivos.
- De tipo 2: Realizar, mediante prueba y error, algunos cálculos para determinar los números faltantes.
- De tipo 3: Utilizar el dato de que los seis números son consecutivos junto con los números mostrados en las tres caras del cubo, para concluir que hay dos posibles soluciones: los números del 11 al 16, o del 10 al 15. Una observación más fina a partir de que los seis números son consecutivos, es que deben estar los números 12 y 13, pues los números $11, 14$ y 15 se tienen como dato. Inferir de aquí que el número que falta es el 10 o el 16. Usar el dato de que los números de cualesquiera dos caras opuestas suman lo mismo y el hecho de que hay 3 pares de caras, para concluir que la suma de todos los números de las caras debe ser múltiplo de 3. Hacer la suma de los números que se sabe con certeza que deben ir en 5 caras del cubo, para obtener el número faltante con la información anterior. La suma $11 + 12 + 13 + 14 + 15$ es igual a 65. Observar que $65 + 10 = 75$ y $65 + 16 = 81$ son ambos múltiplos de 3. Sin embargo, para la suma 75 las tres parejas deben sumar 25 siendo estas $(10, 15)$, $(11, 14)$ y $(12, 13)$, pero el 11 y el 14 están en caras adyacentes, por lo que no se pueden acomodar en caras opuestas. Así, este caso no es posible. Ahora, como $\frac{81}{3} = 27$, las tres parejas de números que suman 27 son $(11, 16)$, $(12, 15)$ y $(13, 14)$, y es posible acomodarlos en caras opuestas. Concluir que la suma de todos los números de todas las caras del cubo es $65 + 16 = 81$.

Problema 15. Se tienen tres cuadrados cuyas longitudes de sus lados son 10 cm, 8 cm y 6 cm respectivamente, como se muestra en la figura de abajo. ¿Cuál es el área de la región superior delimitada por el segmento AB?



Área: Geometría.
Dificultad γ. Se requiere hacer uso de las nociones de perímetro y área. No se hace explícito qué perímetro y áreas deben calcularse para dar solución al problema. La solución se obtendrá de manera indirecta.
Procesos cognitivos:

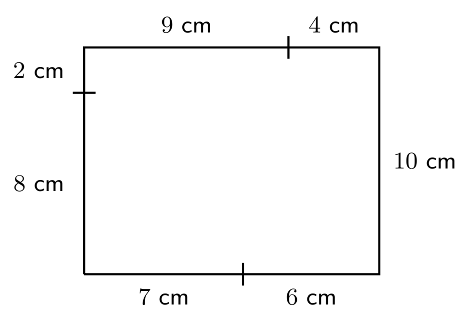
- De tipo 1: Interpretación del enunciado del problema. Ubicar los datos del problema, es decir, ubicar a cada cuadrado con su respectiva medida. Recordar conceptos de cuadrado y área. Distinguir en la figura la región superior formada por el segmento AB.

- De tipo 2: Analizar la región inferior delimitada por el segmento AB que corresponde a un triángulo rectángulo, ya que uno de sus ángulos coincide con uno de los ángulos del cuadrado mayor, además la altura de este triángulo está formada por uno de los lados del cuadrado mayor y la base es igual a la suma de un lado de cada cuadrado.
- De tipo 3: Encontrar que la estrategia para hallar el área pedida puede obtenerse con la diferencia del área total formada por los tres cuadrados y el área del triángulo rectángulo. Calcular el área de cada cuadrado y sumar las tres áreas (área total igual a 200 cm^2). Calcular el área del triángulo rectángulo (120 cm^2). Restar las áreas ($200-120=80$ cm^2).

Problema 16. Sofía tiene siete palitos de $2, 4, 6, 7, 8, 9$ y 10 centímetros de longitud. De todos los rectángulos que puede formar utilizando los siete palitos, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo de mayor área?

Área: Geometría.
Dificultad γ. Se necesitan hacer comparaciones para encontrar las dimensiones del rectángulo deseado. Las comparaciones están en función de la definición de rectángulo.
Procesos cognitivos:

- De tipo 1: Interpretación del enunciado del problema. Recordar conceptos previos sobre las propiedades de rectángulos.
- De tipo 2: Una de las estrategias en este proceso sería realizar varios ensayos formando diversos rectángulos, calcular áreas y compararlas hasta encontrar la de mayor área.
- De tipo 3: Partir de la noción de que el cuadrado es el rectángulo de mayor área. Realizar la suma de todas las longitudes (46 cm), dividir entre 4 y tener como referente que las dimensiones del rectángulo serían aproximadas a 11.5 cm. Concluir que el rectángulo de mayor área tiene lados de longitud 10 cm y 13 cm, y su área es de 130 cm^2.



5. Identificación de los niveles cognitivos

El estudio exploratorio fue llevado a cabo mediante un taller de resolución de problemas en el que participaron 8 niños de la escuela primaria pública Agustín de Iturbide, ubicada en la colonia San Luis Sur de la ciudad de Mérida, Yucatán, (esta institución permitió la implementación del taller durante 2 semanas con sesiones de una hora diaria). No se solicitó una característica en particular (promedios de calificaciones altos o interés por las matemáticas) para que los estudiantes pudieran participar en el taller, sino simplemente se pidió que fueran alumnos de sexto grado. Los ocho estudiantes participantes fueron seleccionados por el director de dicha escuela, cuatro estudiantes eran del grupo A y cuatro del grupo B, entre ellos cuatro varones y cuatro mujeres.

A cada alumno se le proporcionó un lápiz, tajador y hojas en blanco para resolver los problemas, y se le otorgaba otro problema hasta que entregaba resuelto el anterior. Las instrucciones para los estudiantes fueron: leer el problema y resolverlo de forma individual. En virtud de que el espacio asignado fue un aula con una mesa y sillas alrededor de la mesa, era inevitable que los estudiantes estuvieran completamente aislados, por lo que a pesar de que los estudiantes resolvían de manera individual, en ocasiones algunos tendían a apoyarse en sus compañeros. No se consideró prohibir a los estudiantes que no se apoyaran entre ellos (si sentían esa necesidad) ya que lo importante de la investigación eran los procesos heurísticos y estos podían surgir con la interacción entre pares. Para referir a los estudiantes y mantener su confidencialidad, se han etiquetado con las letras A, B, C, D, E, F, G y H. Algunos sucesos a mencionar son:

- No se permitió el uso de calculadora, libros de texto o algún otro material de apoyo. Para resolver los problemas se consideró que los estudiantes tenían los prerrequisitos académicos de acuerdo al plan de estudios vigente.

- Conducta que presentó el estudiante B. A partir del problema 7, el estudiante B se separa del grupo resolviendo los problemas apartado de sus compañeros (quienes desde el inicio, incluyéndolo a él, trabajaban alrededor de la mesa proporcionada). Se percibe que las razones por las cuales B decide separarse, es porque no deseaba que nadie imitara sus estrategias, además, antes de proceder a preguntar alguna duda, prefería tratar de salir de su duda por sí mismo. Se observó al estudiante siempre muy concentrado en la resolución de los problemas. En alguna ocasión, el estudiante C se acercó a él para resolver los problemas en conjunto.

- Uso de material tangible. En el problema 16 los estudiantes D, E, G y H motivados por el estudiante F, recortaron segmentos con las dimensiones mencionadas en los datos del problema y con la manipulación de ellos dieron solución (de manera colaborativa) a dicho problema.

El aplicador no resolvió los problemas con los alumnos, únicamente se limitaba a observar, llevar un registro de cada sesión y resolver las dudas que se presentaban. Los estudiantes levantaban la mano para pedir ayuda respecto a las dudas que surgían.

En el Anexo 1 se muestran los 16 problemas que se trabajaron en el taller. A continuación se describen las soluciones de los seis problemas que se presentaron en la metodología. Se omite el análisis de los procedimientos presentados por el estudiante A, debido a que siempre se apoyó en sus compañeros para resolver los problemas, por lo que sus procedimientos no son genuinos.

En todas las gráficas, los círculos blancos representan dificultad α, los círculos grises representan dificultad β y los círculos negros representan dificultad γ.

5.1. Problema 3

Los estudiantes B, C, E, F, G y H, resolvieron correctamente el problema. Se aprecia en ellos una interpretación adecuada del enunciado del problema, reconocimiento de los datos explícitos del problema, dominio del cálculo de volúmenes (procesos cognitivos de tipo 1) y conversión de litros a centímetros cúbicos (procesos cognitivos de tipo 2). En particular, los alumnos B (Figura 1), G y H no tienen la necesidad de representar gráficamente la pecera para calcular su volumen, a diferencia de los alumnos C, E y F.

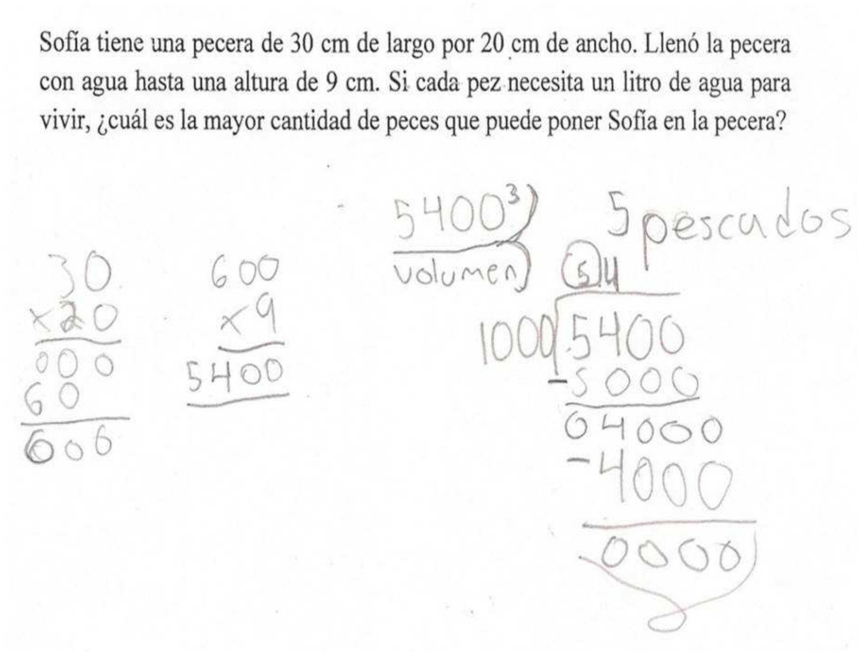


Figura 1: *Solución correcta del estudiante B al Problema 3.*

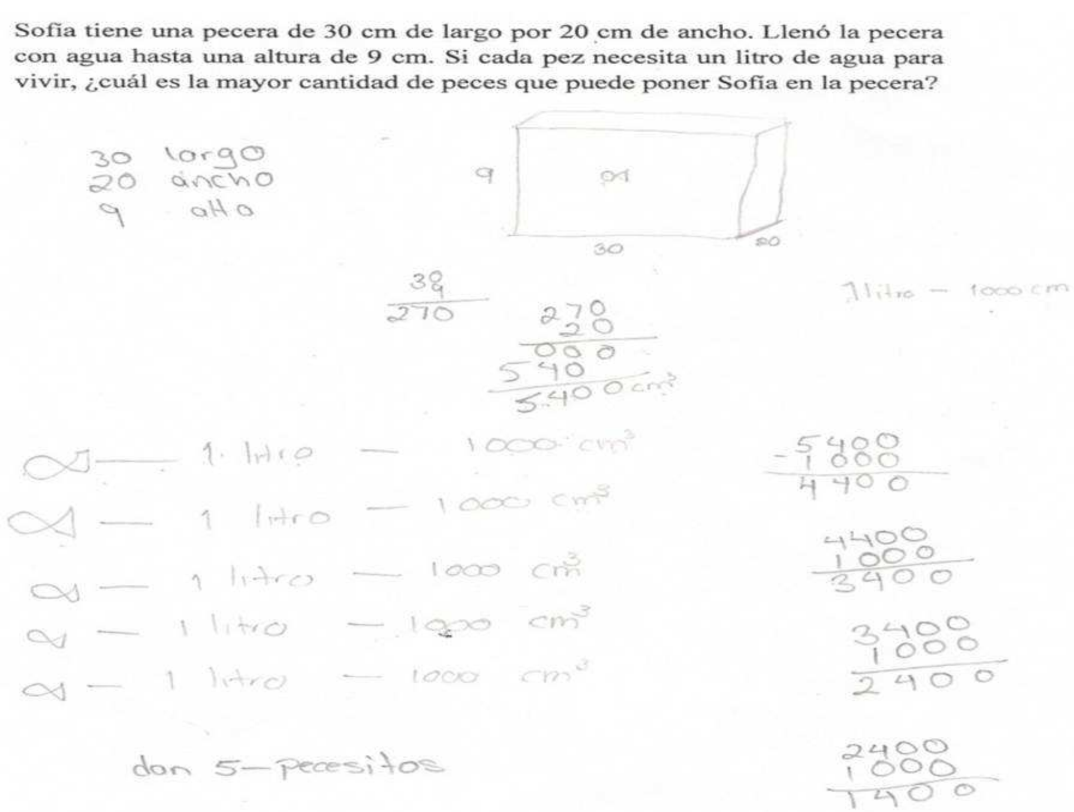


Figura 2: *El estudiante F requirió de un registro gráfico (representación de la pecera) y de un registro numérico (un pez - un litro - 1000 cm*^{3}*).*

Asimismo se identifican en los estudiantes procesos cognitivos de tipo 3, que los conducen a concluir la cantidad máxima de peces que debe tener la pecera (consideran la parte entera del resultado obtenido).

El estudiante B expresó verbalmente: "no podemos partir a un pececito en cuatro y tirarlo a la pecera". El estudiante F usa un recurso gráfico para la distribución de los peces de acuerdo a la cantidad de agua de la pecera (Figura 2). El estudiante D no resolvió el problema. En la Figura 3 se presenta el resumen del análisis previo.

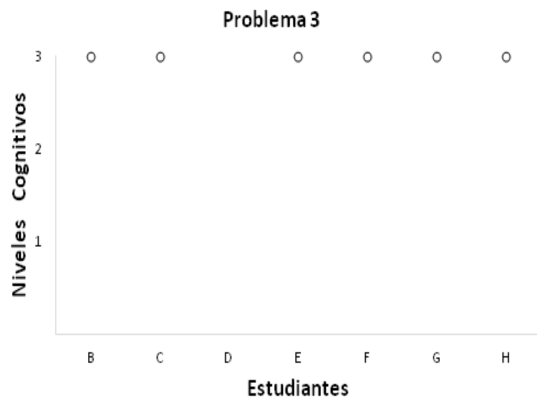


Figura 3: *El problema 3, de dificultad α fue resuelto correctamente por 6 estudiantes.*

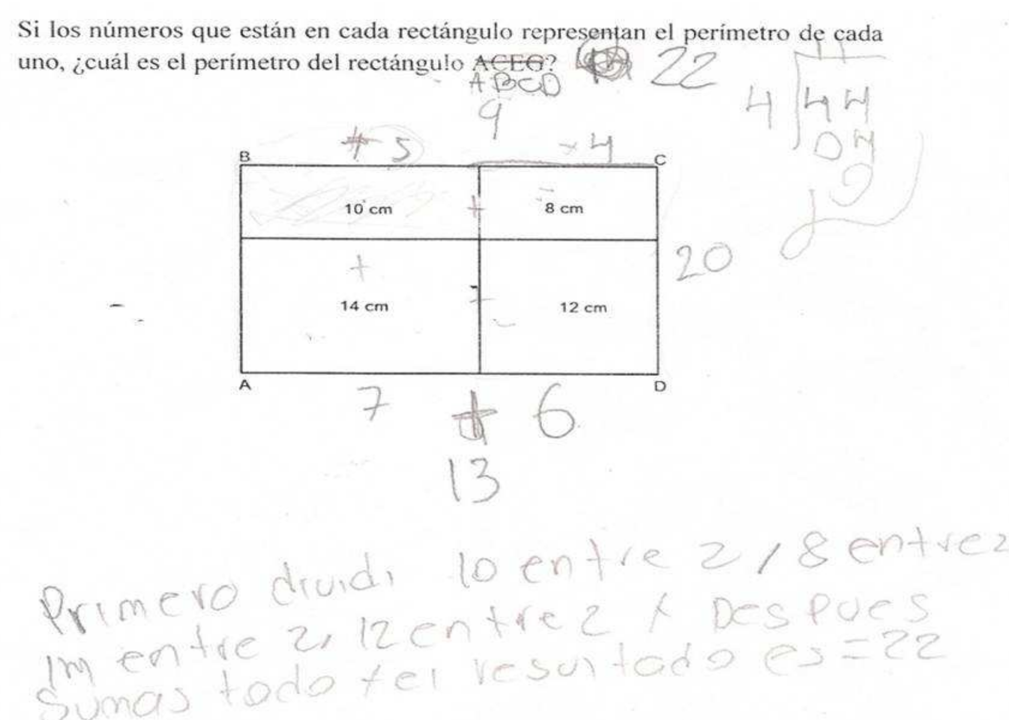


Figura 4: *Solución correcta del estudiante C al Problema 9.*

5.2. Problema 9

Este problema fue resuelto correctamente por los estudiantes C, D, E, F, G y H. Los estudiantes C (Figura 4) y D dividen cada perímetro dado entre 2, identificando que cada resultado representa la suma de un lado menor y un lado mayor de cada rectángulo, y que la suma de dichos resultados corresponden al perímetro del rectángulo $ABCD$ (22 cm).

Los procesos cognitivos de tales estudiantes transitan entre procesos cognitivos de tipo 1 hasta procesos cognitivos de tipo 3.

Por su parte, por medio de ensayo y error, los estudiantes E (Figura 5) y F proponen las dimensiones de los lados de cada rectángulo, que satisfagan las condiciones del problema. Después de varios intentos, encuentran la respuesta, sin embargo no hay evidencia de que se haya dado cuenta que el perímetro del rectángulo $ABCD$ es la mitad de la suma de los perímetros de los cuatro rectángulos interiores. La forma de proceder de los estudiantes G y H fue similar a como lo hicieron los estudiantes E y F, solo que no logran determinar que el perímetro del rectángulo $ABCD$ es 22 cm. Estos cuatro estudiantes, evidencian procesos cognitivos de tipo 2.

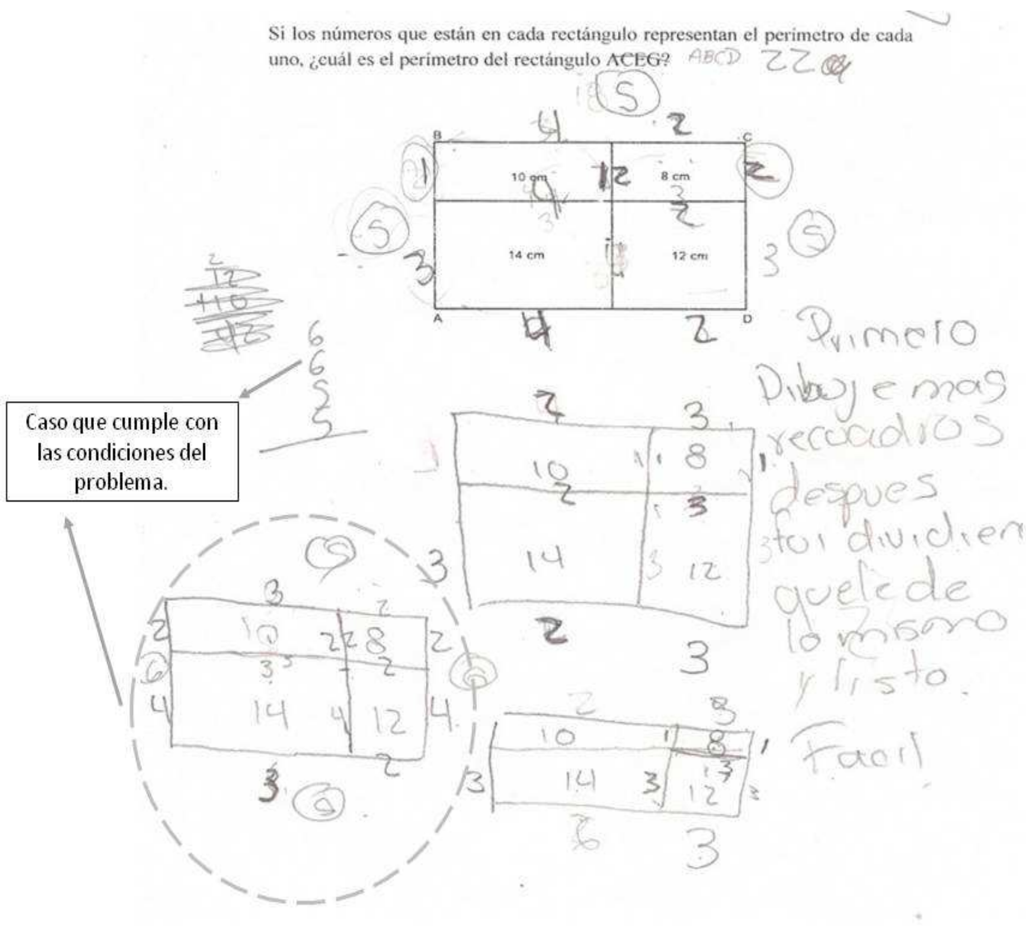


Figura 5: *Solución del estudiante E al Problema 9 por medio de ensayo y error.*

El estudiante B realizó algunas divisiones de los perímetros entre 2 y entre 4 pero no muestra cómo sus resultados le pueden ser útiles para hallar el perímetro pedido (Figura 6), de manera que se presencian en él procesos cognitivos de tipo 1. En la Figura 7 se presenta el resumen del análisis previo.

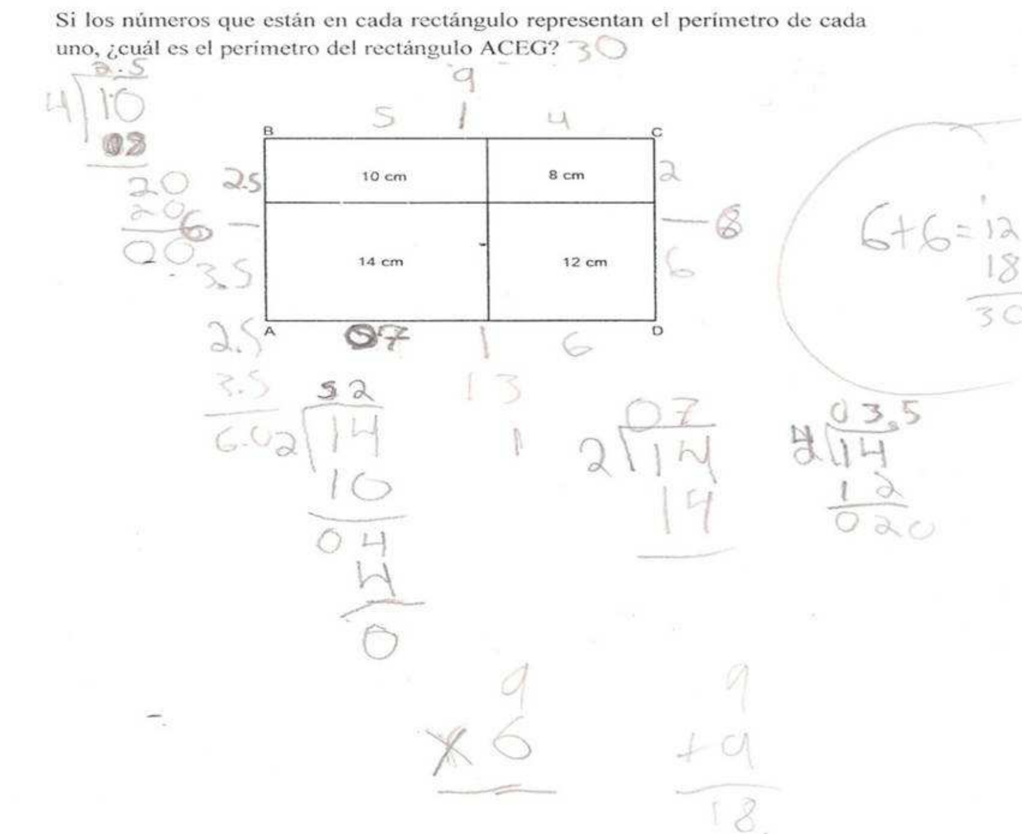


Figura 6: *Solución del estudiante B al Problema 9. Se aprecia que este estudiante no tiene un referente correcto del perímetro de un rectángulo.*

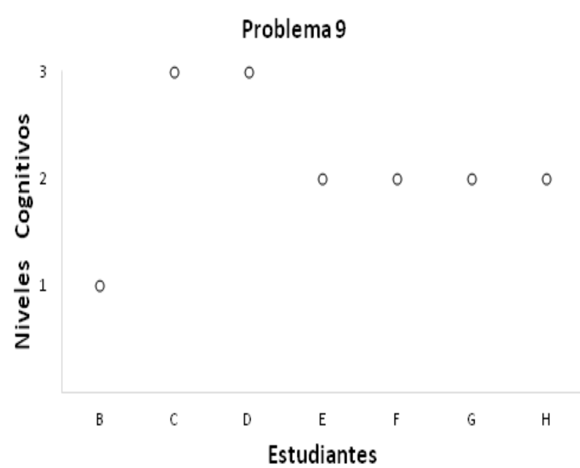


Figura 7: *A pesar de que el problema está considerado de dificultad α, los estudiantes presentaron complicaciones en su resolución.*

5.3. Problema 11

Los estudiantes D, E y F (Figura 8) resolvieron correctamente el problema. Sus soluciones consistieron en realizar la representación gráfica del rectángulo de 9 cm $\times$ 3 cm y posteriormente realizaron diferentes divisiones a dicho rectángulo hasta obtener los 8 cuadrados pedidos: 2 de 3 cm de lado; 5 de 1 cm de lado; y uno de 2 cm de lado.

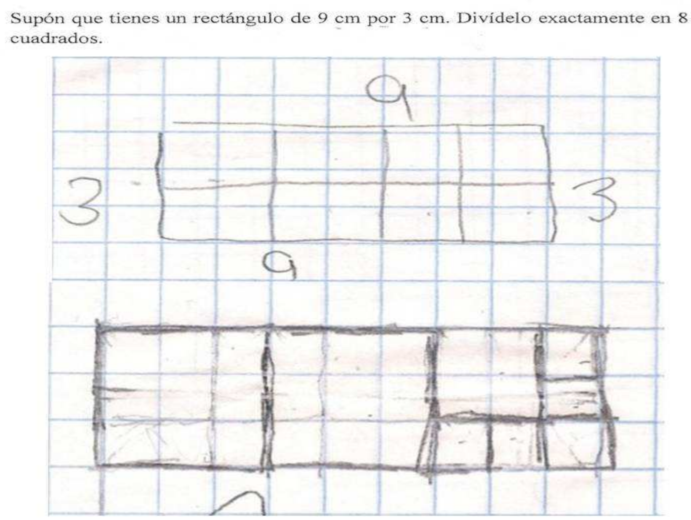


Figura 8: *Solución del estudiante F al Problema 11. El uso de una hoja cuadriculada fue de apoyo en la resolución del problema.*

En particular, el alumno E los enumera del 1 al 8 para verificar que ha obtenido ocho cuadrados. De acuerdo con la forma de proceder, estos estudiantes manifiestan procesos cognitivos de tipo 3. Los demás estudiantes no asistieron a esa sesión del taller. En la Figura 9 se muestra el resumen del análisis previo.

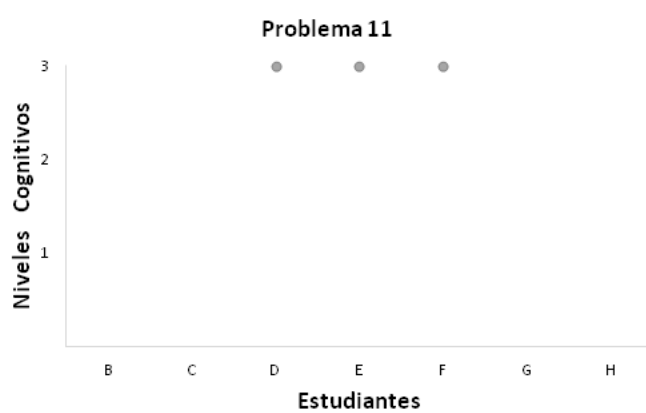


Figura 9: *La representación gráfica del rectángulo de 9 cm $\times$ 3 cm (en una hoja cuadriculada), fue un apoyo para la resolución del problema (de complejidad β).*

5.4. Problema 13

Los estudiantes no recordaban el concepto de números consecutivos. Para ayudarlos, el aplicador escribió en el pizarrón:

$$1, 2, 3,$$
$$5, 12, 54,$$

preguntando a los estudiantes:

¿en cuál de los dos ejemplos hay tres números consecutivos?

El alumno B respondió que en el segundo ejemplo los números no son consecutivos, porque "no están seguidos".

Los estudiantes H (Figura 10) y C (Figura 11), encuentran los tres números requeridos y por ensayo y error hallan que la suma de los números de las caras opuestas es 27 $(11+16=27, 14+13=27, 15+12=27)$; no se percatan de una *posible* segunda solución con los números consecutivos $10, 11, 12, 13, 14, 15$ y 16. H y C evidencian procesos cognitivos de tipo 2.

Otros estudiantes como B y E encuentran los seis números consecutivos correctos $(11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15$ y $16)$; sin embargo no colocan los números correctamente en las caras opuestas. Por ejemplo, B al realizar las sumas $11+15=26$ y $12+14=26$, considera que ya encontró la suma correcta, pero no se da cuenta que 11 y 15 no están en caras opuestas y que $13+16 \neq 26$. Los procesos cognitivos de B y E fueron clasificados de tipo 1. Por su parte, los estudiantes D, F y G no pudieron resolver el problema.

En la Figura 12 se muestra el resumen del análisis previo.

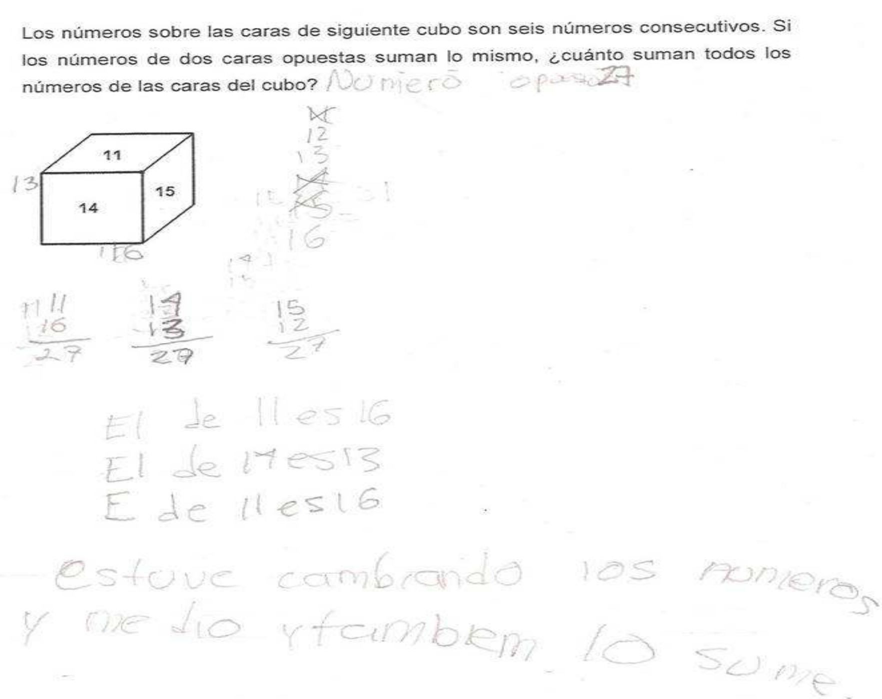


Figura 10: *Solución del estudiante H al Problema 13.*

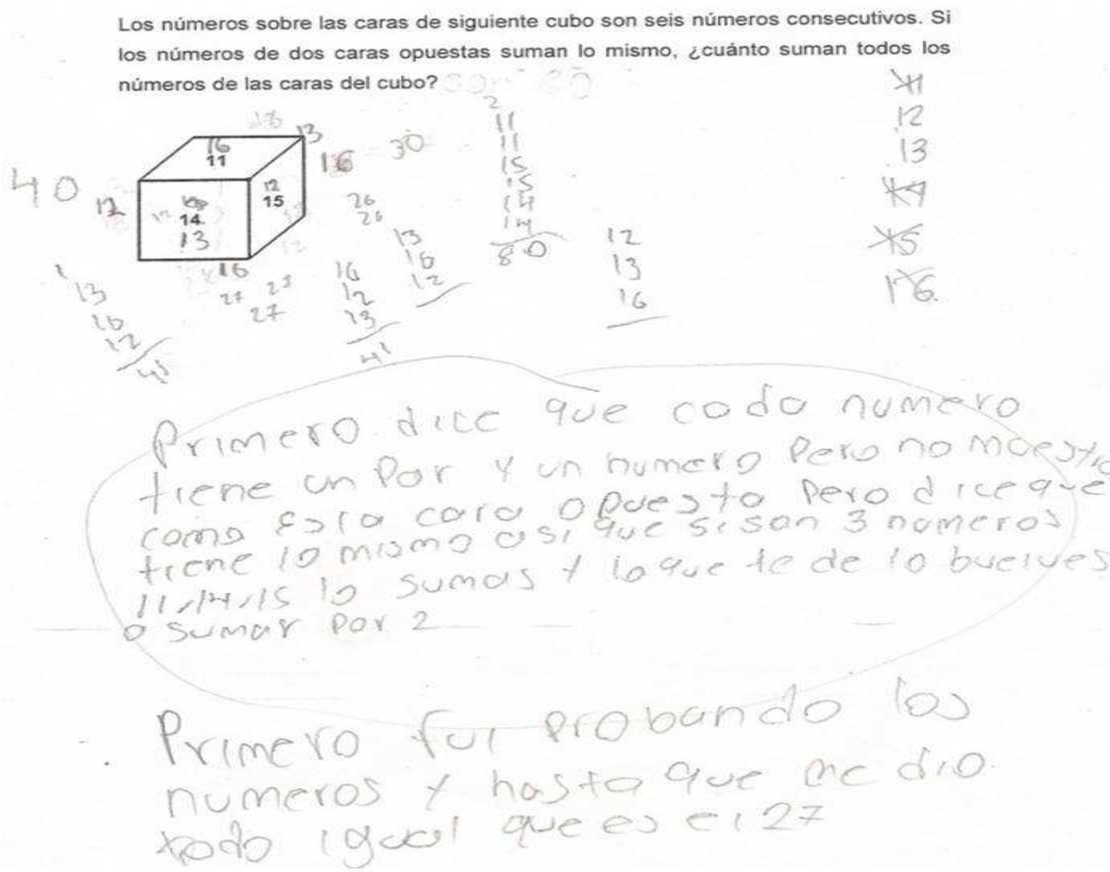


Figura 11: *Solución del estudiante C al Problema 13.*

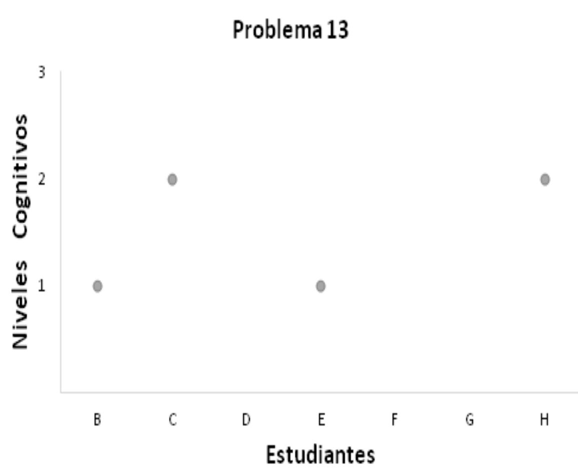


Figura 12: *La dificultad principal en este problema fue no percibir otra posible solución.*

5.5. Problema 15

La solución correcta es hallada por C, D (Figura 13), E y G, quienes interpretan el problema, aplican nociones de perímetro y área, y finalmente realizan los cálculos correspondientes para hallar el área pedida, obteniendo así la respuesta correcta. Estos estudiantes evidencian procesos cognitivos de tipo 3, como se muestra en la Figura 14.

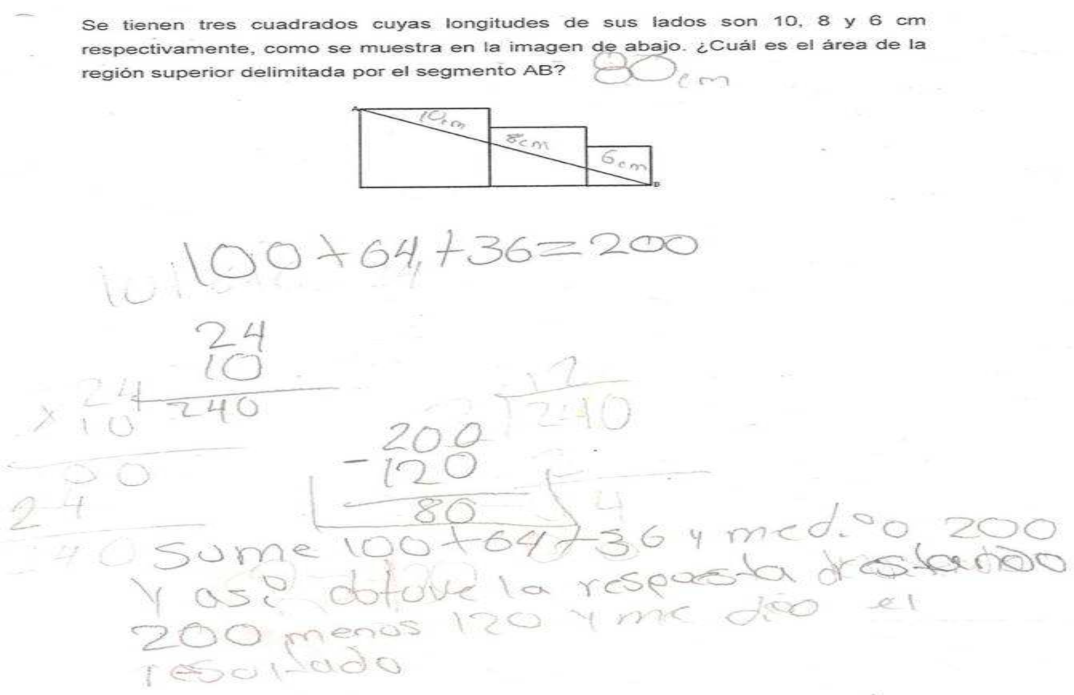


Figura 13: *Solución del estudiante D al Problema 15.*

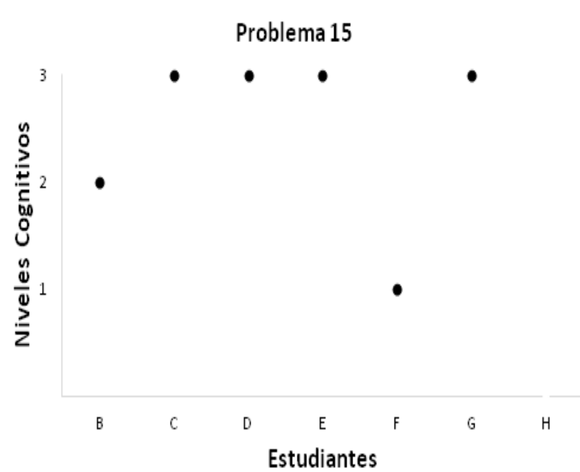


Figura 14: *Este problema, de complejidad β, fue resuelto correctamente por 4 estudiantes.*

El estudiante F no identificó el triángulo rectángulo que se formaba con las bases de los tres cuadrados y el segmento AB, mientras que el estudiante B no logró identificar que el área pedida se podía obtener restando al área total el área del triángulo rectángulo. Entre los procesos que realizaron ambos alumnos se encuentran: la ubicación de las dimensiones de cada cuadrado en la representación gráfica, el cálculo del área de los tres cuadrados y la obtención del área total conformada por la suma de las áreas de los tres cuadrados. Los procesos cognitivos de estos estudiantes son clasificados para F de tipo 1 y para B de tipo 2. El estudiante H no logró resolver el problema.

5.6. Problema 16

Todos los estudiantes lograron resolver el problema. El estudiante C (Figura 15) inicia buscando dos números cuya suma sea igual a 10, discriminando del grupo a los números 10, 4 y 6, considerando así que dos de los lados del rectángulo medirán 10 cm cada uno.

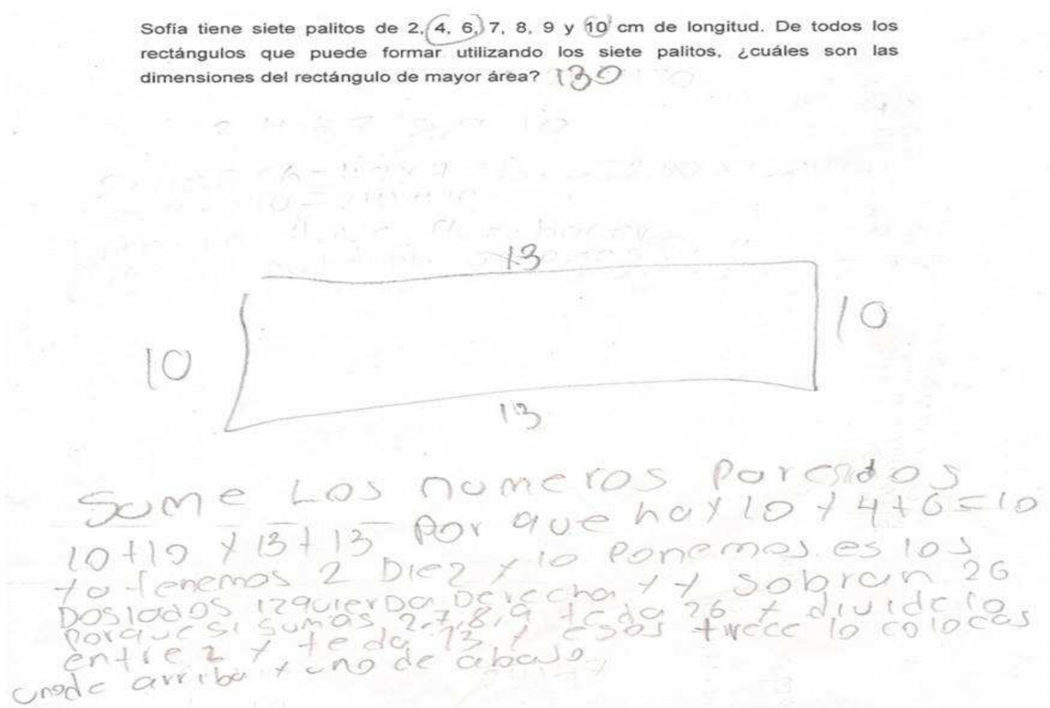


Figura 15: *Solución del estudiante C al Problema 16.*

Para encontrar los otros dos lados, suma las dimensiones de los palitos restantes $(2, 8, 7$ y $9)$ y el resultado lo divide entre 2, indicando que los otros dos lados del rectángulo medirán 13 cm cada uno; sin embargo, aunque esta medida es la correcta para el otro par de lados, la forma de proceder no lo es, ya que no hay manera de juntar a $2, 8, 7$ y 9 centímetros para que se formen dos lados de 13 cm cada uno. La forma de razonar de C se clasifica en procesos cognitivos de tipo 1.

El procedimiento de B (Figura 16) consistió en buscar parejas de números que al sumarlos dieran como resultado una misma cantidad, la cual representaría la medida de los lados rectángulo, siendo uno de los resultados el número 13, proporcionado en el análisis a priori del problema. Después de haber encontrado los números, calculó el área del rectángulo. B evidencia procesos cognitivos de tipo 2.

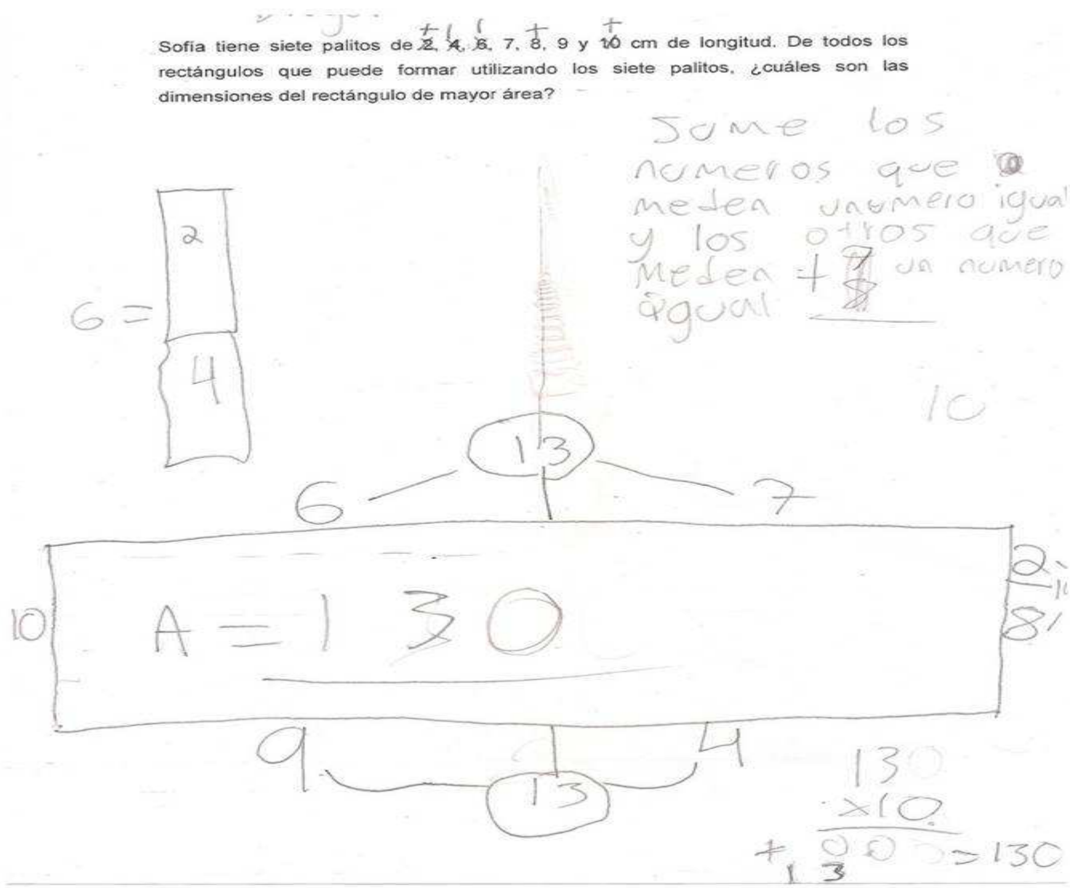


Figura 16: *Solución del estudiante B al Problema 16.*

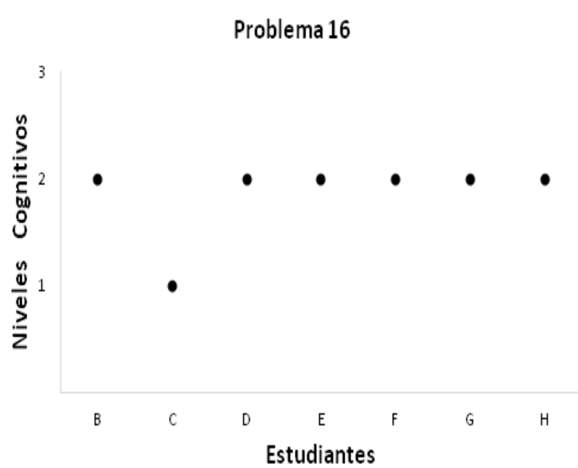


Figura 17: *El problema fue resuelto por 5 estudiantes con apoyo de material tangible.*

Por su parte, los alumnos D, E, F, G y H recurren al uso de material tangible. Es F quien sugiere a sus compañeros recortar segmentos con las dimensiones mencionadas en el problema, que representen a los palitos. Con el material tangible, estos cinco estudiantes forman diferentes rectángulos, calculando su área y comparándola, realizan este procedimiento hasta finalmente encontrar al rectángulo de mayor área (esta estrategia es por ensayo y error). Se percibe en D, E, F, G y H procesos cognitivos de tipo 2. En la Figura 17 se presenta el resumen del análisis previo.

6. Conclusiones

Los resultados obtenidos del estudio exploratorio dan cuenta, que la resolución de problemas matemáticos caracterizados con niveles de dificultad, estimulan el desarrollo cognitivo de los estudiantes.

Con base en los aspectos de interés de esta investigación, se concluye que:

- Los estudiantes pueden resolver problemas de matemáticas en diferentes niveles de complejidad con las nociones básicas que se especifican en los planes de estudio vigente.
- De acuerdo al análisis de los procesos heurísticos de los estudiantes, se evidencia la presencia de razonamiento matemático y niveles de pensamiento cognitivo. Es importante mencionar que los estudiantes no poseen un desarrollo de habilidades en la resolución de los tipos de problemas presentados, lo que permite apreciar en ellos un razonamiento matemático genuino.
- En la resolución de problemas matemáticos, resulta valioso el esfuerzo cognitivo que los estudiantes realizan, porque esto conlleva al desarrollo de un pensamiento sistémico, conectando los conceptos previamente adquiridos para dar solución a una situación desconocida que exige razonamiento y creatividad. Resolver problemas con niveles de complejidad debe ser considerado como una estrategia didáctica en la Educación Básica, porque promueve desde edades tempranas un pensamiento analítico.

Finalmente, presentamos en gráficas el resumen de los niveles cognitivos de los estudiantes participantes en los 16 problemas que se les proporcionaron. En dichas gráficas se permite apreciar en cada estudiante los referentes cognitivos que se evidenciaron al resolver los problemas; y también valorar la exigencia cognitiva que subyace a cada problema o identificar los factores que pueden impedir su resolución (por ejemplo, el problema 6 no fue resuelto por los estudiantes debido a que no dominaban el concepto de ángulo y, a pesar de que el investigador-aplicador proporcionó la definición y dio algunos ejemplos, los estudiantes no pudieron resolver correctamente el problema). Como en las gráficas anteriores, los círculos blancos representan dificultad α, los círculos grises representan dificultad β y los círculos negros representan dificultad γ.

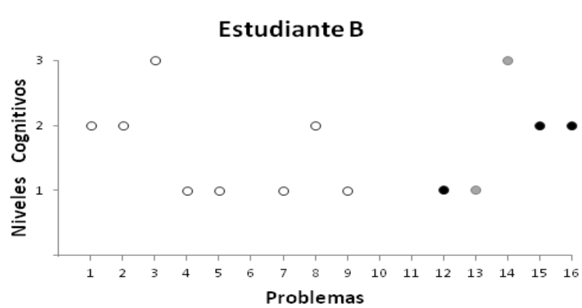


Figura 18: *El estudiante B se caracterizó por el interés que mostró en la resolución de los problemas presentados en el taller.*

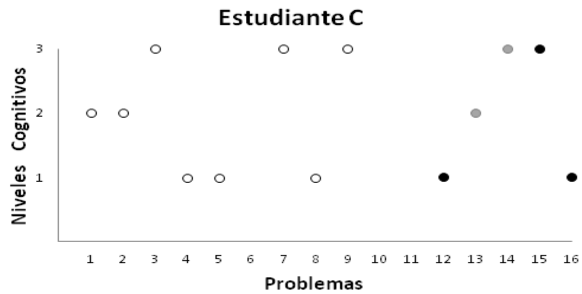


Figura 19: *El estudiante C resolvió exitosamente varios de los problemas matemáticos.*

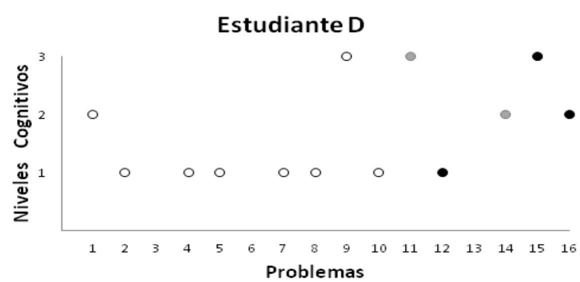


Figura 20: *El estudiante D presentó dificultades en la resolución de los problemas. Destacó principalmente en los problemas de geometría.*

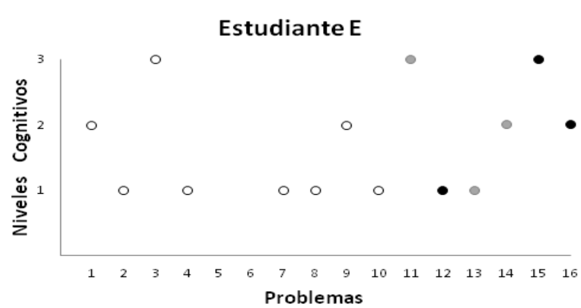


Figura 21: *El estudiante E también destacó principalmente en los problemas de geometría. Fue uno de los pocos estudiantes que resolvieron correctamente el problema 15 de complejidad* γ.

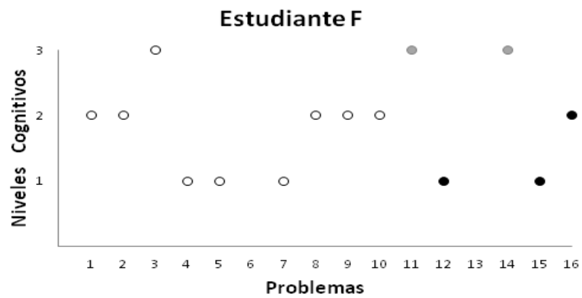


Figura 22: *El estudiante F presentó en promedio, un nivel cognitivo tipo 2, que bajo la taxonomía de Bloom aplicada a las matemáticas compete a los niveles de aplicación y análisis.*

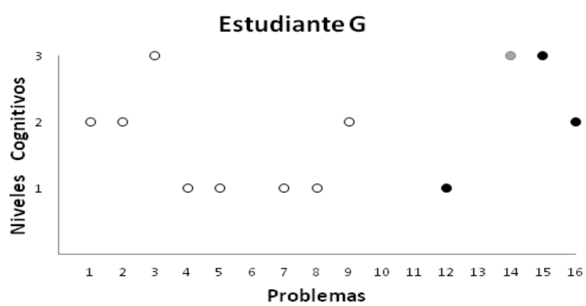


Figura 23: *El estudiante G presentó niveles cognitivos de tipo 2 (aplicación y análisis acorde a la taxonomía de Bloom aplicada a las matemáticas) y de tipo 3 (síntesis y evaluación), en los problemas de complejidades α y β. Tuvo mayor dificultad en la resolución de los problemas de complejidad γ.*

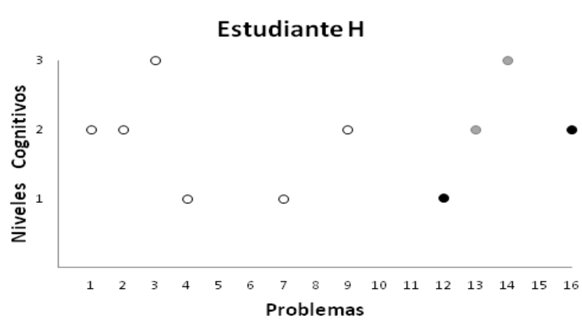


Figura 24: *El estudiante H presentó niveles cognitivos de tipo 2 y tipo 3 en los problemas de complejidad β.*

Referencias

[1] Bernabeu G. *100 Problemas matemáticos,* 2010. Recuperado del sitio Web del Centro de Formación, Innovación y Recursos Educativos de ELDA: http://www.lavirtu.com/eniusimg/enius4/2012/01/adjuntos_fichero_3543.pdf

[2] Cañadas, M. *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas.* Granada, España: Editorial de la Universidad de Granada, 2007.

[3] Contreras, L. El Papel de la Resolución de Problemas en el Aula. *Revista Electrónica Iberoamericana de Educación en Ciencias y Tecnología*, (1), 37-98, 2009.

[4] Del Valle, M. y Curotto, M. La resolución de problemas como estrategia de enseñanza y aprendizaje. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, **7**(2), 463-479, 2008.

[5] Eisner, E. Benjamín Bloom (1913-1999). *Perspectivas: revista trimestral de educación comparada*, **30**(3), 423-432, 2000.

[6] Esquivias, M., González, A. y Muria, I. Solución de Problemas: Estudio evaluativo de tres enfoques pedagógicos en las escuelas mexicanas. *Revista Electrónica de Investigación Psicoeducativa y Psicopedagógica*, **1**(2), 79-96, 2003.

[7] García, E. *Teoría de la mente y ciencias cognitivas.* Documento no publicado, Universidad Complutense, Madrid, España, 2007.

[8] Linares, A. *Desarrollo cognitivo: las teorías de Piaget y Vygotsky.* Documento no publicado, Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona, España, 2007.

[9] López, A. Razonamiento humano: distintos niveles insight, estructura y organización lógica subyacente. *Revista de Psicología General y Aplicada*, **44**(2), 221-230, 1991.

[10] Luengo, M. Taxonomía de capacidades aplicada a las matemáticas. *Aula abierta*, 71, 203-212, 1998.

[11] Maestre, A. Mi inteligencia crece. Desarrollo cognitivo. *Revista Digital Innovación y Experiencias Educativas*, 13, 1-10, 2008.

[12] Marín, M. *Resolución de problemas en la formación matemática de los y las estudiantes*. Documento no publicado, Escuela de Matemáticas ITCR, Costa Rica, 2010.

[13] Papalia, D., Wendoks, S. y Duskin, R. *Desarrollo Humano*. (Undécima Edición). México: Mc Graw Hill, 2009.

[14] Philip, F. *Desarrollo humano, estudio del ciclo vital.* (Segunda Edición). México: Prentice-Hall, 1997.

[15] Piaget, J. *Psicología y Pedagogía*. (Sociéte Nouvelle des Editions Gontier). París, España: Ariel. (Trabajo original publicado en 1969), 1981.

[16] Polya, G. *Cómo plantear y resolver problemas*. (J. Zugazagoitia, Trad.) México: D.F.: Editorial Trillas. (Trabajo original publicado en 1945), 1976.

[17] Puig, L. *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares, 1996.

[18] Segunda Sección. Poder ejecutivo. *Secretaría de Educación Pública*. Diario Oficial, 2011.

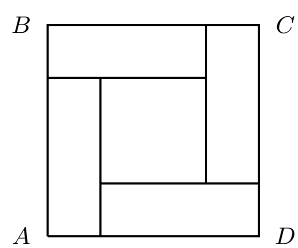
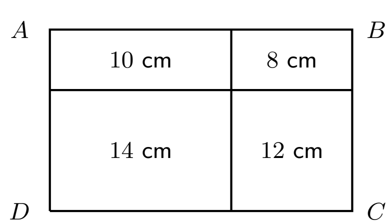
[19] Subsecretaría de Educación Básica y Normal de la Secretaría de Educación Pública. *Matemáticas y su enseñanza I*. (Tercera Edición). México, D.F.: Secretaría de Educación Pública, 2001.

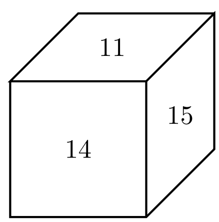
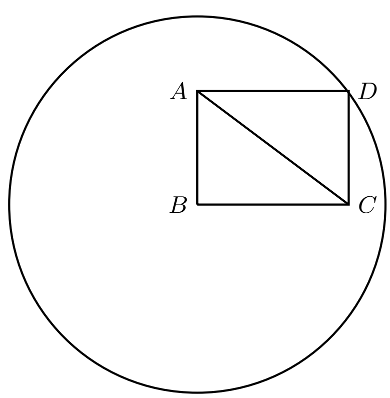
[20] Sordo, J. Estudio de una estrategia didáctica basada en las nuevas tecnologías para la enseñanza de la Geometría. Madrid, España: Universidad Complutense de Madrid, 2005.

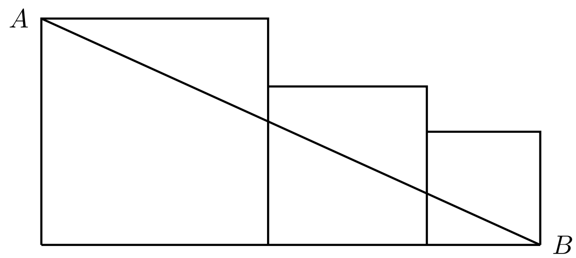
[21] Villalobos, X. Resolución de problemas matemáticos: un cambio epistemológico con resultados metodológicos. *Revista Electrónica Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, **6**(3), 36-58, 2008.

[22] Zatorre, R. La música es un vehículo para entender cómo funciona el cerebro. *El País*, 2005. Recuperado de http://elpais.com/diario/2005/01/19/futuro/1106089202_850215.html

6.1. Anexo 1. Tabla de los 16 problemas matemáticos

No.	Problema	Área	Dificultad
1	Un grupo de amigos tiene en total 29 dulces. Seis de ellos tienen solo un dulce, cinco tienen 3 dulces y el resto tiene 2 dulces. ¿Cuántos amigos tienen solamente 2 dulces?	Aritmética	α
2	El año pasado 100 gatos adultos fueron llevados a una tienda de mascotas. De los 100 la mitad eran hembras. La mitad de las hembras adultas tenía gatitos. El número promedio de gatitos por cada hembra era 4. ¿Cuántos gatos adultos y gatitos, recibió en total la tienda de mascotas el año pasado?	Aritmética	α
3	Sofía tiene una pecera de 30 cm de largo por 20 cm de ancho. Llenó la pecera con agua hasta una altura de 9 cm. Si cada pez necesita un litro de agua para vivir, ¿cuál es la mayor cantidad de peces que puede poner Sofía en la pecera?	Aritmética y Geometría	α
4	¿Cuántos enteros entre el 10 y el 99 tienen la propiedad de que el dígito de las unidades es mayor que el dígito de las decenas?	Aritmética	α
5	En la figura, los cuatro rectángulos que forman el cuadrado $ABCD$ son iguales y el perímetro de cada uno de ellos es 14 cm. ¿Cuál es el área del cuadrado $ABCD$? 	Geometría	α
6	Si un ángulo $\angle ABC$ mide $24°$ y un ángulo $\angle ABD$ mide $20°$, ¿cuál es el mínimo número de grados que puede medir el ángulo $\angle CBD$?	Geometría	α
7	En una recta se marcan cuatro puntos A, B, C y D en algún orden. Se sabe que $AB = 13$ cm, $BC = 11$ cm, $CD = 14$ cm y $DA = 12$ cm. ¿Cuál es la distancia entre los puntos más alejados entre sí?	Geometría	α
8	Mary puede hornear un pastelito cada 20 segundos y Rita lo puede hacer en 30 segundos. Trabajando juntas, ¿cuántos pastelitos pueden hornear en 5 minutos?	Aritmética	α
9	Si los números que están en cada rectángulo representan el perímetro de cada uno, ¿cuál es el perímetro del rectángulo $ABCD$? 	Geometría	α

No.	Problema	Área	Dificultad
10	En una fiesta hay 4 niños y 4 niñas. Los niños bailaron solo con las niñas y las niñas bailaron solo con los niños. Al final se les preguntó a cada uno con cuántas personas habían bailado. Los niños dieron las respuestas 3, 1, 2, 2, y las niñas dijeron 2, 2, 2, y no se escuchó la respuesta de la cuarta niña. ¿Cuál fue su respuesta?	Aritmética	α
11	Supón que tienes un rectángulo de 9 cm por 3 cm. Divídelo exactamente en 8 cuadrados.	Geometría	β
12	Un cilindro largo de papel se pintará con 3 colores y se cortará por secciones del mismo color. Si se cortan las secciones rojas, se obtienen 5 pedazos; si se cortan las secciones amarillas se obtienen 7 pedazos; si se cortan las secciones verdes, se obtienen 11 pedazos. ¿Cuántos pedazos se obtienen si se cortan todas las secciones?	Aritmética	γ
13	Los números sobre las caras del siguiente cubo son seis números consecutivos. Si los números de dos caras opuestas suman lo mismo, ¿cuánto suman todos los números de las caras del cubo? 	Aritmética	β
14	En la siguiente figura, el rectángulo $ABCD$ está en el interior de la circunferencia donde el vértice B es el centro de la misma. Si AC mide 6 cm, ¿cuánto mide el diámetro de la circunferencia? 	Geometría	β

No.	**Problema**	**Área**	**Dificultad**
15	Se tienen tres cuadrados cuyas longitudes de sus lados son 10 cm, 8 cm y 6 cm respectivamente, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el área de la región superior delimitada por el segmento AB? 	Geometría	γ
16	Sofía tiene siete palitos de 2, 4, 6, 7, 8, 9 y 10 centímetros de longitud. De todos los rectángulos que puede formar utilizando los siete palitos, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo de mayor área?	Geometría	γ